Формула Мора
Правило Верещагина

Доцент кафедры
самолетостроения
к.т.н. Мухин Д.В.

1. Интеграл Мора

Используется в тех случаях, когда требуется найти перемещение в направлении не совпадающем с направлением действия сил.

Сущность интеграла Мора в следующем идеальном построении:

1. Прикладываем в интересующем направлении внешнюю силу $\overline{Ф}$.

2. Составляем для системы выражение для потенциальной энергии деформации U.

3. Дифференцируем выражение для U по $\overline{Ф}$ и получаем выражение для перемещения в направлении действия $\overline{Ф}$ (то есть в интересующем направлении)

4. В полученном выражении приравниваем $\overline{Ф}=0$, получаем окончательное выражение.

Фиктивную силу $\bar{\Phi}$ представляем в виде произведения скалярной величины Ф на единичный силовой фактор в соответствующем направлении.

Таким образом фиктивная сила в зависимости от интересующего нас направления будет выражена:

$N_1\Phi$ - в случае продольной силы. Определяем продольное перемещение. N_1 – единичная продольная сила приложенная в интересующей нас точке.

$Q_{z1}\Phi$ - в случае горизонтальной перерезывающей силы. Определяем прогиб в горизонтальной плоскости. Q_{z1} – единичная горизонтальная перерезывающая сила приложенная в интересующей нас точке.

$Q_{y1}\Phi$ - в случае вертикальной перерезывающей силы. Определяем прогиб в вертикальной плоскости. Q_{y1} – единичная горизонтальная перерезывающая сила приложенная в интересующей нас точке.

$M_{K1}\Phi$ - в случае крутящего момента. Определяем угол закручивания. M_{K1} – единичный крутящий момент приложенный в интересующей нас точке.

$M_{y1}\Phi$ - в случае момента изгибающего в горизонтальной плоскости. Определяем угол поворота сечения в горизонтальной плоскости. M_{y1} – единичный изгибающий момент в горизонтальной плоскости приложенный в интересующей нас точке.

$M_{z1}\Phi$ - в случае момента изгибающего в вертикальной плоскости. Определяем угол поворота сечения в вертикальной плоскости. M_{z1} – единичный изгибающий момент в вертикальной плоскости приложенный в интересующей нас точке.

После приложения фиктивной силы Ф значения силовых факторов в интересующем сечении будут равны сумме значений силовых факторов от исходной системы сил и от силы Ф.

$$N = N_P + N_1\Phi;\;\; Q_y = Q_{yP} + Q_{y1}\Phi;\;\; Q_z = Q_{zP} + Q_{z1}\Phi;$$

$$M_K = M_{KP} + M_{K1}\Phi;\;\; M_y = M_{yP} + M_{y1}\Phi;\;\; M_y = M_{zP} + M_{z1}\Phi.$$

$N_P, Q_{yP}, Q_{zP}, M_{KP}, M_{yP}, M_{zP}$ - значения силовых факторов до приложения силы Ф. (То есть в реально существующей системе)

Подставляем в формулу для внутренней энергии:

$$U = \int_0^l \frac{\left(N_P + N_1\Phi\right)^2 dx}{2EA} + \int_0^l \frac{k_y\left(Q_{yP} + Q_{y1}\Phi\right)^2 dx}{2GA} + \int_0^l \frac{k_z\left(Q_{zP} + Q_{z1}\Phi\right)^2 dx}{2GA} +$$

$$+ \int_0^l \frac{\left(M_{KP} + M_{K1}\Phi\right)^2 dx}{2GI_K} + \int_0^l \frac{\left(M_{yP} + M_{y1}\Phi\right)^2 dx}{2EI_y} + \int_0^l \frac{\left(M_{zP} + M_{z1}\Phi\right)^2 dx}{2EI_z}$$

Дифференцируя по Ф, и принимая после этого Ф=0, находим перемещение.

(формулы громоздкие, поэтому на примере одного слагаемого)

$$\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\int_0^l \frac{\left(N_P + N_1\Phi\right)^2 dx}{2EA}\right)\Bigg|_{\Phi=0} = \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\int_0^l \frac{\left(N_P{}^2 + 2N_P N_1 \Phi + \left(N_1\Phi\right)^2\right) dx}{2EA}\right)\Bigg|_{\Phi=0} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\int_0^l \frac{N_P{}^2 dx}{2EA}\right)\Bigg|_{\Phi=0} + \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\int_0^l \frac{2N_P N_1 \Phi dx}{2EA}\right)\Bigg|_{\Phi=0} + \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\int_0^l \frac{\left(N_1\Phi\right)^2 dx}{2EA}\right)\Bigg|_{\Phi=0} =$$

$$= 0 + \left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\frac{2N_P N_1 \Phi}{2EA}\right) dx\right)\Bigg|_{\Phi=0} + \left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial \Phi}\frac{\left(N_1\Phi\right)^2}{2EA} dx\right)\Bigg|_{\Phi=0} =$$

$$= \left(\int_0^l \frac{N_P N_1}{EA} dx\right)\Bigg|_{\Phi=0} + \left(\int_0^l \frac{2N_1\Phi}{2EA} dx\right)\Bigg|_{\Phi=0} = \int_0^l \frac{N_P N_1}{EA} dx$$

