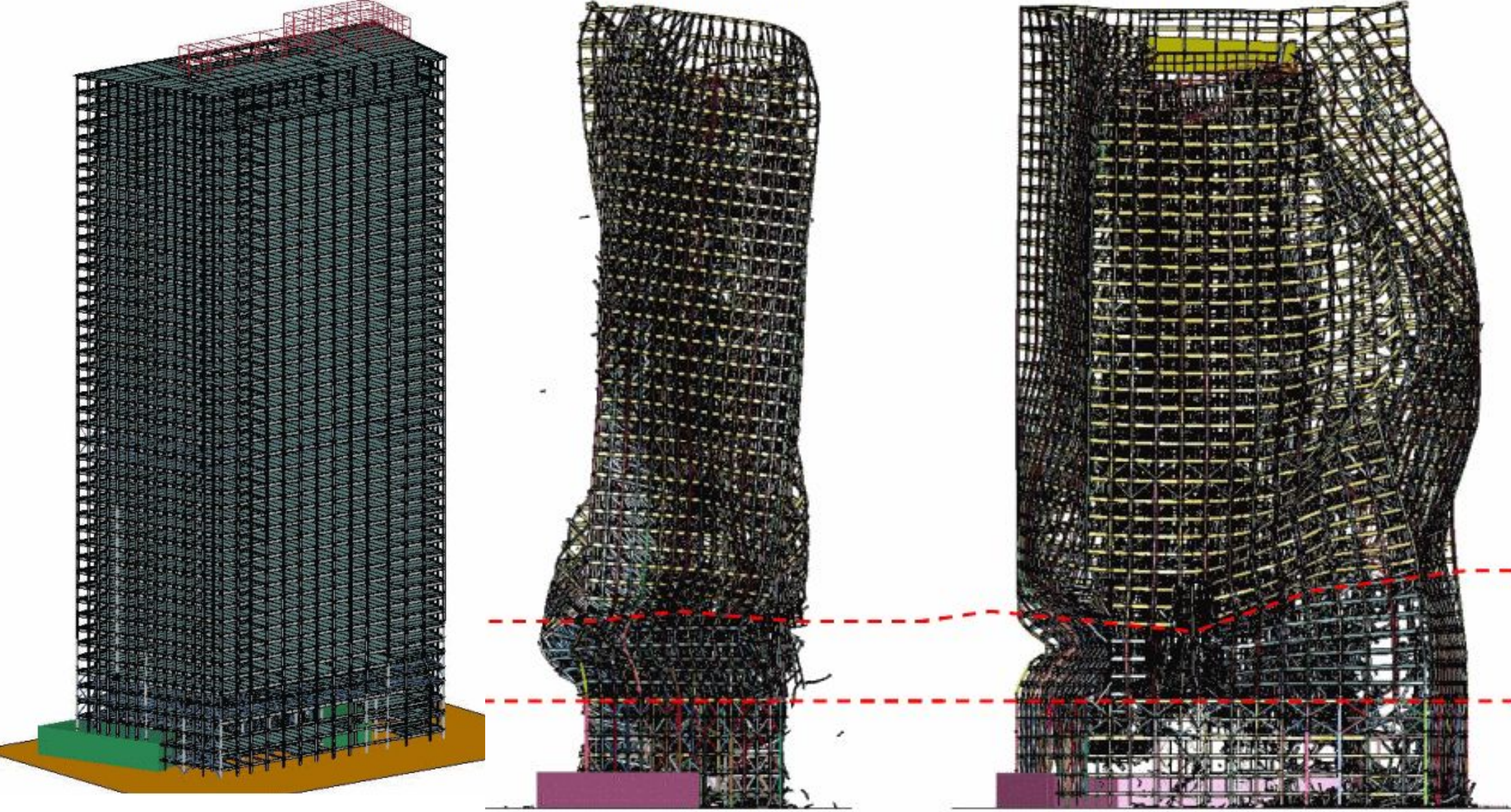
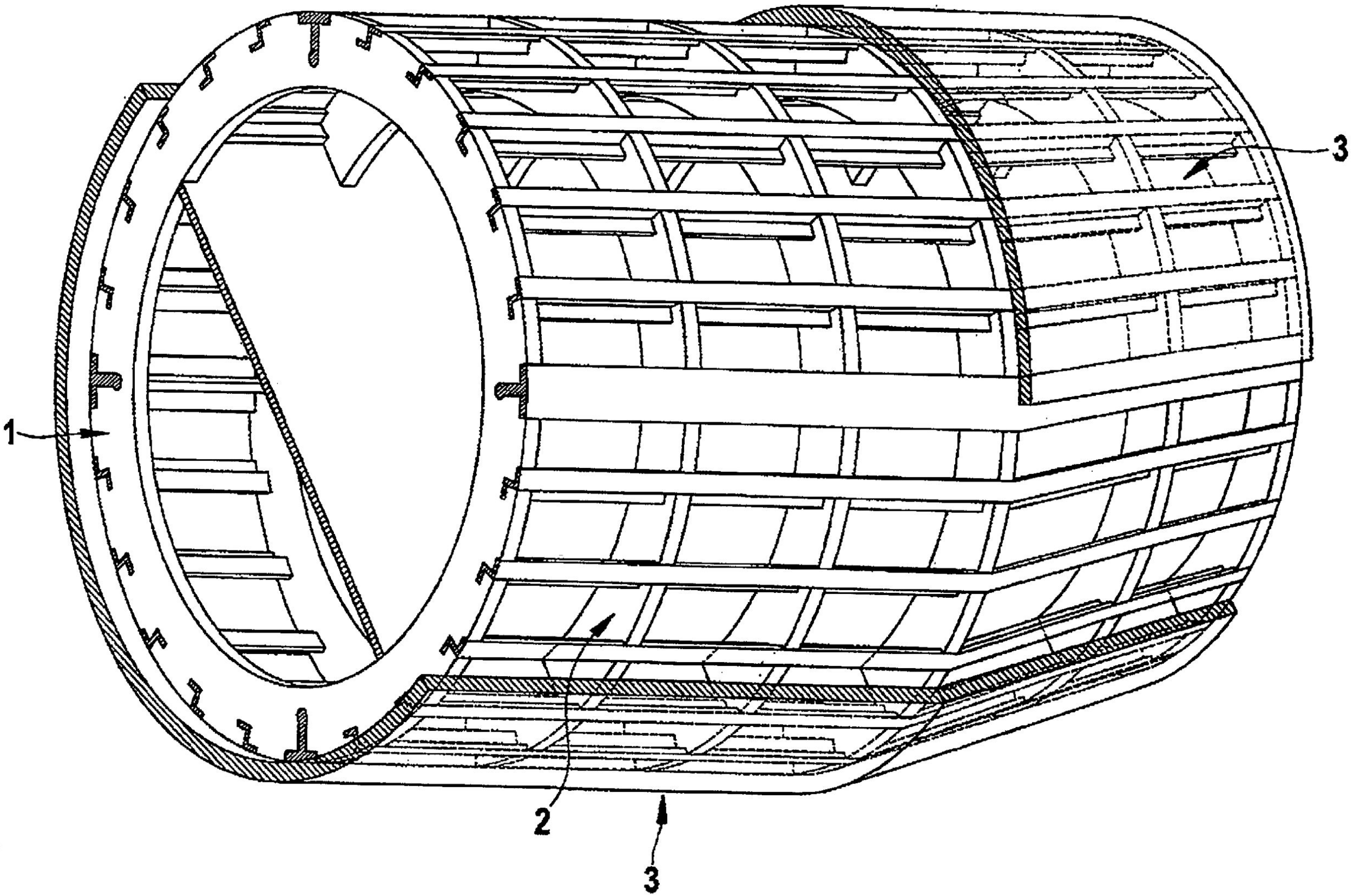
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Доцент кафедры самолетостроения

