

Тема 4.

4.4.2. Планы ускорений плоских механизмов

Планом ускорений называется чертёж, на котором в выбранном масштабе изображены векторы, равные по модулю и направлению векторам ускорений различных точек механизма.

При построении планов ускорений считается, что *линейные скорости* всех точек и *угловые скорости* всех звеньев механизма *ИЗВЕСТНЫ*.

Для построения планов ускорений необходимо знать формулы для определения ускорений точек при различных движениях звеньев.

Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения всех точек звена *равны между собой* и параллельны друг другу.

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется векторной суммой:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

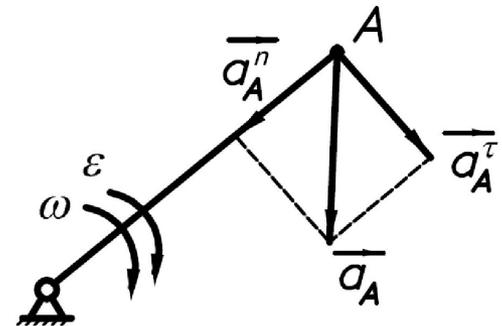
где \vec{a}_A^n – *нормальная*

составляющая вращательного ускорения;

\vec{a}_A^τ – *тангенциальная* составляющая вращательного ускорения.

Их модули:

$$a_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA} \quad a_A^\tau = \varepsilon \cdot l_{OA}$$



Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения всех точек звена **равны между собой** и параллельны друг другу.

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется векторной суммой:

$$\bar{a}_A = a_A^n + a_A^\tau$$

где a_A^n – **нормальная**

составляющая вращательного ускорения;

a_A^τ – **тангенциальная** составляющая вращательного ускорения.

Их модули:

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot l_{AB}$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot l_{AB}$$

ε_{AB}

Тема 4.

4. *Сложное* движение.

Это движение (движение кулисных механизмов) раскладывается на *переносное* и *относительное*. Теорема о сложении ускорений для точки, совершающей сложное движение, выглядит следующим образом:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{кор},$$

где $\bar{a}_{пер}$ - ускорение переносного (вращательного) движения;
 $\bar{a}_{отн}$ - ускорение относительного движения; $\bar{a}_{кор}$ - кориолисово ускорение.

Кориолисово ускорение характеризует изменение модуля и направления относительной скорости точки вследствие *вращательного* переносного движения.

Кориолисово ускорение определяется векторным произведением:

$$\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega}_{пер} \times \bar{V}_{отн})$$

Модуль этого ускорения:

$$a_{кор} = 2 \cdot \omega_{пер} \cdot V_{отн} \cdot \sin \alpha,$$

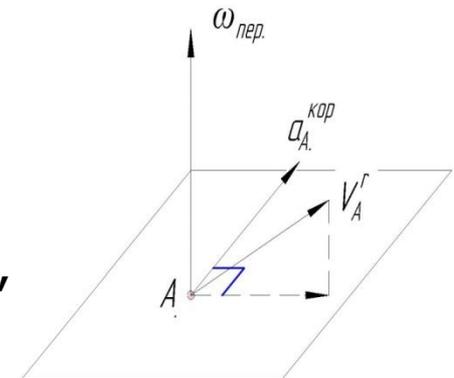
α – угол между векторами переносной и относительной скоростей;

Тема 4.

$\vec{\omega}_{пер}$ - вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_{отн}$ - вектор относительной скорости.

В плоских механизмах угол α всегда равен 90° , т.к. относительные скорости лежат в плоскости механизма, а оси вращения перпендикулярны этой плоскости.

Направление кориолисова ускорения можно определить по **правилу Н.Е. Жуковского**: для определения направления ускорения Кориолиса необходимо вектор относительной скорости спроектировать на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в направлении вращения. В плоских механизмах вектор относительной скорости уже лежит в плоскости вращения.



Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения всех точек звена *равны между собой* и параллельны друг другу.

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется векторной суммой:

$$\bar{a}_A = a_A^n + a_A^\tau$$

где a_A^n – *нормальная*

составляющая вращательного ускорения;

a_A^τ – *тангенциальная* составляющая вращательного ускорения.

Их модули:

Тема 4.

5. На основе зависимостей между ускорениями точек при различных движениях звеньев определить величины и направления составляющих абсолютных ускорений точек механизма.

6. С помощью масштабного коэффициента найти длины отрезков, изображающих составляющие абсолютных ускорений точек механизма.

7. Показать векторы составляющих абсолютных ускорений точек.

8. По длинам лучей, выходящих из полюса плана ускорений, определить значения абсолютных ускорений точек механизма.

Тема 4.

Свойства плана ускорений:

1. Отрезки планов ускорений проходящие через полюс изображают абсолютные ускорения. Направление *абсолютных* ускорений всегда получается от полюса. В конце векторов абсолютных ускорений принято ставить *малую букву той КП*, которой обозначена соответствующая точка на плане механизма;
2. Отрезки плана ускорений, соединяющие концы векторов абсолютных ускорений, обозначают *относительные* ускорения;
3. Векторы относительных ускорений точек жесткого звена образуют на плане ускорений фигуру, подобную этому звену и повернутую на угол $(180^0 - \varphi)$ в сторону углового ускорения (здесь φ – угол между нормальной составляющей относительного ускорения и вектором полного относительного ускорения) (*принцип подобия*);
4. *Неподвижные точки* механизма имеют соответствующие им точки плана ускорений, расположенные в *полюсе*.

Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения всех точек звена *равны между собой* и параллельны друг другу.

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется векторной суммой:

$$\bar{a}_A = a_A^n + a_A^\tau$$

где a_A^n – *нормальная*

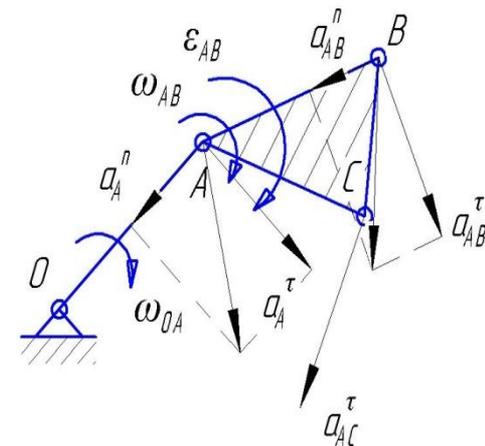
составляющая вращательного

ускорения, $a_A = a_{BA}^n + a_{BA}^\tau$

a_A^τ – *тангенциальная* составляющая

вращательного ускорения.

Их модули:



Тема 4.

1. *Поступательное* движение.

При поступательном движении ускорения *равны между собой* и параллельны друг другу.

2. *Вращательное* движение.

Полное ускорение точки определяется в

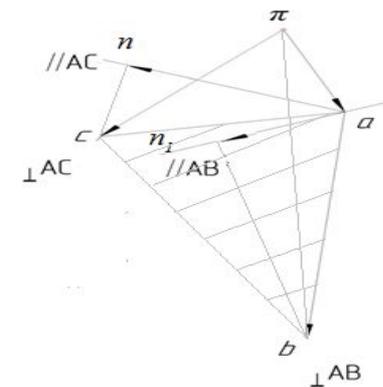
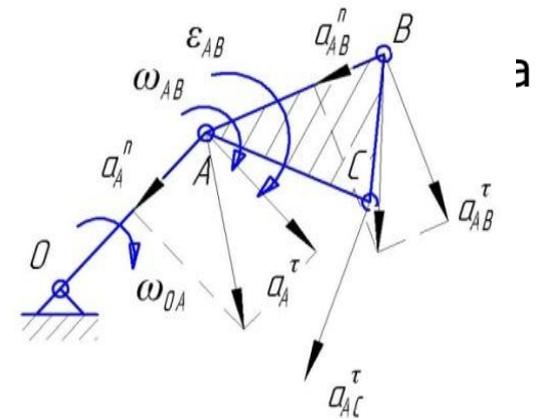
$$\bar{a}_A = a_A^n + a_A^\tau$$

где a_A^n – *нормальная*

составляющая вращательного ускорения;

a_A^τ – *тангенциальная* составляющая вращательного ускорения.

Их модули:



Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения **равны между собой** и параллельны друг другу.