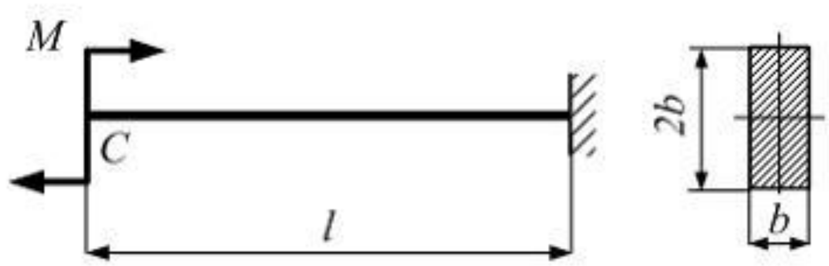
Суммируя все интегралы находим перемещение

$$\delta = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=0} = \int_0^l \frac{N_P N_1}{EA}\,dx + \int_0^l \frac{k_y Q_{yP} Q_{y1}\,dx}{GA} + \int_0^l \frac{k_z Q_{zP} Q_{z1}\,dx}{GA} +$$

$$+ \int_0^l \frac{M_{KP} M_{K1}\,dx}{GI_K} + \int_0^l \frac{M_{yP} M_{y1}\,dx}{EI_y} + \int_0^l \frac{M_{zP} M_{z1}\,dx}{EI_z}$$

Формула носит название *формула Мора*, а входящие в формулу интегралы – *интегралы Мора*

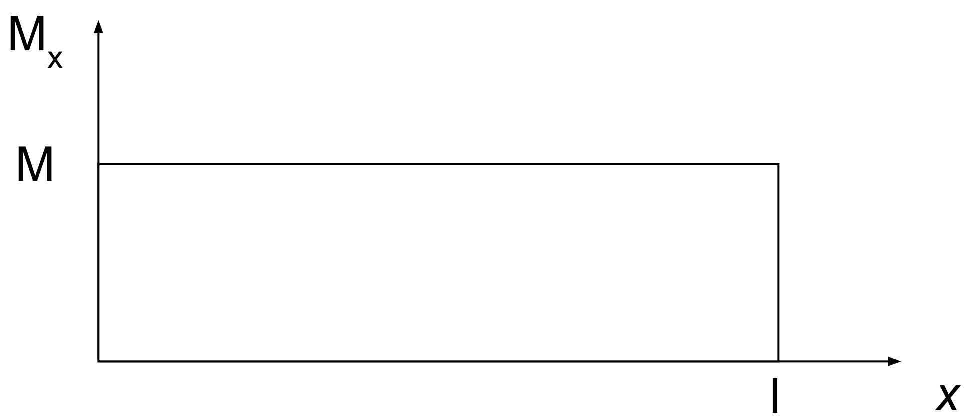
Пример

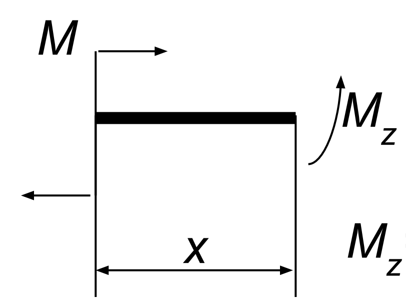


Балка прямоугольного сечения с размерами *b* и 2*b* нагружена моментом *M*. Модуль упругости материала *E*, длина *l* заданы. Найти прогиб концевого сечения балки *C*