к.т.н Мухин Д.В.

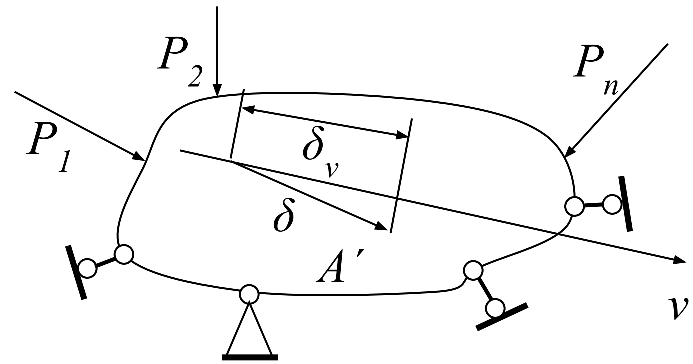



3
1
2
3

1. Закон Гука во внешних факторах и перемещениях

Рассмотрим тело, закрепленное таким образом, что перемещения его точек могут происходить только за счет деформации. Пусть к телу приложены обобщенные силы $Q_1 ... Q_n$; кроме того, пусть задано изменение температуры тела, произвольно распределенное по его объему $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$

Перемещением точки тела по направлению v. которое обозначается δ_v, называется проекция ее перемещения δ на это направление.