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется в

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau \quad \vec{a}_{AC} = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^\tau$$

где \vec{a}_A^n – **нормальная**

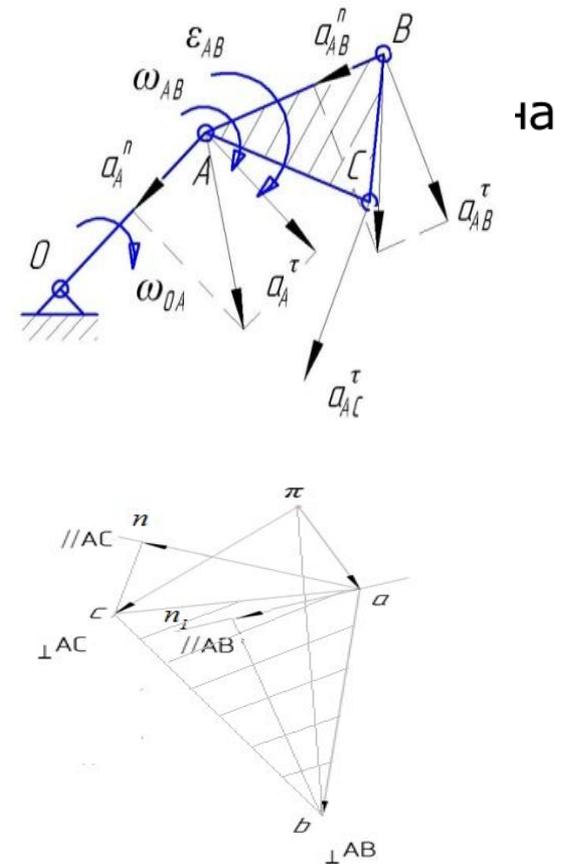
составляющая вращательного

ускорения;

\vec{a}_A^τ – **тангенциальная** составляющая

вращательного ускорения.

Их модули:



Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения **равны между собой** и параллельны друг другу

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется вектор

$$\bar{a}_A = a_A^n + a_A^\tau$$

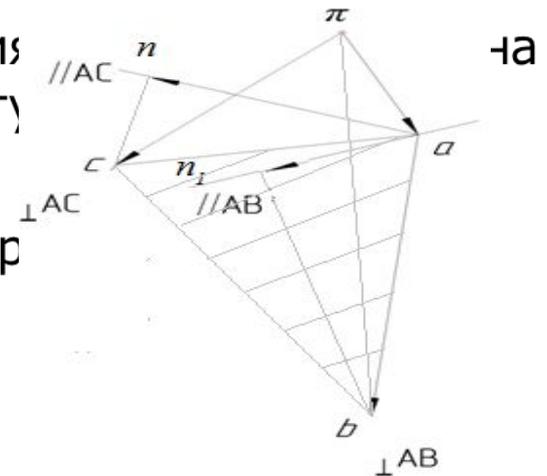
где a_A^n – **нормальная**

составляющая вращательного ускорения;

$$a_C = a_A + a_{CB} + a_{CB}$$

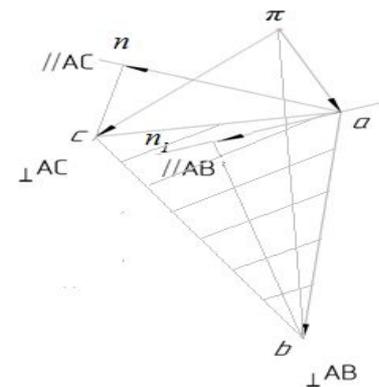
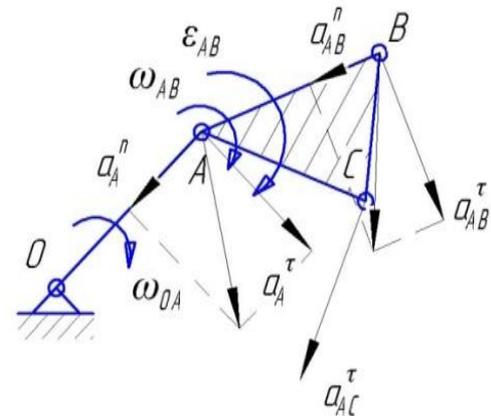
a_A^τ – **тангенциальная** составляющая вращательного ускорения.

Их модули:



Тема 4.

Сравнивая треугольник abc плана ускорений с треугольником ABC на плане положений, можно сделать вывод, что они подобны, так как длины векторов относительных ускорений ab , ac и bc пропорциональны длинам отрезков AB , AC и BC жесткого звена, а сами векторы повернуты на угол $(180^\circ - \varphi)$ в сторону углового ускорения (здесь φ – угол между нормальной составляющей относительного ускорения и вектором полного относительного ускорения). Сказанное подтверждает **принцип подобия** в плане ускорений.

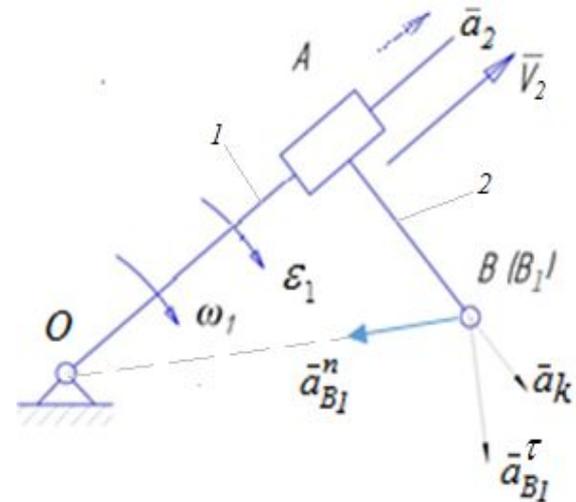


Тема 4.

Пример 2. Определение ускорений точек звена, входящего в *поступательную* пару.

Пусть известны длины звеньев, положение ведущего звена, угловая скорость (ω_1) и угловое ускорение (ε_1) кулисы, линейные скорость (V_2) и ускорение (a_2) движения ползуна по кулисе. Требуется найти ускорение точки B ползуна.

Точка B , принадлежащая ползуну, совершает *сложное* движение: она вращается вместе с кулисой OA и движется по ней. За *переносное* движение примем движение точки B_1 , совпадающей с т. B ползуна и вращающейся вместе с кулисой, а *относительное* – движение точки B ползуна относительно точки B_1 .



Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения всех точек звена **равны между собой** и параллельны друг другу.

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется вектс

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau \quad a_{B1} = a_{B1}^n + a_{B1}^\tau$$

где $\bar{a}_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OB}$ **нормальная** составляющая вращательного ускорения;

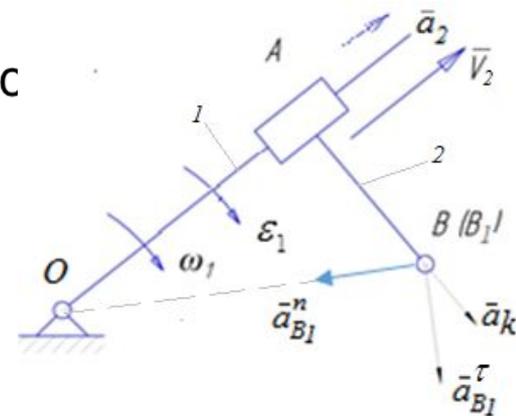
$$a_k = 2 \cdot \omega_1 \cdot V_2.$$

\bar{a}_A^τ - **тангенциальная** составляющая вращательного ускорения.

Их модули:

$$a_{B1}^n$$

$$a_{B1}^\tau$$



Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения **всех точек звена равны между собой** и параллельны друг другу.