Решение

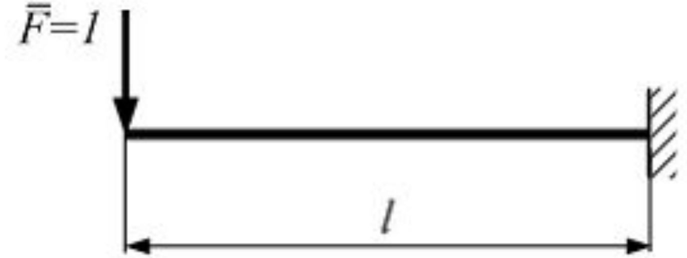
1. Строим эпюр изгибающего момента



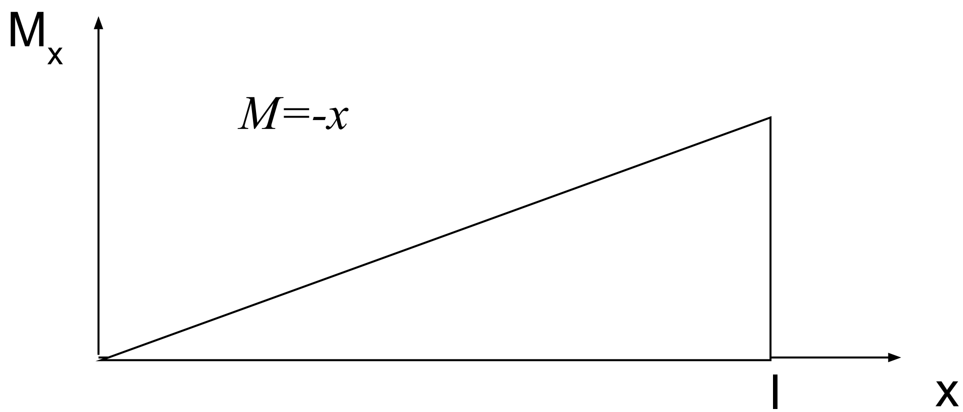


$M_z = M$

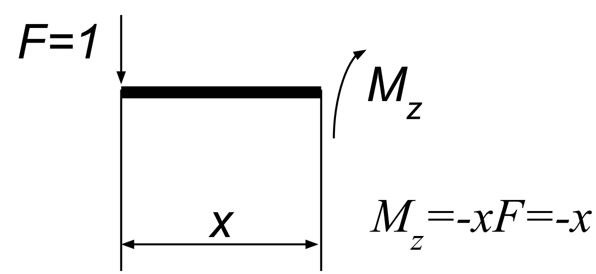
2. Прикладываем единичную внешнюю силу в направлении интересующего перемещения



3. Строим эпюр изгибающего момента от единичной силы



4. Составляем интеграл Мора



$$\delta_C = \int_0^l \frac{M(-x)}{EI_z}dx$$

5. Вычисляем интеграл

$$I_z = \frac{b(2b)^3}{12}$$

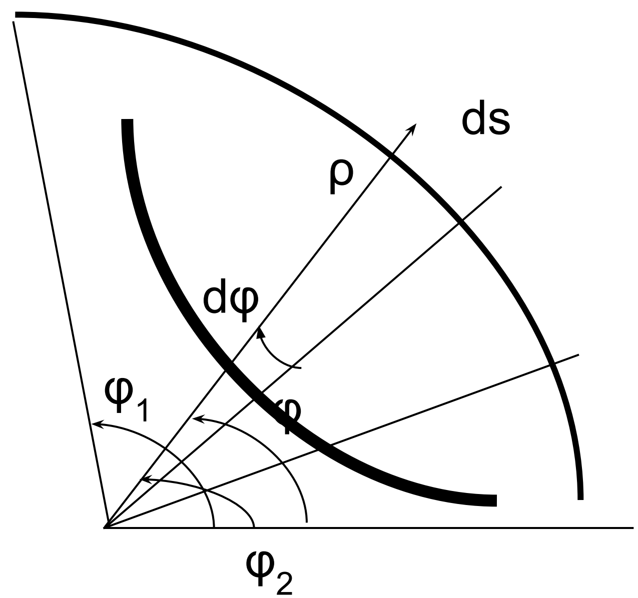
$$\delta_C = \int_0^l \frac{12 \cdot M(-x)}{E \cdot 8b^4} dx = \frac{3}{2} \frac{M}{Eb^4} \int_0^l (-x) dx = \frac{3}{4} \frac{Ml^2}{Eb^4}$$

Интеграл Мора можно использовать для определения перемещений как прямолинейных, так и криволинейных стержневых систем.

Поскольку интеграл Мора вычисляется по длине, для криволинейных стержней вместо dx в подынтегральном выражении используется элемент длины дуги $ds=\rho d\varphi$

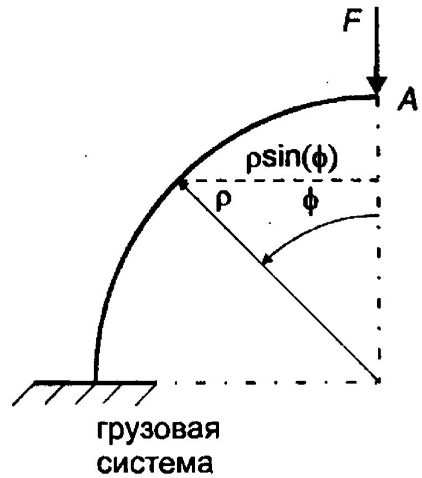
где ρ - радиус кривизны стержня, который может быть постоянным, а может быть функцией от угловой координаты φ.