Закон Гука во внешних факторах и перемещениях:

до тех пор, пока величины внешних факторов, приложенных к телу, не превысят определенных значений, между ними и перемещением любой точки тела по любому направлению существует линейная зависимость.

Уравнение закона в этой форме запишется в виде

$$\delta_v = \sum_{i=1}^{n} \delta_{vi} P_i + \delta_{vT} \Delta T_A$$

где δ_{Vi} и δ_{VT} коэффициенты, зависящие от выбранного направления в точке, от материала и геометрии тела соответственно, зависящие от законов распределения сил и температуры и независящие от их величин;

ΔT_A - изменение температуры в произвольно выбранной точке тела A, за которое обычно принимают его наибольшее значение ΔT_{max}.

Уравнение справедливо при любых допускаемых значениях внешних факторов, в том числе и при:

$$P_1 \neq 0,\ P_2 ... P_n = 0,\ \Delta T_A = 0,\ \text{следовательно}\ \delta_{vP1} = \delta_{v1} P_1$$

$$P_n \neq 0,\ P_1 ... P_{n-1} = 0,\ \Delta T_A = 0,\ \text{следовательно}\ \delta_{vPn} = \delta_{vn} P_n$$

$$P_1 ... P_n = 0,\ \Delta T_A \neq 0,\ \text{следовательно}\ \delta_{v\Delta T} = \delta_{vT} \Delta T_A$$

тут δ_{vPi} — перемещение точки тела по направлению v при действии на тело только силы P_i, $\delta_{v\Delta T}$ —перещение точки тела по направлению v при действии на тело только температуры

Отсюда виден физический смысл δ_{vi} -перемещение точки по правлению v при действии на тело только единичной безразмерной силы, приложенной по направлению и вместо силы $\mathrm{P_i}$: δ_{vT} —перемещение точки по направлению v при действии на тело температуры $\Delta \mathrm{T_A}$*=1К,* распределенной по заданному закону. Подставив выражения $\delta_{vi}\mathrm{P_i}$, и $\delta_{vT}\ \Delta \mathrm{T_A}$ в начальное уравнение получим

$$\delta_V = \sum_{i=1}^{n} \delta_{VPi} + \delta_{v\Delta T}$$

Равенство выражает ***принцип независимости действии внешних факторов***, который читается так:

если справедлив закон Гука во внешних факторах и перемещениях, то перемещение точки тела по данному направлению от всех внешних факторов, действующих на него, равняется алгебраической сумме ее перемещений по этому направлению, найденных при действии на тело каждою внешнею фактора отдельно

2. Потенциальная энергия деформации и общие теоремы сопротивления материалов

Геометрически неизменяемая система, элементами которой являются брусья, называется стержневой.

Изменение потенциальной энергии частиц вещества системы при ее деформации, создаваемой внешними силами, называется потенциальной энергией деформации.

В процессе нагружения система может прийти в колебательное движение. Потенциальная энергия деформации на основании теорем механики в любой момент времени t равна работе внешних сил, сил инерции и сил сопротивления, действующих на точки системы:

$$u(t) = A(t) - \iiint_m \left[\int \left(\frac{d^2\delta}{dt^2} \cos\alpha + \psi \frac{d\delta}{dt} \cos\beta \right) d\delta \right] dm,$$

где u(t) — потенциальная энергия деформации; A(t) — работа внешних сил;
δ - текущее перемещение точки;m — масса системы; $\left(d^2\delta / dt^2\right)dm$ -элементарная сила инерции; $\left(d\delta / dt\right)dm$ — элементарная сила внутреннего трения, которую считаем пропорциональной скорости точки и направленной в сторону, ей противоположную;

ψ - коэффициент пропорциональности, зависящий от материала тела;

α — угол между направлением ускорения точки и ее перемещением;