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется векторно

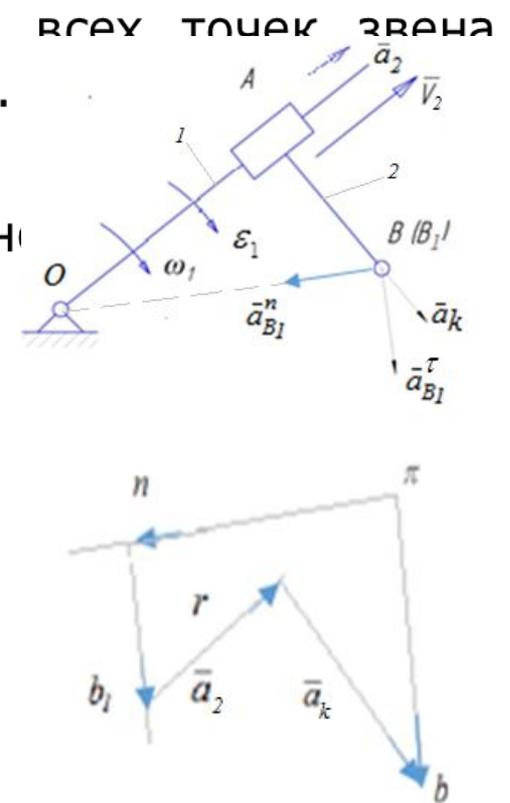
$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$$

где \bar{a}_A^n – **нормальная**

составляющая вращательного ускорения;

\bar{a}_A^τ – **тангенциальная** составляющая вращательного ускорения.

Их модули:



Тема 4.

После построения плана ускорений и определения значений ускорений всех характерных точек механизма переходят к определению значений и направлений действия угловых ускорений звеньев механизма, если они *не были известны* заранее.

Угловое ускорение – это отношение тангенциального (касательного) ускорения звена механизма к действительной длине этого звена.

Направление углового ускорения определяется вектором *тангенциального* ускорения, перенесенного с плана ускорений в точку звена, совершающую вращательное движение. При этом разрывается связь между этим звеном и остальными звеньями механизма. В этом случае, рассматриваемая точка совместно со звеном, под действием вектора тангенциального ускорения, получает возможность совершать вращательное движение вокруг неподвижной точки этого звена в направлении действия векторов тангенциального ускорения.

Полученное направление вращательного движения звена и является направлением действия его углового ускорения.

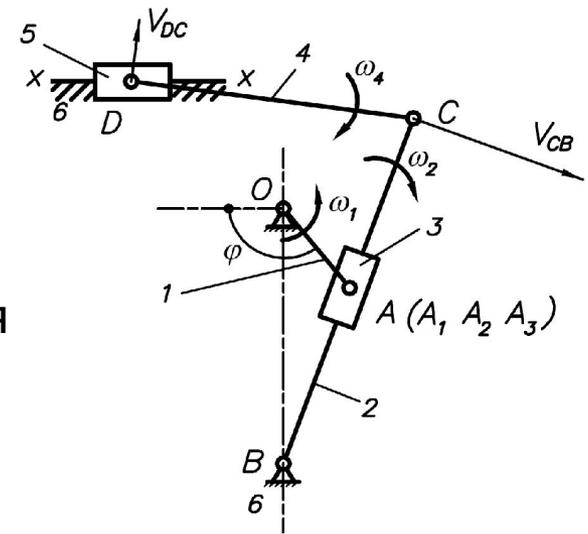
Рассмотрим *пример* построения плана ускорений механизма.

Тема 4.

Пример 3. Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев **кулисного** механизма

Пусть известны размеры звеньев, положение ведущего звена, угловые скорости звеньев, скорость движения камня 3 относительно кулисы 2. Требуется определить составляющие ускорения камня 3 механизма.

Точка A_2 , принадлежащая камню 3, совершает **сложное** движение: она вращается вместе с кулисой 2 и движется по ней. За **переносное** движение примем движение т. A_3 , совпадающей с т. A_2 камня и вращающейся вместе с кулисой 2, а за **относительное** – движение камня по кулисе.



Тема 4.

При этом вектор абсолютного ускорения т. A_3 , принадлежащей кулисе, будет равен:

$$\vec{a}_{A3} = \vec{a}_{A3}^n + \vec{a}_{A3}^\tau$$

где $a_{A3}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}$ – нормальная составляющая ускорения переносного движения (направлена параллельно AB от т. A к т. B); a_{A3}^τ – тангенциальная составляющая ускорения (направлена перпендикулярно AB , величина неизвестна).

Вектор относительного ускорения т. A_2 (\vec{a}_{A2A3}) неизвестен по величине, но известен по направлению (параллелен AB).

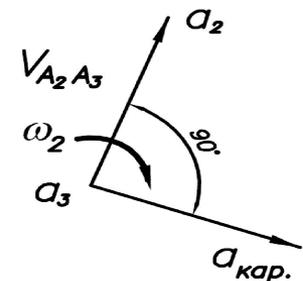
Появится и кориолисово ускорение т. A_2 , равное

$$a_{A2}^{кор} = 2 \cdot \omega_2 \cdot V_{A2A3}$$

Здесь ω_2 – угловая скорость кулисы;

V_{A2A3} – скорость движения камня 3 по кулисе.

Направление определяется по правилу Жуковского (см.рис.) путем поворота вектора относительной скорости V_{A2A3} на 90° в направлении ω_2 .



Тема 4.

Тогда абсолютное ускорение т. A_2 камня 3 определится векторным уравнением:

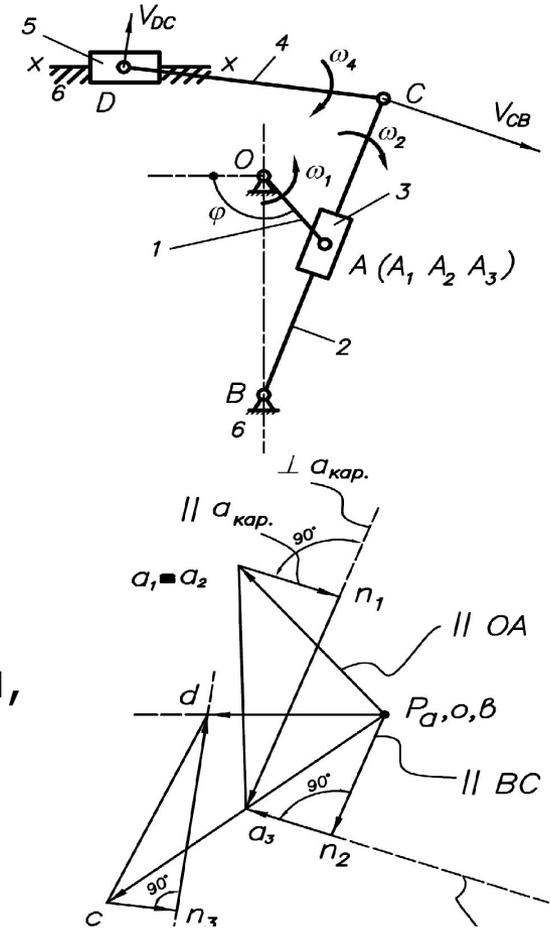
$$\vec{a}_{A2} = \vec{a}_{A3} + \vec{a}_{A2A3} + \vec{a}_{A2}^{кор}$$

\vec{a}_{A3} \vec{a}_{A2A3} $\vec{a}_{A2}^{кор}$
 \vec{a}_{A3} $\parallel AB$

Величина абсолютного ускорения этой точки, совпадающей с т. A_1 , принадлежащей кривошипу 1, равна

$$a_{A2} = a_{A1} = \omega_1^2 \cdot l_{OA}$$

Векторное уравнение решаем графически, путем построения плана ускорений, таким образом, чтобы известный вектор \vec{a}_{A2} был замыкающим в многоугольнике ускорений.



Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения **равны между собой** и параллельны друг другу

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется вектор

$$\bar{a}_A = a_A^n + a_A^\tau$$

где a_A^n – **нормальная**

составляющая вращательного

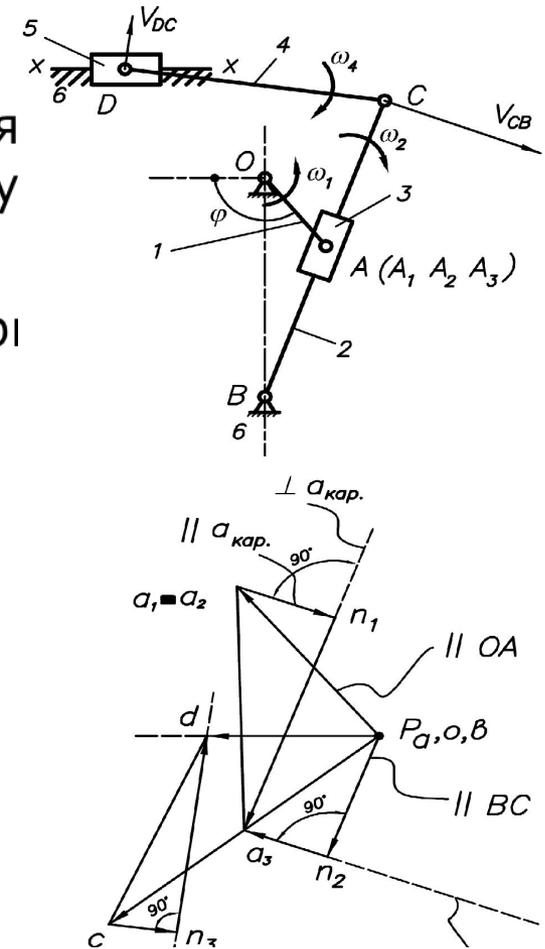
ускорения;

a_A^τ – **тангенциальная** составляющая

вращательного ускорения.