$$\delta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M_{zP} M_{z1} \rho}{EI_z} d\varphi$$



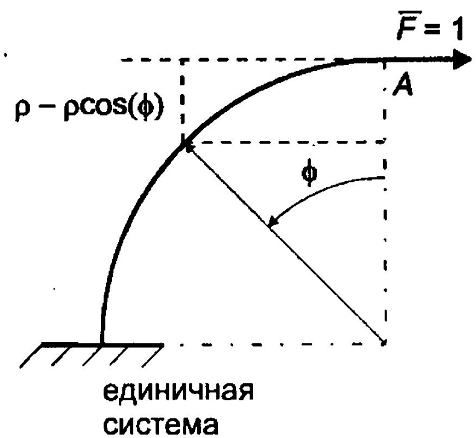
Пример:

Для кривого бруса в форме четверти круга найти горизонтальное перемещение точки ***A.***



Нарисуем вспомогательную единичную систему и нагрузим ее горизонтальной единичной силой в точке ***A.***

В полярной системе координат положение произвольного сечения характеризуется радиусом-вектором ρ (в нашей задаче ρ = ***Const*** — радиус круга) и углом φ от произвольно выбранной начальной точки дуги.



Изгибающий момент от внешних сил $M_F(\varphi) = F \cdot \rho \cdot \sin\varphi$

Изгибающий момент от единичной силы $M_1(\varphi) = 1 \cdot \rho \cdot (1 - \cos\varphi) = \rho(1 - \cos\varphi)$

Горизонтальное перемещение точки А

$$\Delta_{A\text{гор}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M_F M_1}{EI_z} \rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{F\rho \sin\varphi \cdot \rho(1 - \cos\varphi)}{EI_z} \rho d\varphi = \frac{F\rho^3}{2EI_z}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\phi)\cdot(1 - \cos(\phi))}{1} d\phi = 0.5$$

Правило Верещагина

Правило Верещагина – графо-аналитический метод, позволяющий упростить вычисления интегралов, входящих в формулу Мора. Упрощение основано на том, что эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках оказываются линейными.

Предположим, что необходимо взять интеграл от произведения двух функций

$$J = \int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) dz$$

Пусть вторая из этих функций - линейная $f_2(z) = b + kz$

Тогда

$$J = b\int_0^l f_1(z)dz + k\int_0^l zf_1(z)dz$$

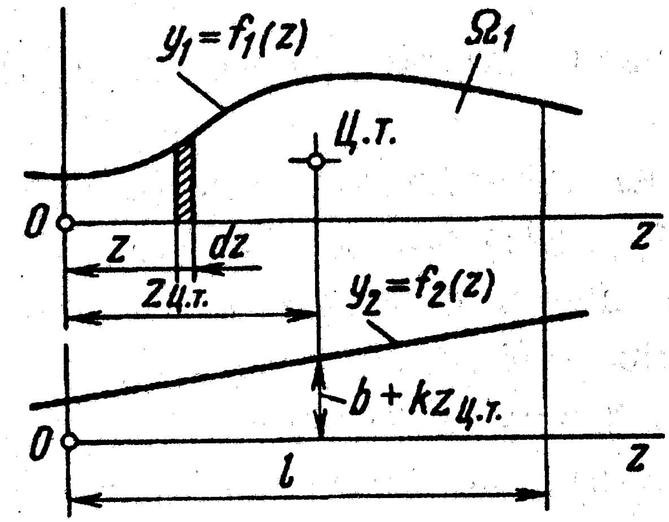
Первый интеграл – площадь эпюры $f_1(z)$ $\int_0^l f_1(z)dz = \Omega_1$