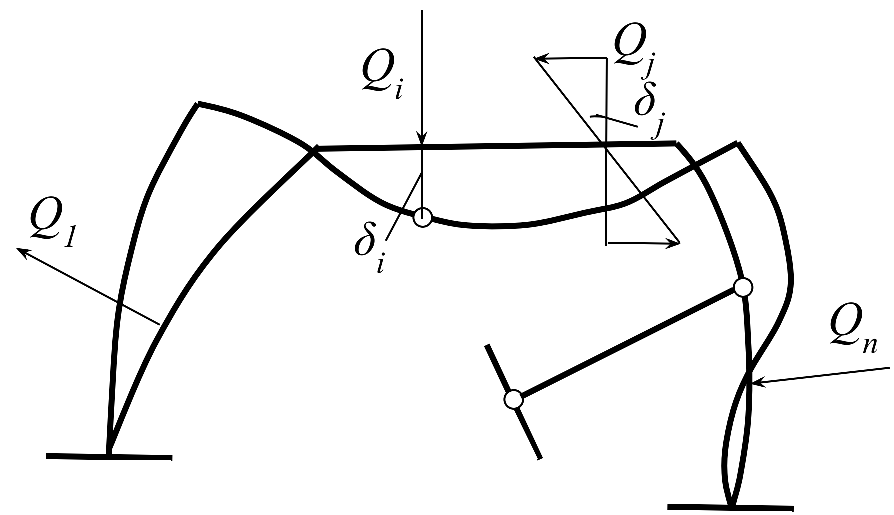
β — угол между направлением скорости точки и ее перемещением.

Если величины приложенных к телу сил. достигнув в конце процесса нагружения значений $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ в дальнейшем остаются постоянными, то колебательное движение точек тела будет затухающим. Поэтому в положении статического равновесия, при котором ускорения и скорости всех точек системы равны нулю,

$$u(t) = A(t)$$

где *u* — потенциальная энергия деформации в положении статического равновесия; *A* - работа внешних сил, соответствующая этому состоянию. Следовательно, $du=dA$.

В дальнейшем под Q_i, будем понимать как величину сосредоточенной силы, так и величину момента пары и называть Q_i обобщенной силой. Под δ_i, будем понимать: для сосредоточенной силы - перемещение точки ее приложения по направлению силы, для пары сил - поворот плоскости ее действия. Назовем δ_i, обобщенным перемещением, соответствующим Q_i.

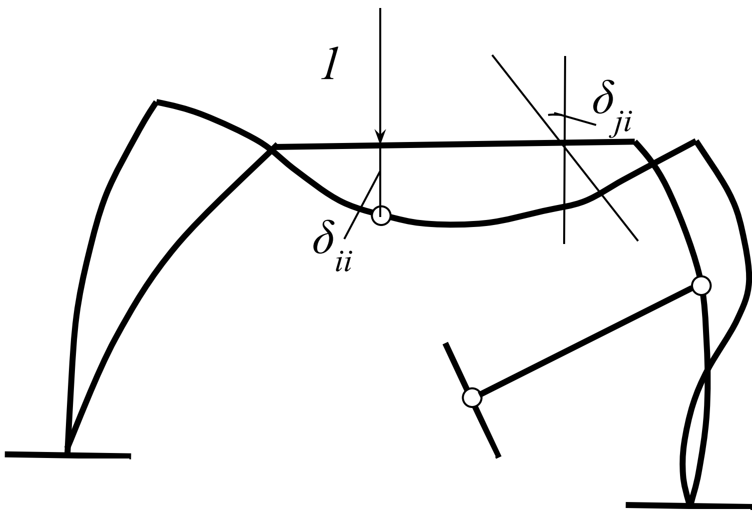


Из закона Гука в силах и перемещениях для n обобщенных сил, действующих на механическую систему, получим систему n линейных уравнений, в которых δ_i выражены через Q_i :

$$\delta_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji} Q_i; \quad j = 1 \ldots n.$$

В формуле коэффициенты δ_{ji} при Q_i называются **единичными перемещениями или податливостями**.

Как было показано ранее δ_{ji} — перемещение сечения, в котором приложена *j*-я обобщенная сила по ее направлению, при действии на систему только единичной безразмерной обобщенной силы, приложенной вместо и по направлению Q_i. Или короче: δ_{ji} — перемещение сечения по направлению *j* от обобщенной единичной силы, приложенной по направлению *i.* Пример единичных перемещений показан на рис.