Их модули:

$$a_{кор}$$



Тема 4.

Из конца последнего вектора (т. n_1) проводим прямую, параллельную AB (направление вектора относительного ускорения $\bar{a}_{A_2A_3}$). Точка пересечения (a_3) векторов и определит решение векторного уравнения.

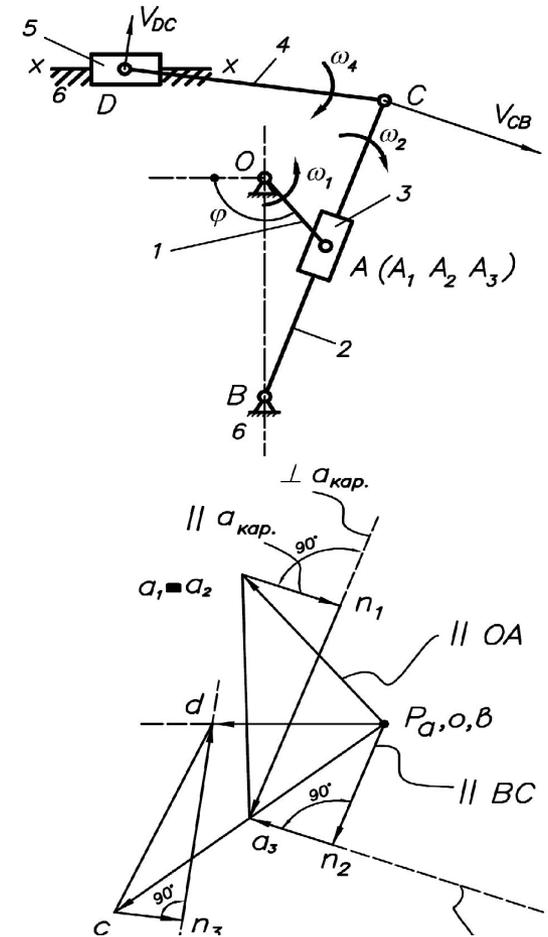
Определяем составляющие абсолютного ускорения камня 3:

$$a_{A_2A_3} = [n_1 a_3] \cdot \mu_a;$$

$$a_{A_3}^r = [n_2 a_3] \cdot \mu_a.$$

Определим ускорения остальных точек механизма. Для этого находим ускорение т. A_3 , принадлежащей кулисе:

$$a_{A_3} = [p_a a_3] \cdot \mu$$



Тема 4.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении ускорения **равны между собой** и параллельны друг другу

2. Вращательное движение.

Полное ускорение точки определяется вектор

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$$

где \bar{a}_A^n – **нормальная**

составляющая вращательного

ускорения;

\bar{a}_A^τ – **тангенциальная** составляющая

вращательного ускорения.

Их модули:

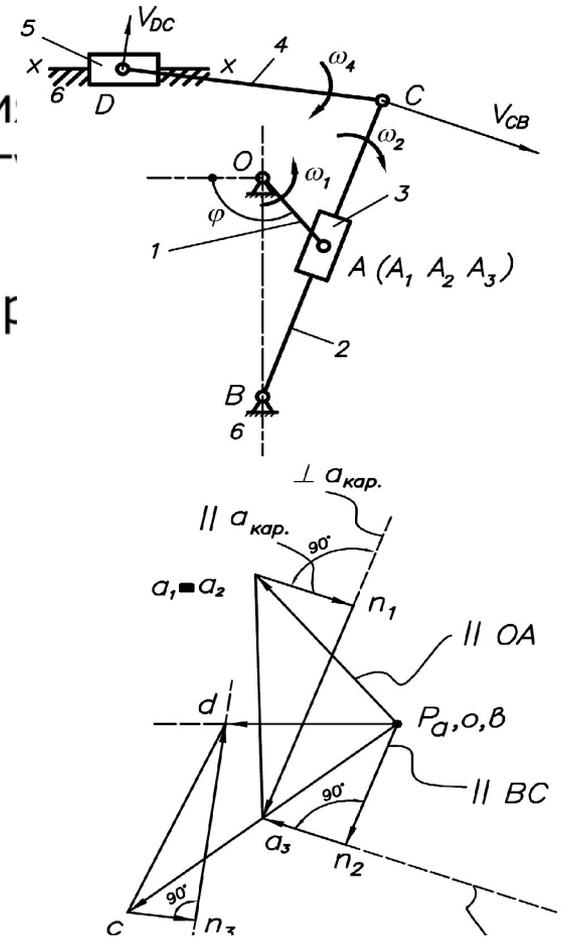
$$AB/BC = a_B/a_C$$

$$r_C \cdot \mu_a = a_C$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^\tau$$

$$\omega_4^2 \cdot l_{CD}$$

$$a_{DC}^\tau$$



Тема 4.

Точка d пересечения этого перпендикуляра с горизонтальной прямой, проведенной через полюс p_a и представляющей собой направление вектора абсолютного ускорения т. D (\bar{a}_D), определит величины ускорений:

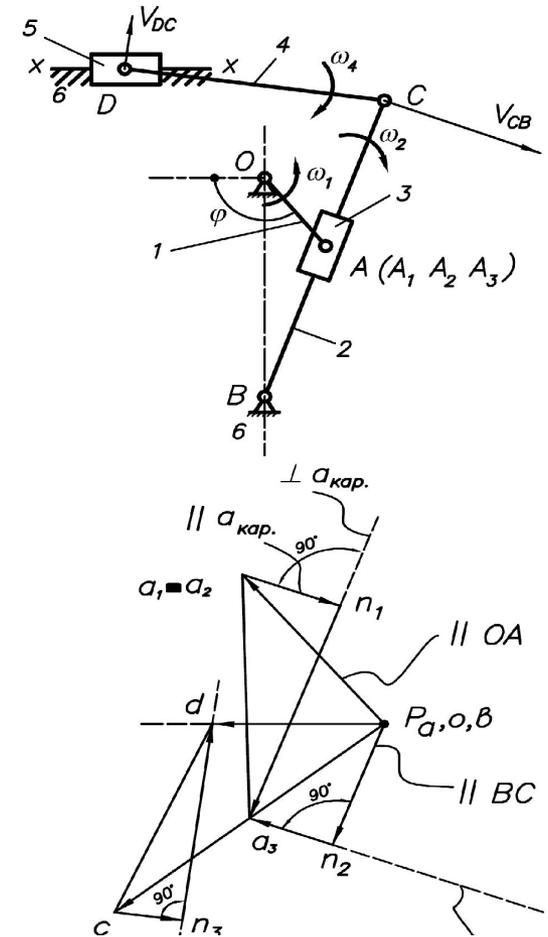
$$a_D = [p_a d] \cdot \mu_a;$$

$$a_{DC}^\tau = [n_3 d] \cdot \mu$$

Величины угловых ускорений звеньев определяются по формулам:

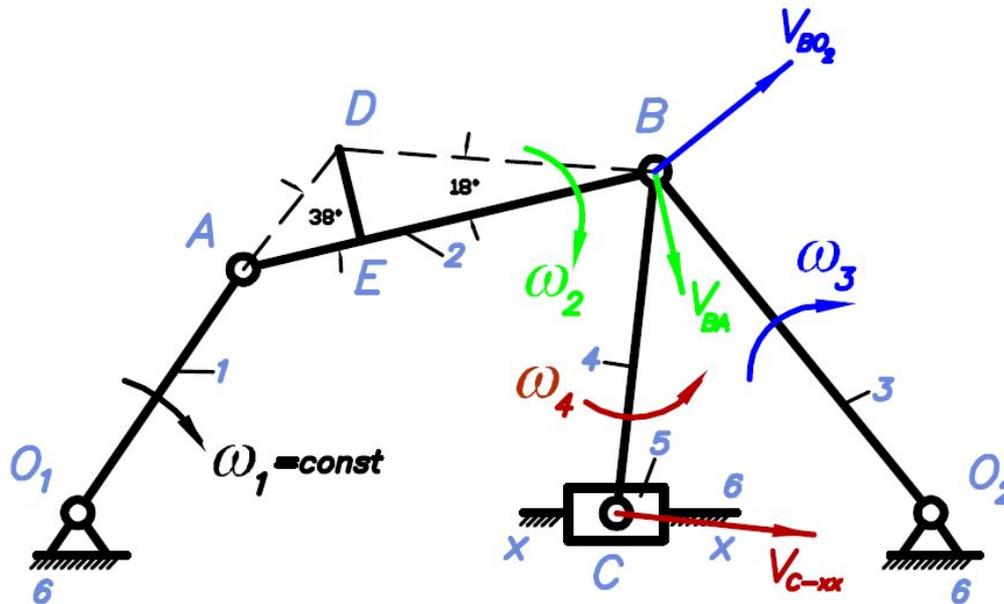
$$\varepsilon_3 = \frac{a_{A3}^\tau}{l_{AB}} \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^\tau}{l_{DC}}$$

Оба ускорения будут направлены против часовой стрелки.



Тема 4.

Пример 4. Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев *рычажного* механизма



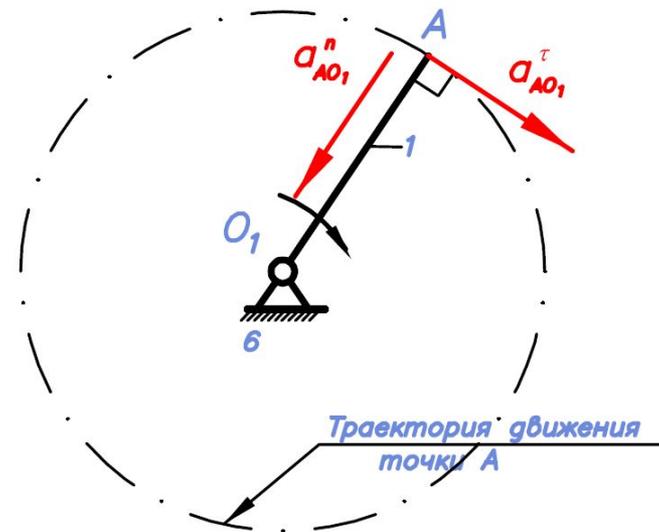
Тема 4.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{AO_1} = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{AO_1}^n + \bar{a}_{AO_1}^\tau$$

$$\bar{a}_{O_1} = 0$$

$$\bar{a}_{AO_1}^\tau = \varepsilon_1 \cdot L_{AO_1} = 0$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{AO_1}^n = \omega_1^2 \cdot L_{AO_1}$$

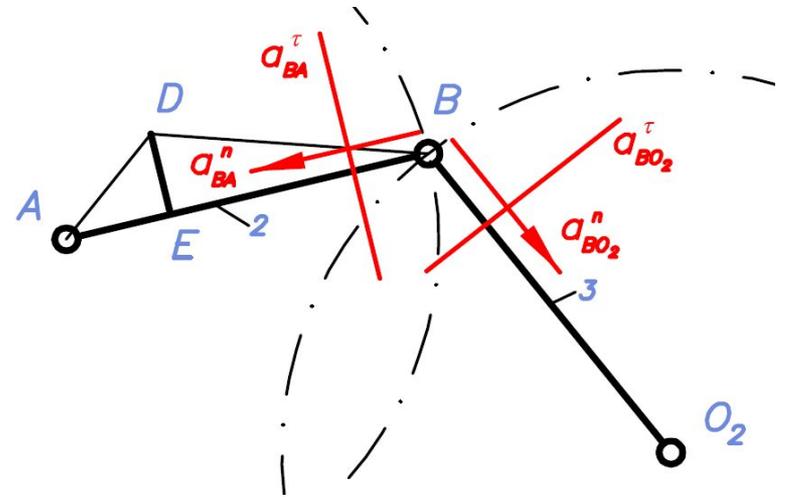


Тема 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n(IIBA) + \bar{a}_{BA}^\tau(\perp BA) \\ \bar{a}_B = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{BO_2}^n(IIBO_2) + \bar{a}_{BO_2}^\tau(\perp BO_2) \end{array} \right.$$

$$a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot L_{BA} = \frac{V_{BA}^2}{L_{BA}}$$

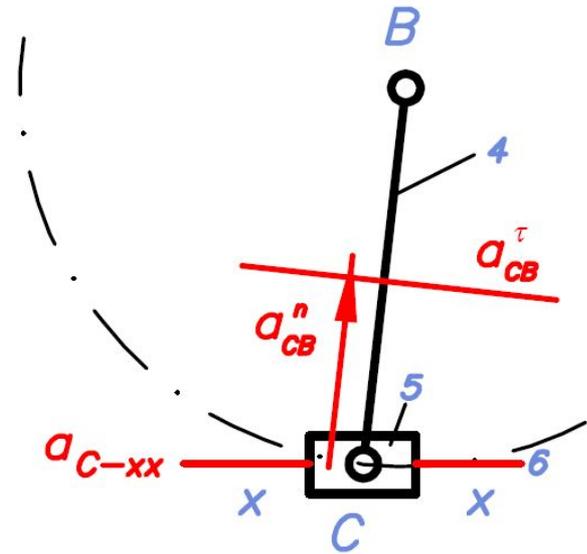
$$a_{BO_2}^n = \omega_{BO_2}^2 \cdot L_{BO_2} = \frac{V_{BO_2}^2}{L_{BO_2}}$$



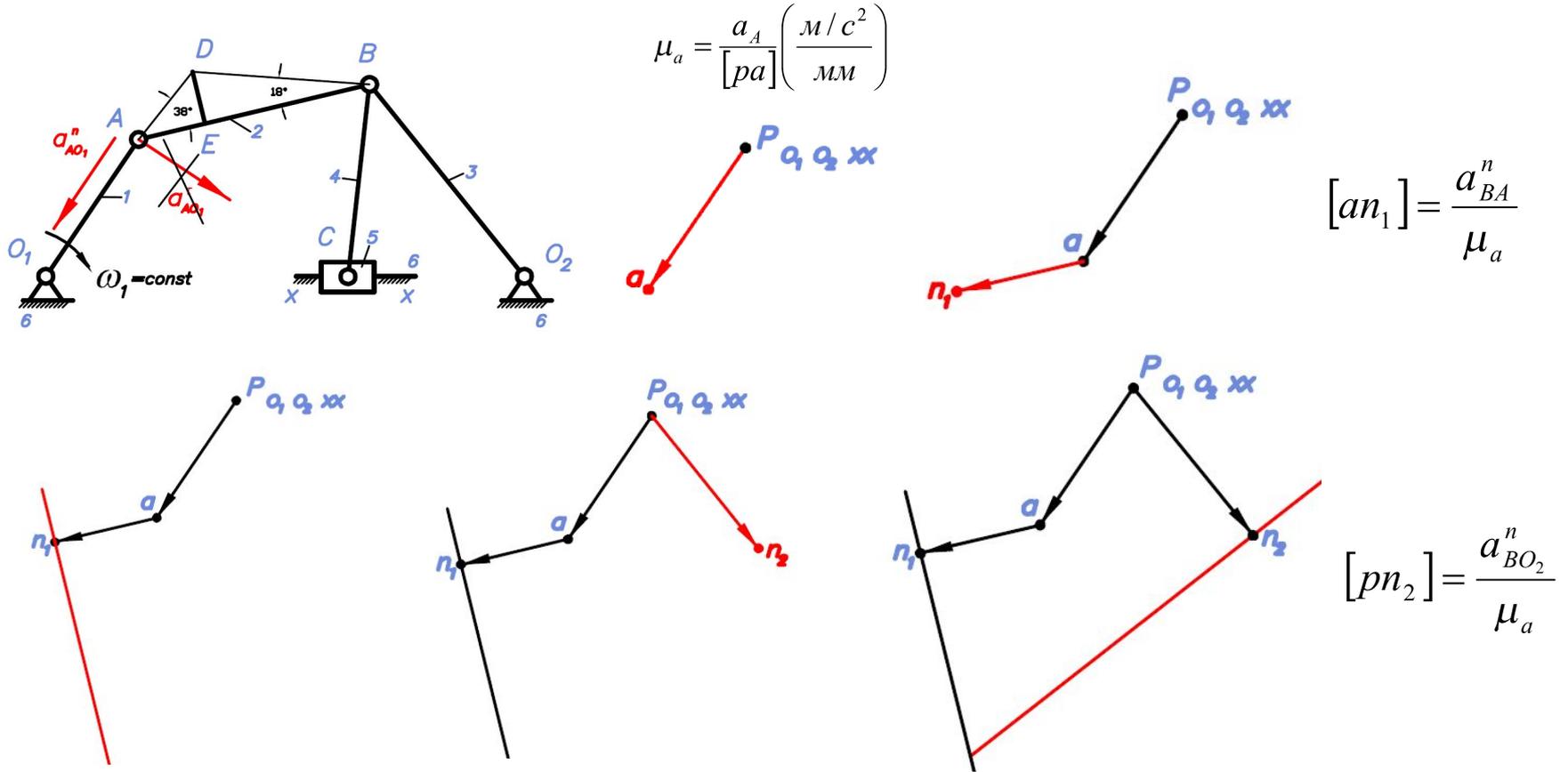
Тема 4.