Второй интеграл – статический момент этой эпюры относительно оси ординат

По свойству статического момента

$$\int_0^l z f_1(z)dz = \Omega_1 z_{ЦТ}$$

$z_{ЦТ}$ – координата центра тяжести первого эпюра

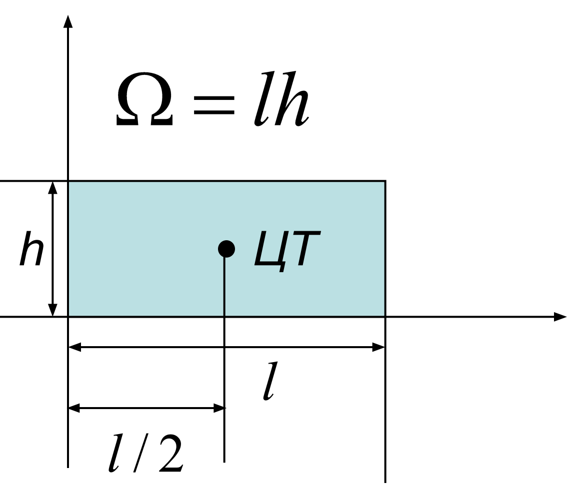


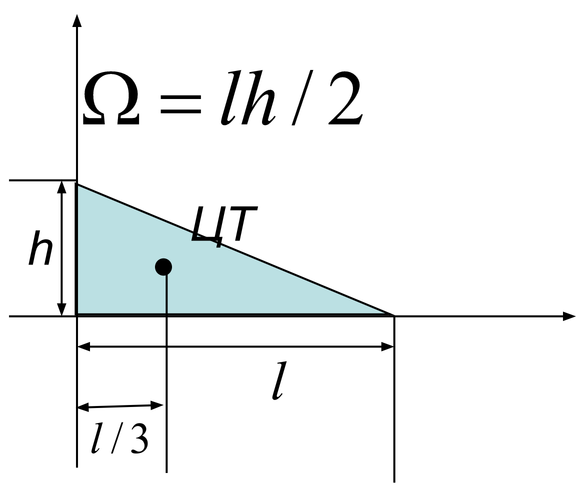
В сумме получаем

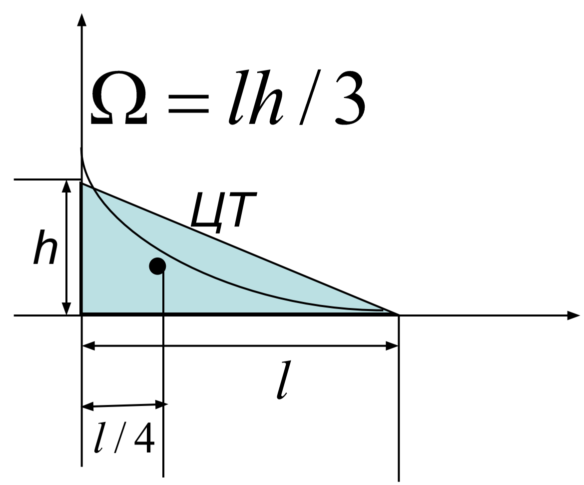
$$J = \Omega_1 b + k\Omega_1 z_{ЦТ} = \Omega_1 (b + k z_{ЦТ})$$

Выражение в скобках – значение функции f_2 под центром тяжести первой фигуры

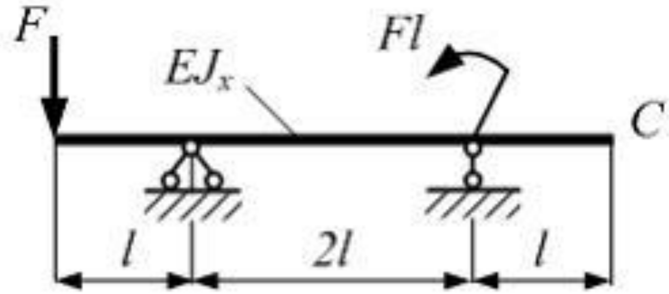
$$J = \Omega_1 f_2(z_{ЦТ})$$





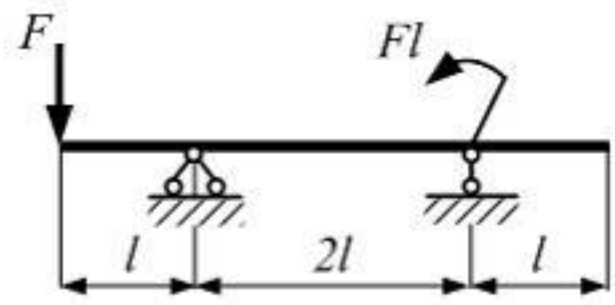


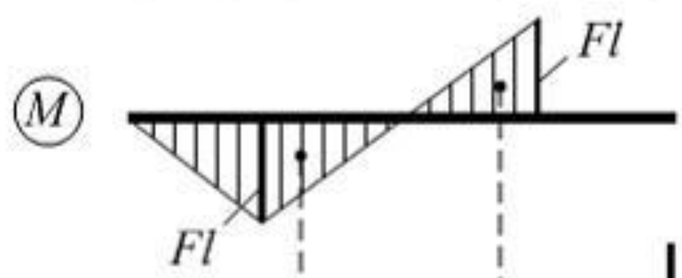
Пример



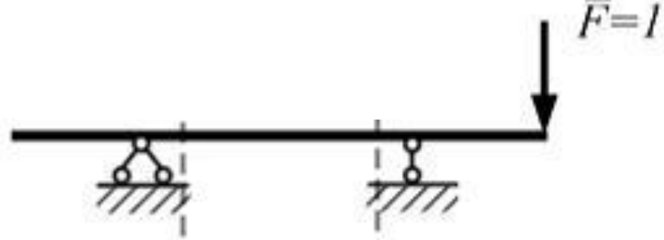
Однопролетная двухконсольная балка нагружена силой и моментом. Жесткость поперечного сечения на изгиб по длине постоянна. Линейный размер *l* задан. Найти прогиб сечения *C* от внешней нагрузки по абсолютной величине. (Влиянием поперечной силы на величину перемещения пренебречь).