Выразим из системы уравнений обобщенные силы через обобщенные перемещения

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} C_{ji} \delta_i; \quad j = 1 \ldots n.$$

C_{ji} - жесткость по направлению *j* от единичного перемещения по направлению i, причем

$$C_{ji} = \frac{A_{ji}}{\Delta}$$

где Δ — определитель системы уравнений , A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента δ_{ji} этого определителя

Если каждая обобщенная сила получит бесконечно малое приращение ΔQ_i, то каждое обобщенное перемещение получит бесконечно малое приращение $\Delta\delta_i$,.
Тогда приращение работы

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i + \Delta Q_i\right)\Delta\delta_i$$

а дифференциал работы есть дифференциал потенциальной энергии деформации, следовательно (пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка малости)

$$du = \sum_{i=1}^{n} Q_i d\delta_i$$

С другой стороны, работа, а следовательно, и потенциальная энергия деформации являются функцией обобщенных перемещений

$$u = u\left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right).$$

Как известно из математического анализа полный дифференциал функции нескольких переменных равен:

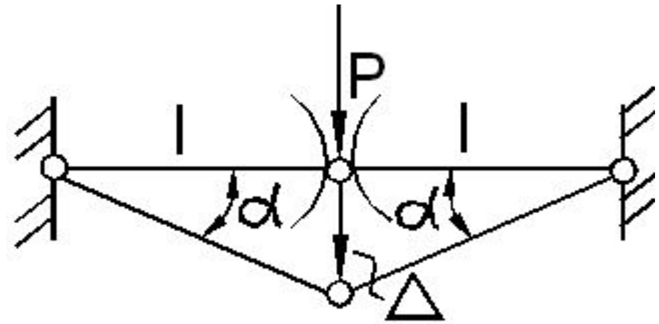
$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \delta_i} d\delta_i$$

Сопоставляя формулы для du, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \delta_i} = Q_i$$

Данная формула выражает теорему Лагранжа: **частая производная от потенциальной энергии деформации по обобщенному перемещению равняется соответствующей обобщенной силе.**

Теорема Лагранжа может непосредственно использоваться для решения задач в тех случаях, когда требуется определить перемещение в направлении действия силы



Потенциальная энергия двух растягиваемых стержней

$$U = 2\left(\frac{1}{2}N\Delta l\right)$$

Выразим силу (с учетом закона Гука)

$$N = \sigma \cdot A = E\varepsilon A = E\frac{\Delta l}{l}A$$

Следовательно $U = \dfrac{EA\Delta l^2}{l}$

Из геометрии (с учетом малости углов) $\Delta = l \cdot tg\alpha \approx l\alpha$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \ldots \Rightarrow tg\alpha =$$

Докажем симметрию матриц $\|C_{ji}\|$ и $\|\delta_{ji}\|$ Для этого подставим в формулу теоремы Лагранжа выражения Q_i и Q_j .

$$\frac{\partial u}{\partial \delta_i} = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\delta_k \qquad \frac{\partial u}{\partial \delta_j} = \sum_{k=1}^{n} C_{jk}\delta_k$$

Продифференцируем первое выражение по δ_j, а второе по δ_i.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = C_{ij} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \delta_j \partial \delta_i} = C_{ji}$$

Из математического анализа известно $\frac{\partial^2 u}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial \delta_j \partial \delta_i}$

Следовательно $C_{ji} = C_{ij}.$ Отсюда следует $\delta_{ji} = \delta_{ij}$

Равенство выражает теорему взаимности перемещений: единичные перемещения с одинаковыми, но переставленными индексами, равны.

Из $\delta_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji} Q_i; \quad j = 1 \ldots n.$ дифференциалы перемещений равны

$$d\delta_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji} dQ_i; \quad j = 1 \ldots n.$$

Подставим в формулу для du и с учетом симметрии матриц имеем

$$du = \left(\delta_{11} Q_1 + \ldots + \delta_{1n} Q_n\right) dQ_1 + \ldots + \left(\delta_{n1} Q_1 + \ldots + \delta_{nn} Q_n\right) dQ_n$$

отсюда

$$du = \sum_{i=1}^{n} \delta_i dQ_i$$

С другой стороны работа является функцией обобщенных сил

$$u = u\left(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\right)$$

Как известно из математического анализа полный дифференциал функции нескольких переменных равен:

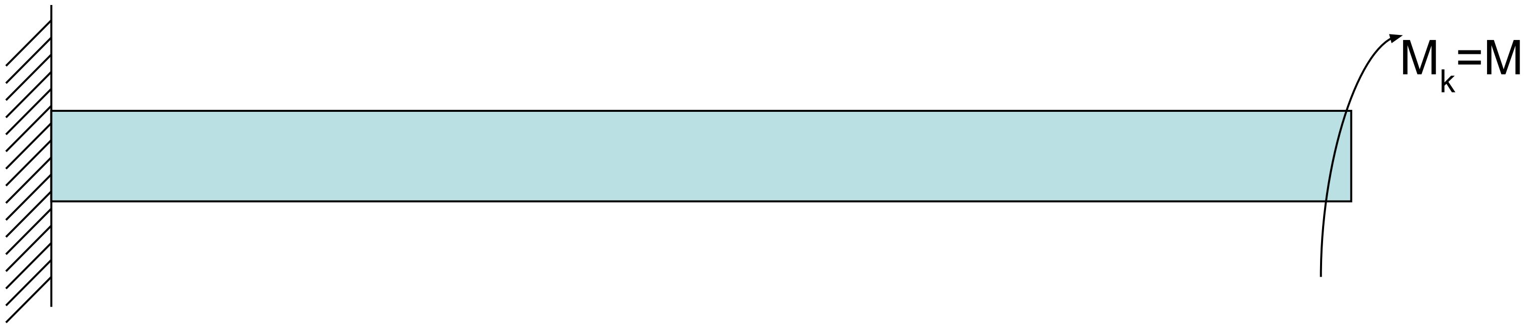
$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial Q_i} dQ_i$$

Сопоставляя формулы для du, получим

$$\frac{\partial u}{\partial Q_i} = \delta_i$$

Данная формула выражает теорему Кастилиано: частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равняется соответствующему этой силе обобщенному перемещению.

Теорема Кастилиано может непосредственно использоваться для решения задач в тех случаях, когда требуется определить перемещение в направлении действия силы



Потенциальная энергия стержня при кручении:

$$U = \int_0^l \frac{M_K^2 dz}{2GJ_K}$$

$$U = \frac{M^2 l}{2GJ_K}$$

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{Ml}{GJ_K}$$

Чтобы получить $u = u(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$ следует проинтегрировать по правилу полного дифференциала.

Для двух обобщенных сил, действующих на систему

$$\frac{\partial u}{\partial Q_i} = \delta_{ii} Q_i + \delta_{ij} Q_j \qquad \frac{\partial u}{\partial Q_j} = \delta_{ji} Q_i + \delta_{jj} Q_j$$

Интегрируем первое выражение

$$u = \delta_{ii} \frac{Q_i^2}{2} + \delta_{ij} Q_j Q_i + f(Q_j)$$

где $f(Q_j)$ — неизвестная функция только от Q_j. Для ее определения дифференцируем по Q_j.

$$\frac{\partial u}{\partial Q_j} = \delta_{ij} Q_i + \frac{df(Q_j)}{dQ_j}$$

Приравняем ко второму выражению $\delta_{ji} Q_i + \delta_{jj} Q_j = \delta_{ij} Q_i + \dfrac{df(Q_j)}{dQ_j}$

Откуда с учетом симметрии

$$f(Q_j) = \delta_{jj} \frac{Q_j^2}{2} + u_0$$

где u_0 — произвольная постоянная.

Подставив, будем иметь $u=\frac{1}{2}\delta_{ii}Q_i^2+\delta_{ij}Q_jQ_i+\frac{1}{2}\delta_{jj}Q_j^2+u_0$

При $Q_i=Q_j=0$ $u=0$ следовательно $u_0=0$

Обобщая для n обобщенных сил, действующих на систему, получим

$$u=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{ji}Q_jQ_i$$

По аналогии

$$u=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}C_{ji}\delta_j\delta_i$$

Выражение для u можно представить так:

$$u=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}Q_j\sum_{i=1}^{n}\delta_{ji}Q_i$$

Учитывая закон Гука во внешних перемещениях

$$u=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}Q_j\delta_j$$

Данная формула выражает теорему Клапейрона: в положении статического равновесии потенциальная энергия деформации равна сумме половин произведений обобщенных сил на соответствующие им обобщенные перемещения.

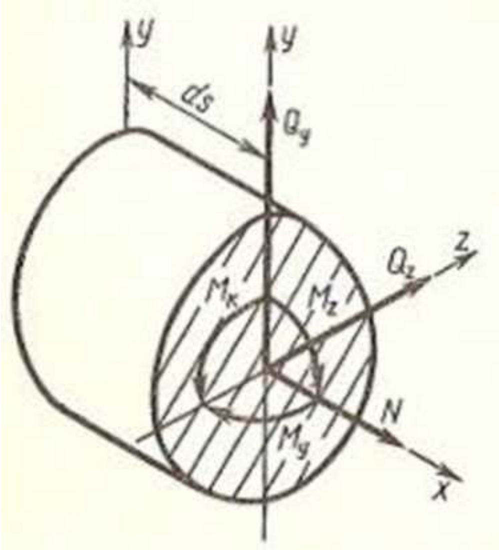
3. Выражение потенциальной энергии деформации системы через внутренние силовые факторы