$$\begin{cases} \bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n_{(||CB)} + \bar{a}_{CB}^\tau_{(\perp CB)} \\ \bar{a}_C = \bar{a}_{xx} + \bar{a}_{C-xx}(\perp XX) \end{cases}$$

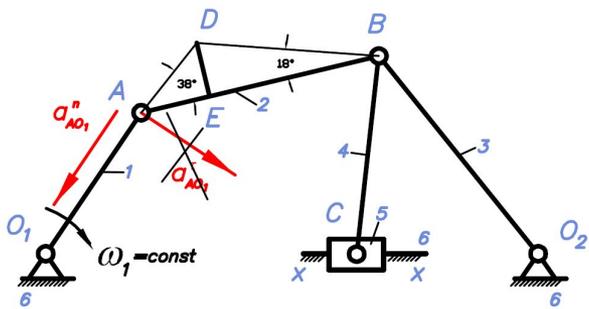
$$a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot L_{CB} = \frac{V_{CB}^2}{L_{CB}}$$



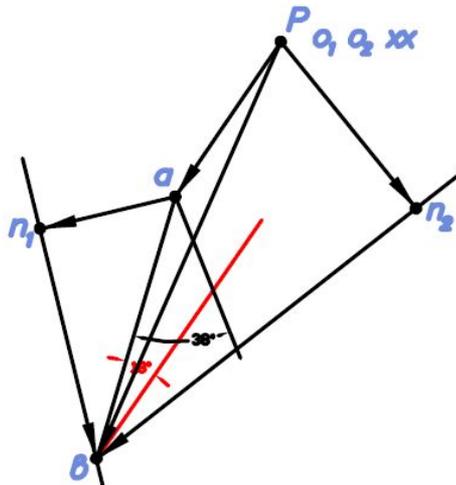
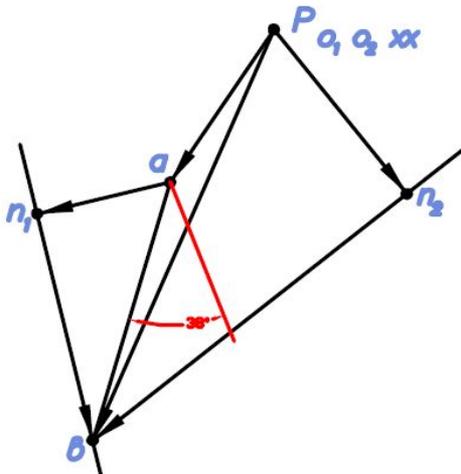
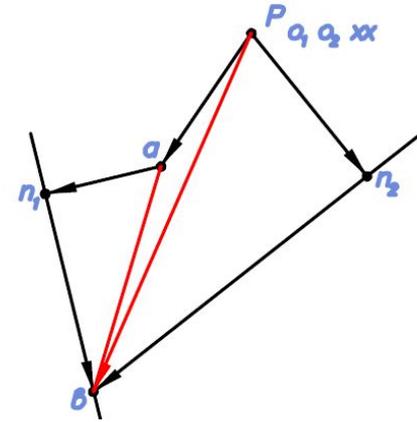
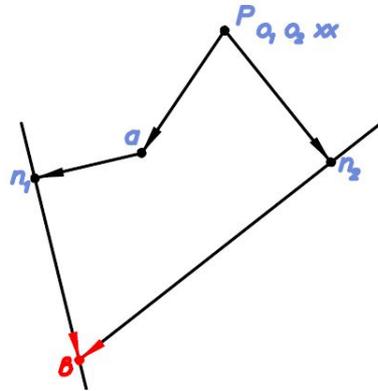
Тема 4.



Тема 4.

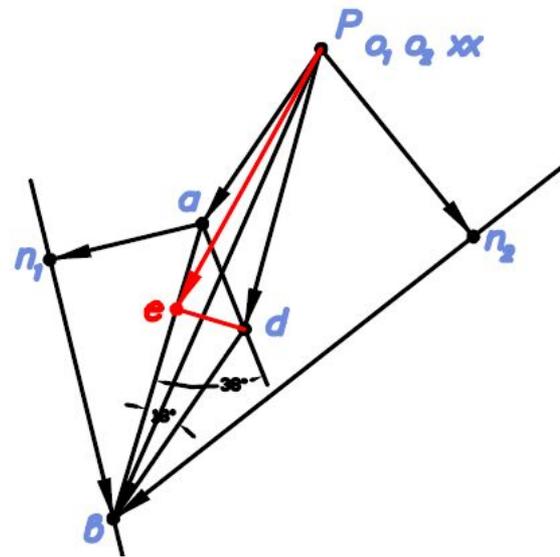
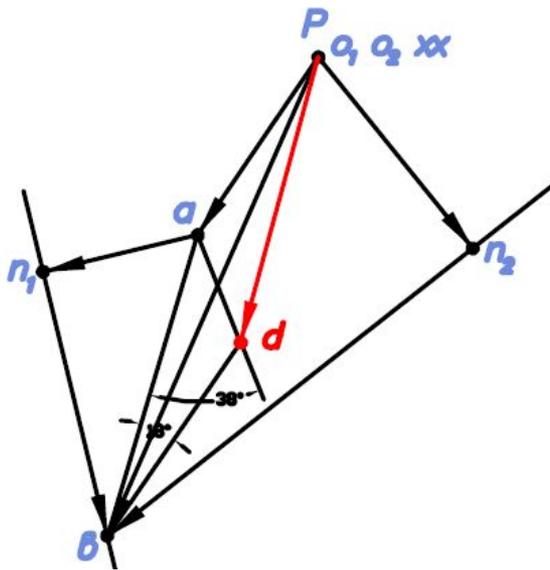
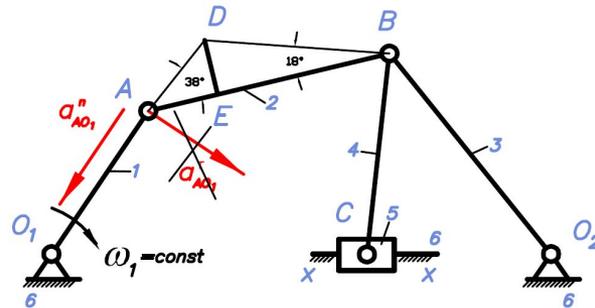