1. Строим эпюр изгибающего момента от действительной нагрузки

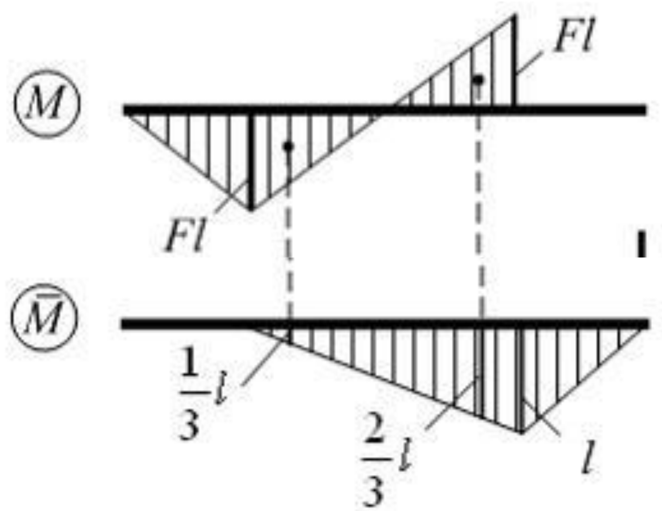




2. Прикладываем единичную нагрузку в направлении интересующего перемещения



3. Строим эпюр момента от приложенного единичного фактора



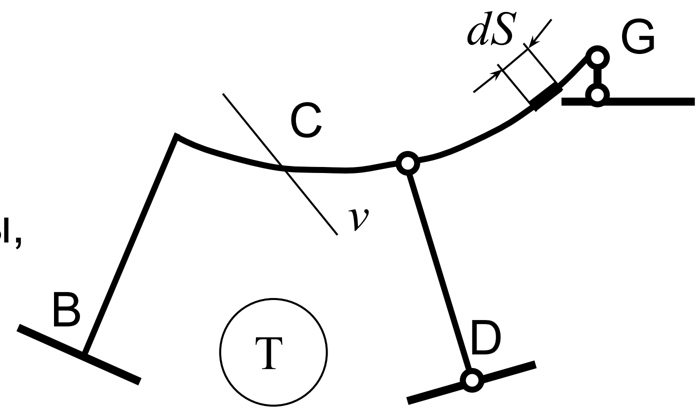
4. Находим интеграл Мора по правилу Верещагина

$$\delta_c = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{1}{2}Fl^2 \cdot \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}Fl^2 \cdot \frac{1}{3}l\right] = -\frac{1}{6}\frac{Fl^3}{EJ_x}$$

3. Формула Мора для определения температурных перемещений сечения по заданному направлению

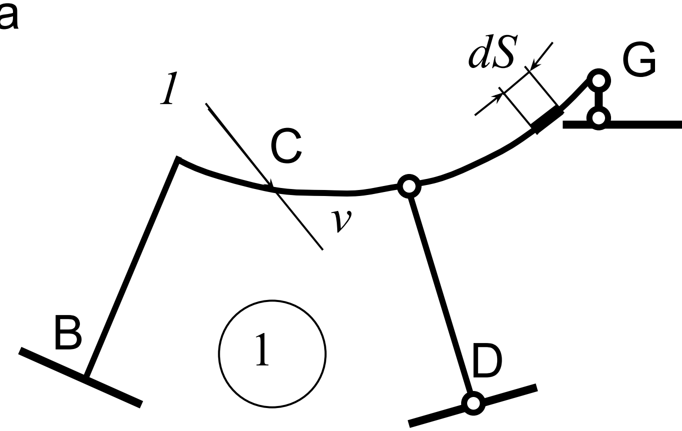
В основу вывода формулы положен принцип возможных перемещений

Пусть дана система, находящаяся под действием температуры. Обозначим: n — число участков системы; *i* - номер ее произвольного участка.



