Температурный ангармонизм

Рассеяние Мандельштама-Бриллюэна

Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна

Температурный ангармонизм

Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна.

Связанные уравнения

В случае бигармонической накачки связанные уравнения для электромагнитных волн имеют вид

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_1=\frac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_1)$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_2=\frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_2)$$

нелинейная поляризация

и решаются совместно с уравнением для оптического возбуждения акустической волны

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2\Gamma\frac{\partial}{\partial t}-v^2\nabla^2\right]\Delta\rho=-\nabla\cdot\mathbf{f}$$

вынуждающая сила

где

Γ - постоянная затухания (полуширина линии спонтанного РМБ)

v - скорость акустической волны

$\Delta\rho$ - локальное изменение плотности

Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна.

Температурный ангармонизм

Связанные уравнения

Правая часть уравнений – результат нелинейного взаимодействия всех трех волн ($\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \Delta\rho$):

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_1=\frac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_1)$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_2=\frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_2)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2\Gamma\frac{\partial}{\partial t}-v^2\nabla^2\right]\Delta\rho=-\nabla\cdot\mathbf{f}$$

$$\mathbf{P}^{NL}(\omega_1)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\mathbf{E}_2\Delta\rho$$

$$\mathbf{P}^{NL}(\omega_2)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\mathbf{E}_1\Delta\rho$$

$$\mathbf{f}=\nabla p=\nabla\left(\frac{1}{2\pi}\gamma\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*\right)$$

где p - электрострикционное давление

$\gamma=\rho_0\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}$ - коэффициент электрострикции

ρ_0 - плотность среды

Температурный ангармонизм:

Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна назад

ММА

Эту задачу параметрического взаимодействия решаем методом ММА:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\alpha}{2}\right)E_1=\frac{i\omega_1^2}{2k_1c^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E_2(\Delta\rho)_0e^{-i\Delta kz}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\alpha}{2}\right)E_2{}^*=\frac{i\omega_2^2}{2k_2c^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E_1{}^*(\Delta\rho)_0e^{-i\Delta kz}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\Gamma}{v}\right)(\Delta\rho)_0=\frac{ik_a}{4\pi v^2}\rho_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E_1E_2{}^*e^{i\Delta kz}$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_1=\frac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_1)$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_2=\frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_2)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2\Gamma\frac{\partial}{\partial t}-v^2\nabla^2\right]\Delta\rho=-\nabla\cdot\mathbf{f}$$

где

$$\mathbf{E}_1=E_1e^{ik_1z-i\omega_1t},\quad \mathbf{E}_2=E_2e^{-ik_2z-i\omega_2t},\quad \Delta\rho=(\Delta\rho)_0e^{ik_az-i\omega_at},$$

частота и волновой вектор вынужденной акустической волны $\omega_a=\omega_1-\omega_2,\ k_a=\omega_a/v$

волновая расстройка $\Delta k=k_1+k_2-k_a$

α - постоянная затухания

ВРМБ в условиях сильного поглощения акустической волны

Температурный ангармонизм:

В реальных средах (жидкостях) затухание велико $\Gamma / v = 10^4$ см-1

тогда воспользуемся приближением $\partial(\Delta\rho)_0 / \partial z = i\Delta k(\Delta\rho)_0$

получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}\right) E_1 = \frac{i 2\pi \omega_1^2}{k_1 c^2} \chi_{MB}^{(3)} \left|E_2\right|^2 E_1$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\alpha}{2}\right) E_2^* = \frac{i 2\pi \omega_2^2}{k_2 c^2} \chi_{MB}^{(3)} \left|E_1\right|^2 E_2^*$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}\right) E_1 = \frac{i\omega_1^2}{2k_1 c^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E_2 (\Delta\rho)_0 e^{-i\Delta k z}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\alpha}{2}\right) E_2{}^* = \frac{i\omega_2^2}{2k_2 c^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E_1{}^* (\Delta\rho)_0 e^{-i\Delta k z}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\Gamma}{v}\right) (\Delta\rho)_0 = \frac{i k_a}{4\pi v^2} \rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E_1 E_2{}^* e^{i\Delta k z}$$

где кубичная восприимчивость, ответственная за ВРМБ:

$$\chi_{MB}^{(3)} = \left(\frac{\partial\varepsilon / \partial\rho}{4\pi v}\right)^2 \frac{k_a \rho_0}{\Delta k - i\Gamma / v}$$