$$\mu_a = \frac{a_A}{[pa]} \left(\frac{m/c^2}{mm} \right)$$



Тема 4

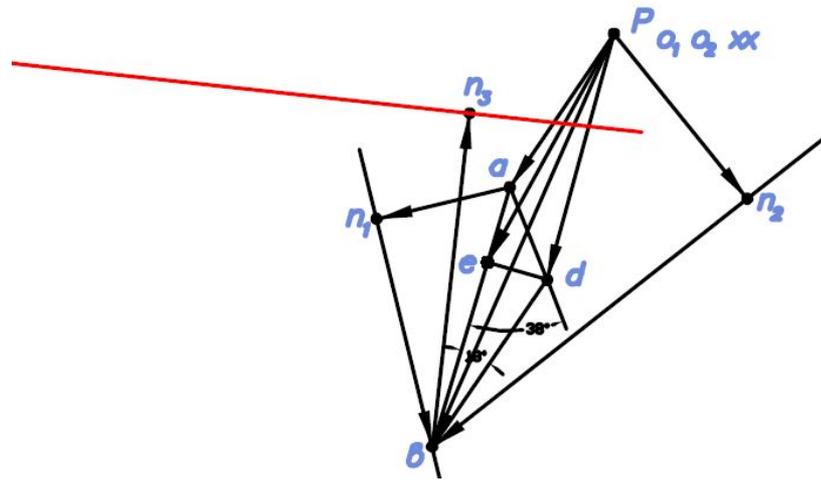
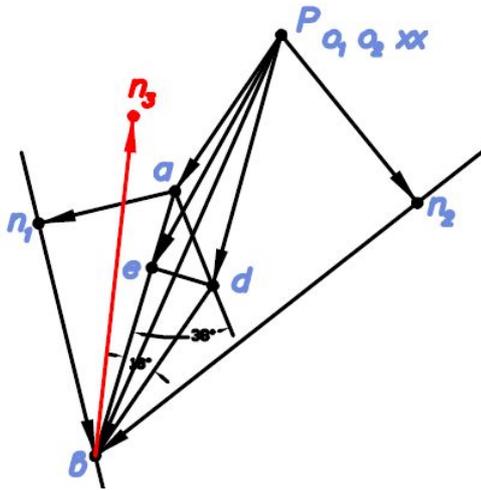
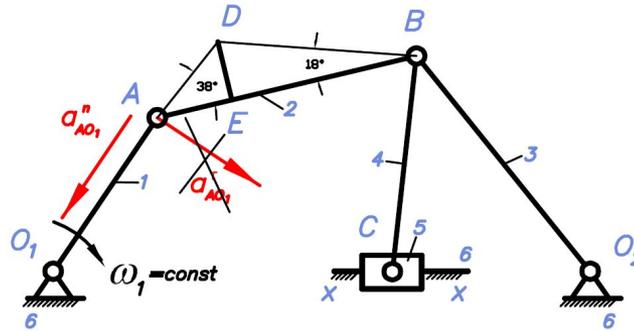
$$\mu_a = \frac{a_A}{[pa]} \left(\frac{m/c^2}{mm} \right)$$



Тема 4.

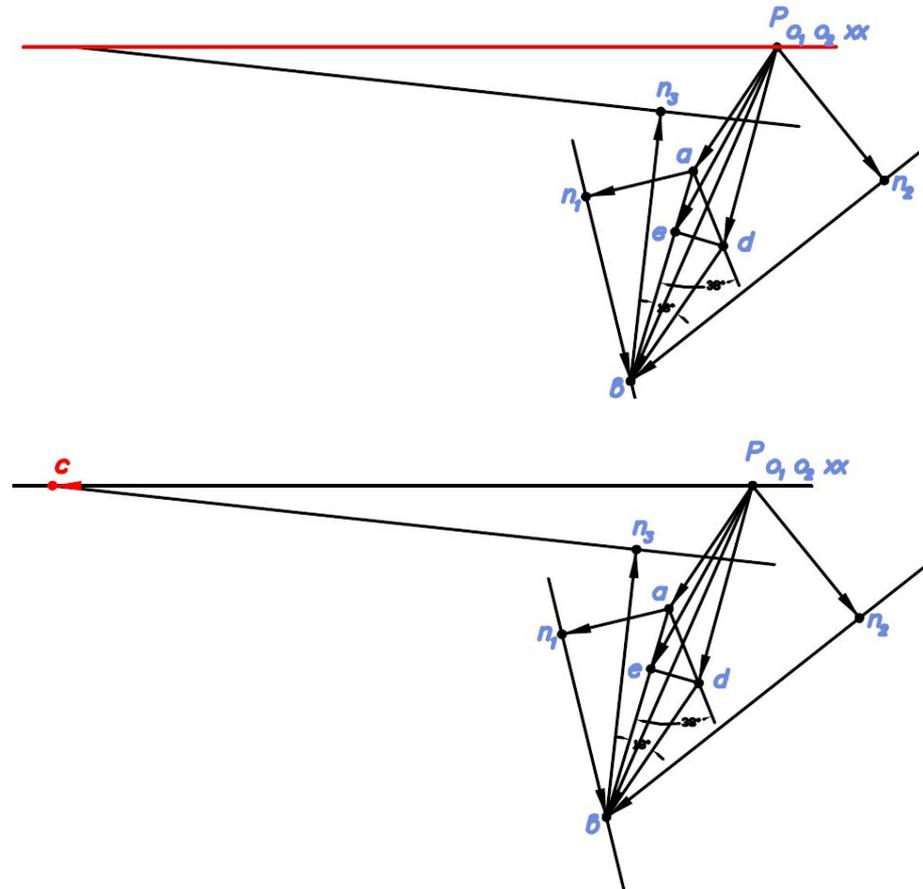
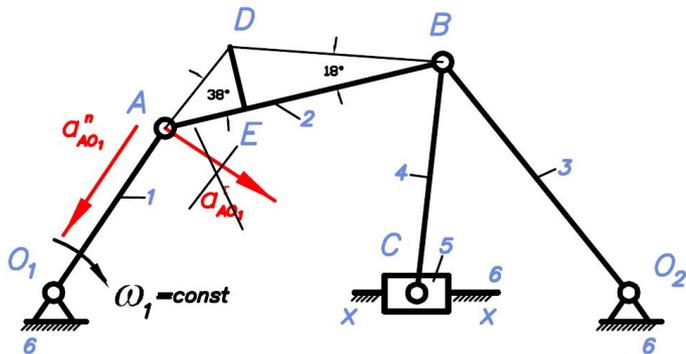
$$\mu_a = \frac{a_A}{[pa]} \left(\frac{m/c^2}{mm} \right)$$

$$[en_3] = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a}$$

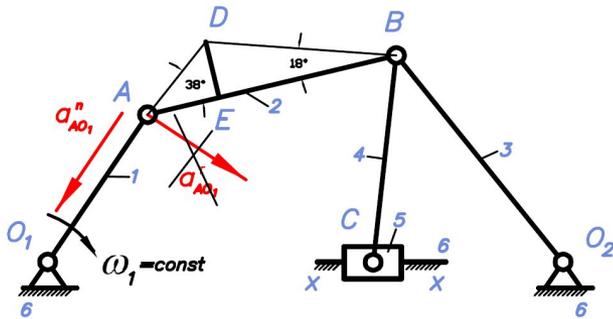


Тема 4.