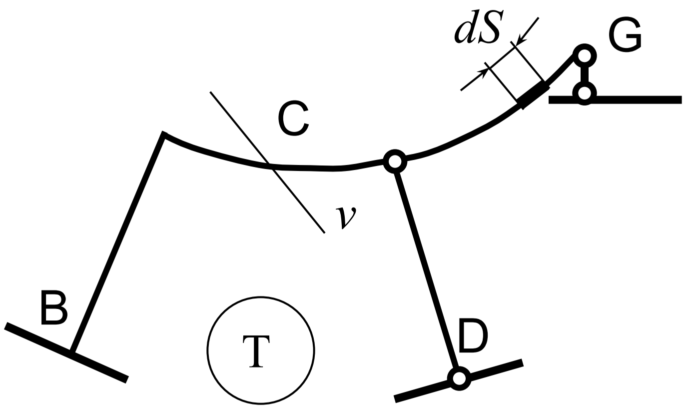
Для определения перемещения сечения *C* по направлению *v* рассмотрим систему без температуры, нагруженную безразмерной обобщенной единичной силой, приложенной в сечении C по направлению *v*.

Схему системы под действием температуры обозначим Т, а схему нагружения системы обобщенной единичной силой обозначим *1.* Приняв за возможное перемещение системы ее деформированное состояние в схеме *T,* найдем работу внешних, реактивных и упругих сил схемы нагружения 1 на этом возможном перемещении. По принципу возможных перемещений сумма этих работ равна нулю, так как система в состоянии *1* находится в равновесии.



Работа внешних сил

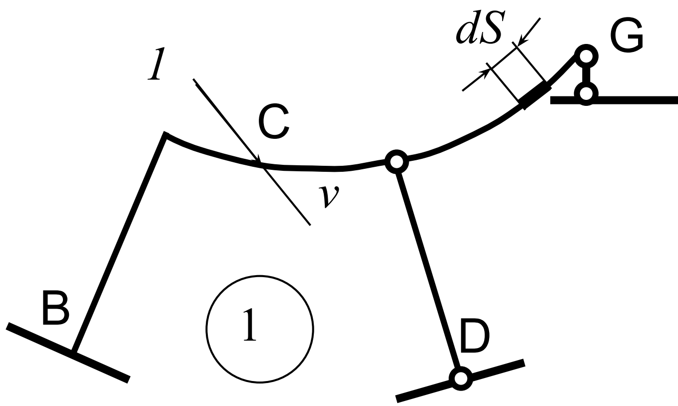
$$A_P = 1 \cdot \delta_v$$



Опоры *B* и *D* неподвижны, а реакция в опоре G направлена по нормали к любому ее возможному перемещению, поэтому работа реактивных сил

$$A_R = 0$$

Для определения работы сил упругости A_y рассмотрим один и тот же элемент, вырезанный из схемы Т и схемы *1* двумя поперечными сечениями, расстояние *dS* между которыми бесконечно мало.



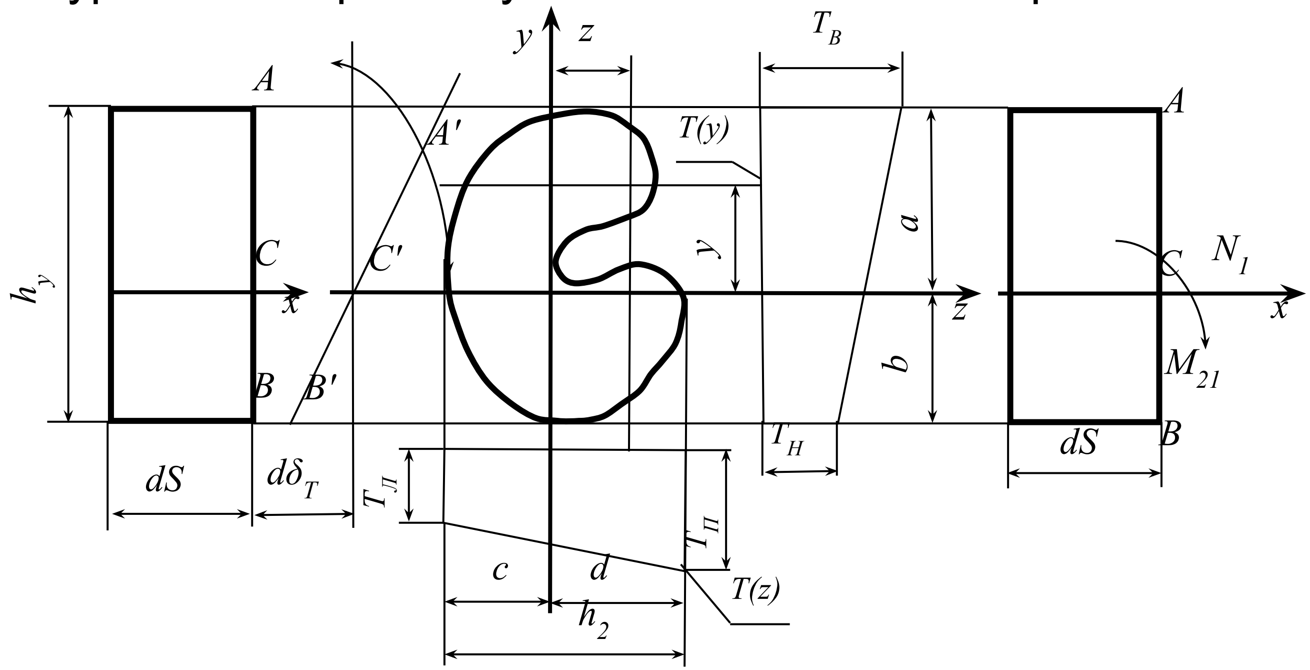
Силы упругости в поперечном сечении элемента могут привестись к шести внутренним силовым факторам, которым присваиваем индекс 1.