Температурный ангармонизм

Приближение заданной накачки в ВРМБ

поскольку $\operatorname{Im}\chi_{MB}^{(3)} > 0$

то E_2 нарастает в направлении назад при выполнении условия превышения усиления над потерями:

$$\frac{2\pi\omega_2}{k_2 c^2}\operatorname{Im}\left(\chi_{MB}^{(3)}\right)\left|E_1\right|^2 > \frac{\alpha}{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\alpha}{2}\right)E_1 = \frac{i2\pi\omega_1^2}{k_1 c^2}\chi_{MB}^{(3)}\left|E_2\right|^2 E_1$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\alpha}{2}\right)E_2^* = \frac{i2\pi\omega_2^2}{k_2 c^2}\chi_{MB}^{(3)}\left|E_1\right|^2 E_2^*$$

В приближении заданного поля накачки

$$\left|E_2(z)\right|^2 = \left|E_1(l)\right|^2 e^{(G_{MB}-\alpha)(l-z)}$$

с коэффициентом усиления ВРМБ

$$G_{MB} = \frac{4\pi\omega_2^2}{k_2 c^2}\operatorname{Im}\left(\chi_{MB}^{(3)}\right)\left|E_1\right|^2$$

Температурный ангармонизм

Вынужденное температурное рассеяние
Энтропийные и температурные волны

Более корректно, изменение плотности является следствием акустических и энтропийных волн:

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S \Delta p + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_p \Delta S$$

ВРМБ рассеяние Рэлея

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_1 = \frac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_1)$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_2 = \frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_2)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2\Gamma\frac{\partial}{\partial t}-v^2\nabla^2\right]\Delta\rho = -\nabla\cdot\mathbf{f}$$

В эксперименте удобно пользоваться температурой как независимой термодинамической переменной, т.е. удобно сделать замену переменных

$$(p,S)\to(\rho,T)$$

$\Delta\rho$, ΔT оказываются связаны через уравнение Навье-Стокса,

уравнение непрерывности и уравнение передачи энергии

Температурный ангармонизм

Вынужденное температурное рассеяние. Уравнение Навье-Стокса и уравнение непрерывности

$$\rho_o \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{v^2}{\delta} \nabla(\Delta\rho) + \frac{v^2 \beta_T \rho_0}{\delta} \nabla(\Delta T) - \eta \nabla^2 \mathbf{v} =$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi} \nabla\left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*\right) - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*\right) \nabla(\Delta T)$$

и $$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\rho + \rho_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{v}\right) = 0$$

где $\delta = \dfrac{C_p}{C_v}$ - отношение теплоемкостей

β_T - изотермическая сжимаемость

η - коэффициент затухания акустической волны

$\gamma = \rho_0 \left(\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T$ - коэффициент электрострикции

Вынужденное температурное рассеяние. Уравнение Навье-Стокса и уравнение непрерывности

Температурный ангармонизм

$$\rho_o \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{v^2}{\delta}\nabla(\Delta\rho) + \frac{v^2 \beta_T \rho_0}{\delta}\nabla(\Delta T) - \eta\nabla^2\mathbf{v} =$$
$$= \frac{\gamma}{2\pi}\nabla\left(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*\right) - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \left(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*\right)\nabla(\Delta T)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\rho + \rho_0(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0$$

Эту систему можно преобразовать
в уравнение

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{v^2}{\delta}\nabla^2 + \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\right)(\Delta\rho) + \frac{v^2\beta_T\rho_0}{\delta}\nabla^2(\Delta T) =$$
$$= \frac{\gamma}{2\pi}\nabla^2\left(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*\right) - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \left(\nabla\cdot\left[\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*\nabla(\Delta T)\right]\right)$$

которое при $\Delta T = 0$ сводится к уравнению для акустической волны

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\Gamma\frac{\partial}{\partial t} - v^2\nabla^2\right](\Delta\rho) = -\nabla^2\left(\frac{1}{2\pi}\gamma\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_1{}^*\right)$$

Температурный ангармонизм

Вынужденное температурное рассеяние. Уравнение передачи энергии

$$\left(\rho_0 C_v \frac{\partial}{\partial t} - \lambda_T \nabla^2\right)\Delta T - \frac{C_v(\delta - 1)}{\beta_T}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\rho =$$

$$= \frac{nc\alpha}{\pi}\left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho T_0 \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_2^*$$