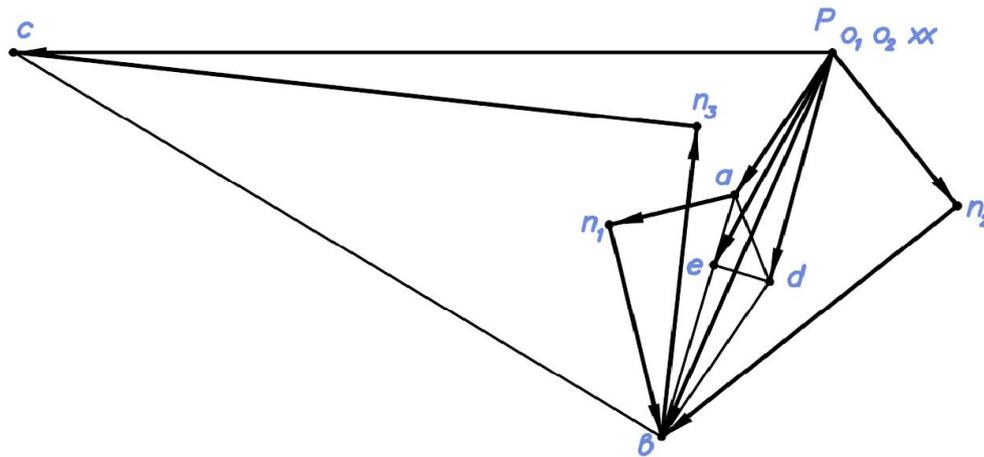
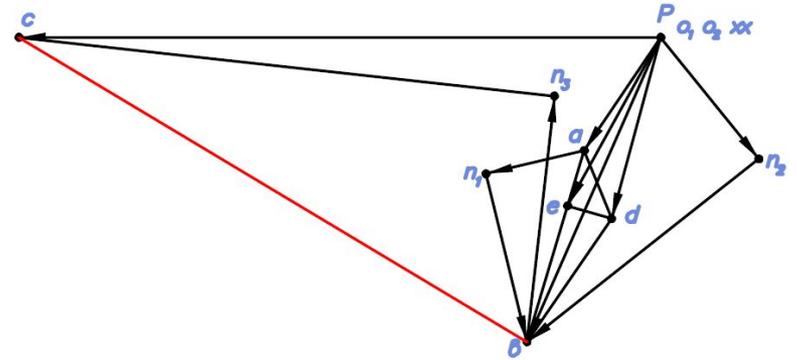
$$\mu_a = \frac{a_A}{[pa]} \left(\frac{m/c^2}{mm} \right)$$



Тема 4.



$$\mu_a = \frac{a_A}{[pa]} \left(\frac{m/c^2}{mm} \right)$$



Тема 4.

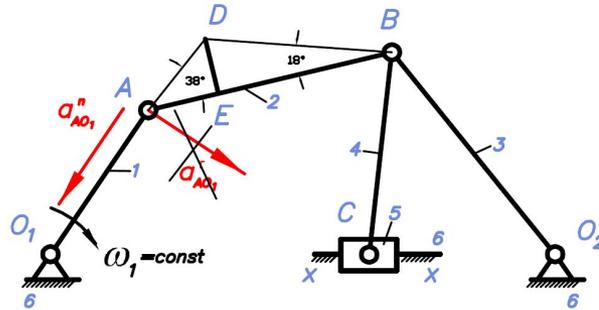
Нахождение действительных значений
абсолютных ускорений всех точек механизма

$$a_{O_1} = a_{O_2} = a_{xx} = 0$$

$$a_B = [pv] \cdot \mu_a =$$

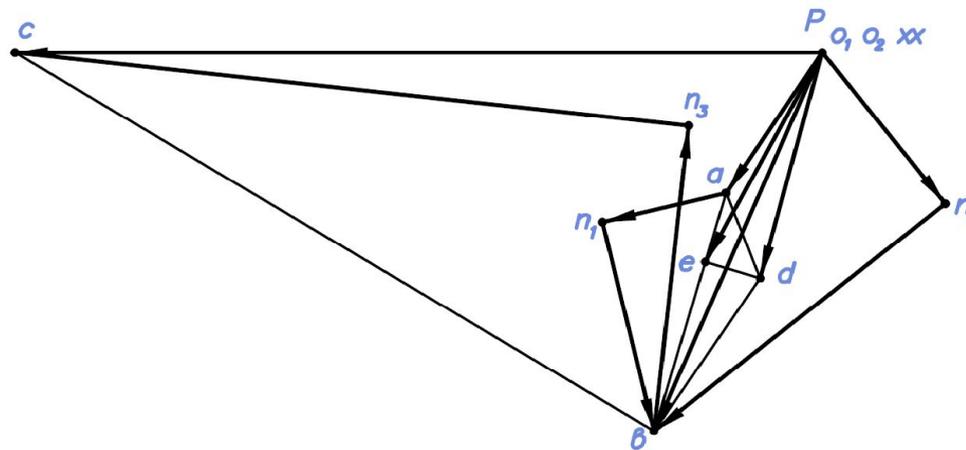
$$a_C = [pc] \cdot \mu_a =$$

$$\mu_a = \frac{a_A}{[pa]} \left(\frac{m/c^2}{mm} \right)$$



$$a_E = [pe] \cdot \mu_a =$$

$$a_D = [pd] \cdot \mu_a =$$



Тема 4.

Нахождение действительных значений *относительных* и *тангенциальных ускорений* точек механизма

$$a_{BO_2} = [pv] \cdot \mu_a =$$

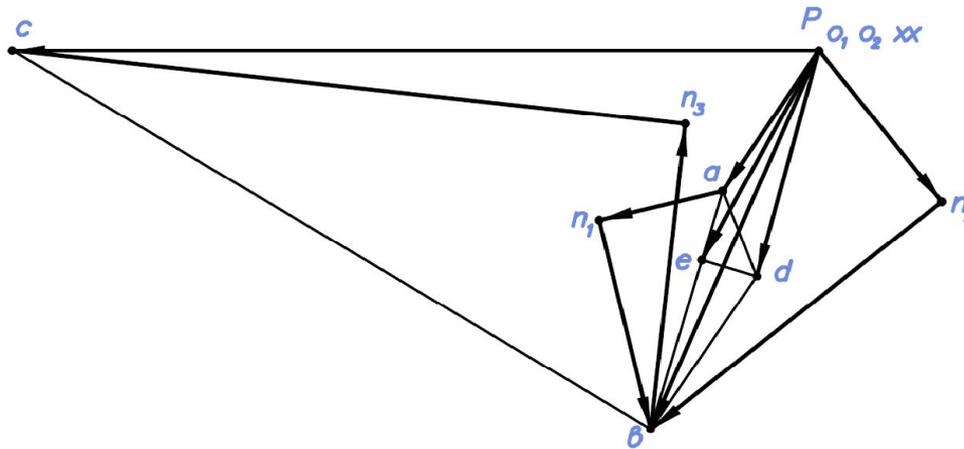
$$a_{BO_2}^\tau = [n_2v] \cdot \mu_a =$$

$$a_{CB} = [cv] \cdot \mu_a =$$

$$a_{CB}^\tau = [n_3v] \cdot \mu_a =$$

$$a_{BA} = [av] \cdot \mu_a =$$

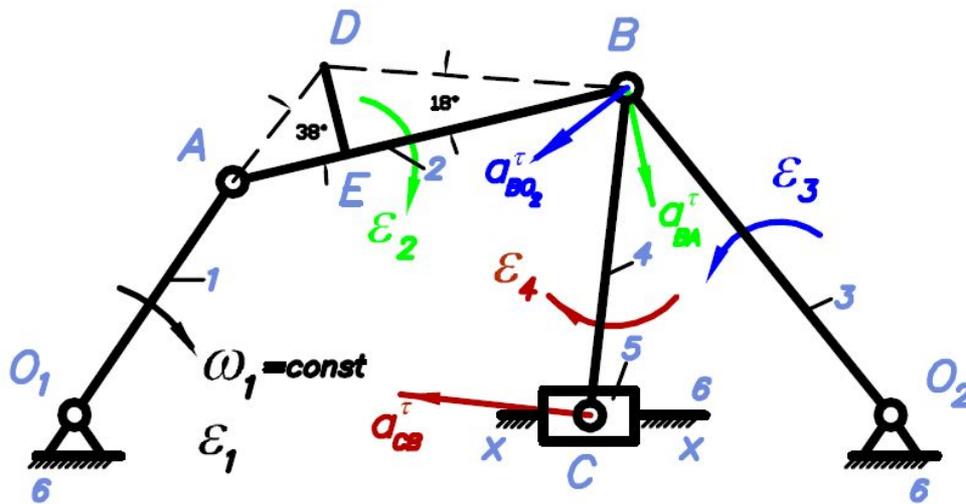
$$a_{BA}^\tau = [n_1v] \cdot \mu_a =$$



$$\mu_a = \frac{a_A}{[pa]} \left(\frac{m/c^2}{mm} \right)$$

Тема 4.

Нахождение *направлений угловых ускорений* звеньев механизма



$$\epsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{L_{BA}} = \quad (c^{-2})$$

$$\epsilon_3 = \frac{a_{BO_2}^\tau}{L_{BO_2}} = \quad (c^{-2})$$

$$\epsilon_4 = \frac{a_{CB}^\tau}{L_{CB}} = \quad (c^{-2})$$