Силы упругости в поперечных сечениях элемента могут привестись к шести внутренним силовым факторам, которые для него должны рассматриваться как обобщенные силы. Под действием этих обобщенных сил правое сечение элемента переместится относительно левого, которое считаем неподвижным. Перемещения сечения в направлениях осей x, *y, z* от *N*, Q_y, Q_z. и повороты его около осей x, *y, z* от $M_к$ M_y M_z, будут взаимно ортогональны, поэтому обобщенное перемещение, соответствующее каждому внутреннему силовому фактору, будет перемещение, вызванное им самим. Или по-другому: **каждый внутренний силовой фактор будет совершать работу только на созданном им (на собственном) перемещении**.

На этом основании *du* — потенциальная энергия деформации элемента может быть найдена, как сумма потенциальных энергий деформации, определенных при действии на элемент каждого внутреннего силового фактора отдельно.

$$dU = dU(N) + dU(Q_x) + dU(Q_y) + dU(M_k) + dU(M_y) + dU(M_z)$$

Двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми по оси участка *dS* — бесконечно мало, вырежем на i-м участке системы элемент.

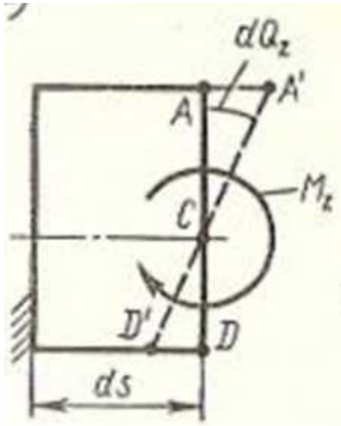


При вычислении слагаемых, входящих в равенство , пользуемся теоремой Клайперона .

Из схемы нагружения

$$du_{Mz} = \frac{M_z d\theta_z}{2}$$

где $d\theta_z$ — поворот правого сечения элемента, остающегося плоским при чистом изгибе, около оси *z.*



Из дифференциального уравнения упругой линии балки

$$d\theta_z = \frac{M_z}{EI_z} ds$$ следовательно $$du_{Mz} = \frac{M_z^2}{2EI_z} ds$$

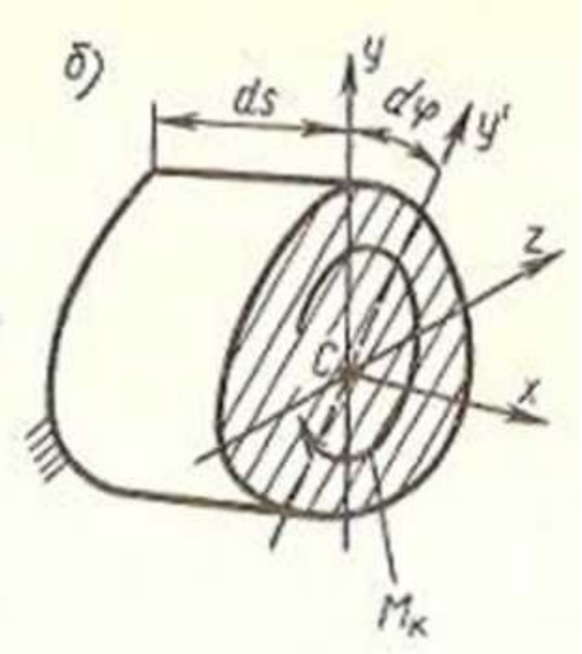
По аналогии

$$du_{My} = \frac{M_y^2}{2EI_y} ds$$

Из схемы нагружения

$$du_{Mk} = \frac{M_K d\varphi}{2}$$

где $d\varphi$ — угол поворота правою сечения элемента относительно левого около оси *x.*



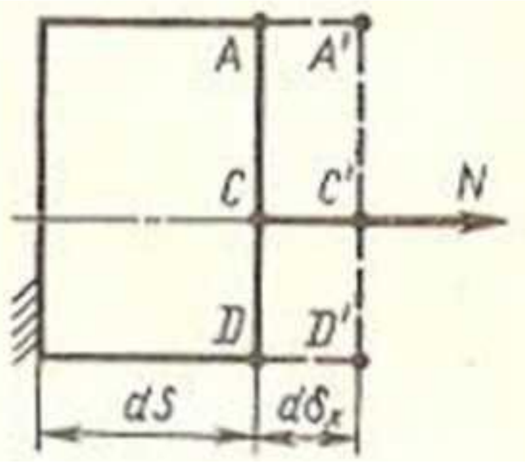
Как было показано ранее

$$d\varphi = \frac{M_K}{GI_K} ds$$ следовательно $$du_{Mk} = \frac{M_K^2}{2GI_K} ds$$

Из схемы нагружения

$$du_N = \frac{N d\delta_x}{2}$$

где $d\delta x$ — перемещение правого сечения элемента, остающегося плоским при растяжении (сжатии), в направлении оси x.