λ_T - теплопроводность

α - линейный коэффициент поглощения

при условии $\delta \approx 1,\ \alpha \approx 0,\ \left(\partial\varepsilon/\partial T\right)_\rho \approx 0$

приводит к $\Delta T = 0$

Вынужденное температурное рассеяние.
Полная система уравнений

Температурный ангармонизм

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_1=\frac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_1)$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{\varepsilon_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}_2=\frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\mathbf{P}^{NL}(\omega_2)$$

нелинейные волновые уравнения

Навье-Стокс

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{v^2}{\delta}\nabla^2+\frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\right)(\Delta\rho)+\frac{v^2\beta_T\rho_0}{\delta}\nabla^2(\Delta T)=$$

$$=\frac{\gamma}{2\pi}\nabla^2\left(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*\right)-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\left(\nabla\cdot\left[\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*\nabla(\Delta T)\right]\right)$$

$$\left(\rho_0 C_v\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_T\nabla^2\right)\Delta T-\frac{C_v(\delta-1)}{\beta_T}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\rho=$$

$$=\frac{nc\alpha}{\pi}\left(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*\right)+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho T_0\mathbf{E}_1\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_2^*$$

уравнение передачи энергии

Вынужденное температурное рассеяние.
Нелинейные поляризации и ММА

Температурный ангармонизм

$$\mathbf{P}^{NL}(\omega_1) = \frac{\gamma}{4\pi\rho_0}\mathbf{E}_2\Delta\rho + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \mathbf{E}_2\Delta T$$

$$\mathbf{P}^{NL}(\omega_2) = \frac{\gamma}{4\pi\rho_0}\mathbf{E}_1\Delta\rho + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \mathbf{E}_1\Delta T$$

$$\mathbf{P}^{NL}(\omega_1) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\mathbf{E}_2\Delta\rho$$

$$\mathbf{P}^{NL}(\omega_2) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\mathbf{E}_1\Delta\rho$$

$$\gamma = \rho_0\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T$$

уравнения ММА запишутся в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \alpha\right)|E_1|^2 = -\beta|E_1|^2|E_2|^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \alpha\right)|E_2|^2 = -\beta|E_1|^2|E_2|^2$$

используя приближение

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \rho \ll \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho T$$

Вынужденное температурное рассеяние. Коэффициент усиления

Температурный ангармонизм

$$\beta = \beta_{MB} \frac{1}{1+(\Delta\Omega/\Gamma)^2} + \beta_{MB}^{a} \frac{2\Delta\Omega/\Gamma}{1+(\Delta\Omega/\Gamma)^2} + \left(\beta_{RL} + \beta_{RL}^{a}\right) \frac{2\omega_a/\Gamma_{RL}}{1+(\omega_a/\Gamma_{RL})^2}$$

«нормальное» ВРМБ

температурное ВРМБ

рассеяние Рэлея

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \alpha\right)|E_1|^2 = -\beta |E_1|^2 |E_2|^2$$

$$\gamma = \rho_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T$$

$$\Delta\Omega = \frac{(k_1+k_2)v}{\delta^{1/2}} - (\omega_1 - \omega_2)$$ - частотная расстройка

$$\beta_{MB} = \frac{\omega_2^2 \gamma^2}{4\pi c^2 \rho_0 v \Gamma}, \quad \beta_{MB}^{a} = \frac{\omega_2^2 \gamma \gamma^a}{8\pi c^2 \rho_0 v \Gamma}$$ - коэффициенты усиления ВРМБ

$$\beta_{RL} = \frac{\omega_2^2 \gamma \gamma^R}{4\pi c^2 \rho_0 v \Gamma_{RL}}, \quad \beta_{RL}^{a} = \frac{\omega_2^2 \gamma \gamma^a}{4\pi c^2 \rho_0 v \Gamma_{RL}}$$ - коэффициенты усиления рассеяния Рэлея

$$\gamma^a = \frac{\alpha v c^2 \beta_T}{C_p \omega_2}, \quad \gamma^R = \frac{(\delta - 1) c \gamma \Gamma_{RL}}{4 n v \omega_2}$$

$$\Gamma = \frac{\eta (k_1+k_2)^2}{\rho_0}, \quad \Gamma_{RL} = \frac{\lambda_T (k_1+k_2)^2}{\rho_0 C_p}$$