Обозначим температуры крайних верхних и нижних, правых и левых волокон i-го участка соответственно $Т_в$, $Т_н$ и $Т_п$, $Т_л$. Считаем, что температура в направлениях осей *y* и z сечения изменяется линейно, будучи соответственно функцией только *y* и только z.

Законы изменения температуры по поперечному сечению показаны на рис. Очевидно, что

$$T(y) = \frac{T_B - T_H}{a+b} y + \frac{T_B b + T_H a}{a+b}$$

$$T(z) = \frac{T_П - T_Л}{c+d} z + \frac{T_П c + T_Л d}{c+d}$$



Температура на оси элемента

$$\Delta T_C = [T(y)]_{y=0} + [T(z)]_{z=0}$$

или

$$\Delta T_C = \frac{T_B b + T_H a}{a+b} + \frac{T_П c + T_Л d}{c+d}$$

Пусть $d\delta_T$ — возможное перемещение центра тяжести поперечного сечения в схеме от изменения температуры элемента.

$$d\delta_T = \alpha \Delta T_C dS$$

где α - коэффициент линейного расширения материала элемента.

Пусть $d\theta^T_z$ - возможный относительный поворот концевых сечений элемента около оси *z* в схеме от изменения температуры

$$d\theta_z^T = \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} dS$$

где $\Delta T_y = T_B - T_H$, h_y - наибольший размер поперечного сечения в направлении оси *y*.

По аналогии, возможный относительный поворот концевых сечений элемента вокруг оси *y*

$$d\theta_y^T = \alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} dS$$

где $\Delta T_z = T_П - T_Л$, h_z- наибольший размер поперечного сечения в направлении оси *z.*

1. dA_y — работа сил упругости в элементе *dS* по абсолютной величине равна работе внутренних силовых факторов состояния на возможных перемещениях состояния и противоположна ей по знаку, так как силы упругости всегда направлены в сторону, противоположную направлению изменения расстояния между точками тела.

2\. Работа $М_{К1}$, Q_{y1} и Q_{z1} равна нулю, так как концевые сечения элемента при нагреве относительно оси x не поворачиваются, а Q_{y1} и Q_{z1} перпендикулярны направлению $d\delta T$, поэтому

$$dA_y = -M_{z1} d\theta_z^T - M_{y1} d\theta_y^T - N d\delta_T$$

Подставляя сюда полученные ранее выражения и интегрируя полученное выражение по s_i —длине i-го участка найдем работу сил упругости на i-м участке.

$$A_{yi} = -\int_{s_i} \left(M_{z1} \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} + M_{y1} \alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} + N_1 \alpha \Delta T_c \right) ds$$

Суммируя эти интегралы по всем участкам системы, найдем A_y.

$$A_y = -\sum_{i=1}^{n}\int_{s_i}\left(M_{z1}\alpha\frac{\Delta T_y}{h_y} + M_{y1}\alpha\frac{\Delta T_z}{h_z} + N_1\alpha\Delta T_c\right)ds$$

Складывая A_p с A_y и приравнивая сумму нулю, получим формулу Мора для определения температурных перемещений сечений стержневой системы по заданному направлению:

$$A_p + A_y = 0;$$

$$1\cdot\delta_v - \sum_{i=1}^{n}\int_{s_i}\left(M_{z1}\alpha\frac{\Delta T_y}{h_y} + M_{y1}\alpha\frac{\Delta T_z}{h_z} + N_1\alpha\Delta T_c\right)ds = 0;$$

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n}\int_{s_i}\left(M_{z1}\alpha\frac{\Delta T_y}{h_y} + M_{y1}\alpha\frac{\Delta T_z}{h_z} + N_1\alpha\Delta T_c\right)ds;$$