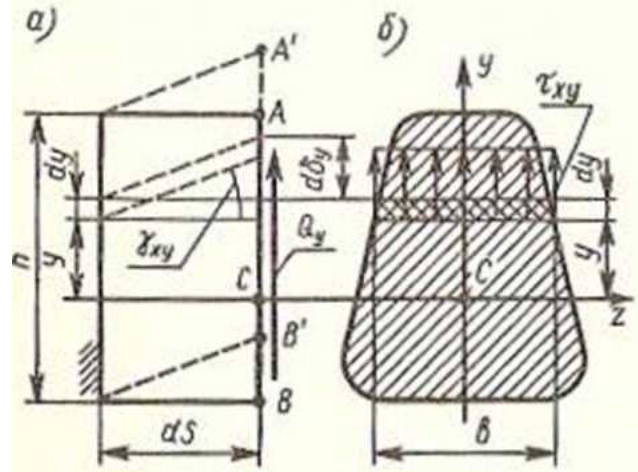


Как было показано ранее

$$d\delta_x = \frac{N}{EF} ds$$ следовательно $$du_N = \frac{N^2}{2EF} ds$$

Из схемы нагружения

Угол сдвига γ_{xy} элемента с размерами b, dS, *dy* переменен по высоте сечения h, поэтому для определения du_{Qy} придется сначала вычислить $d(du_{Qy})$ - потенциальную энергию деформации этого элемента. Касательные силы упругости, действующие по граням элемента, параллельным нейтральному слою, нормальны к перемещению. и, следовательно, их работа равна нулю.



Потенциальные энергии деформации

Виды нагружения	Конечный отрезок	Элементарный участок
Растяжение	$U=\int_0^l \frac{N^2dx}{2EA}$	$dU=\frac{N^2dx}{2EA}$
Кручение	$U=\int_0^l \frac{M_K^2dx}{2GI_K}$	$dU=\frac{M_K^2dx}{2GI_K}$
Изгиб M_y (горизонтальный)	$U=\int_0^l \frac{M_y^2dx}{2EI_y}$	$dU=\frac{M_y^2dx}{2EI_y}$
Изгиб M_z (вертикальный)	$U=\int_0^l \frac{M_z^2dx}{2EI_z}$	$dU=\frac{M_z^2dx}{2EI_z}$
Перерезывающая Q_y (вертикальн.)	$U=\int_0^l \frac{k_yQ_y^2dx}{2GA}$	$dU=\frac{k_yQ_y^2dx}{2GA}$
Перерезывающая Q_z (горизонт.)	$U=\int_0^l \frac{k_zQ_z^2dx}{2GA}$	$dU=\frac{k_xQ_z^2dx}{2GA}$

Суммируя получим

$$dU = dU(N) + dU(Q_x) + dU(Q_y) + dU(M_k) + dU(M_y) + dU(M_z) =$$

$$= \frac{N^2 dx}{2EA} + \frac{k_y Q_y^2 dx}{2GA} + \frac{k_z Q_z^2 dx}{2GA} + \frac{M_K^2 dx}{2GI_K} + \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \frac{M_z^2 dx}{2I_z}$$

Полная энергия выразится через интеграл

$$U = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_0^l \frac{k_y Q_y^2 dx}{2GA} + \int_0^l \frac{k_z Q_z^2 dx}{2GA} + \int_0^l \frac{M_K^2 dx}{2GI_K} + \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z}$$

В данных выражениях не всегда все слагаемые являются равноценными. В стержневых системах, работающих на изгиб и кручение первыми тремя слагаемыми обычно можно пренебречь

Раскрытие статической неопределенности методом сил

Метод сил используют для раскрытия статической неопределенности в стержневых системах.

Метод заключается в том, что систему освобождают от статической неопределимости размыкая лишние связи, а действие отброшенных связей заменяют действием приложенных сил и моментов.

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой, она называется *основной системой*.

Для того, чтобы основная система была эквивалентна исходной системе, необходимо, чтобы под действием приложенных вместо связей сил перемещения в направлении приложенных сил были равны нулю. Исходя из этого предположения составляется система канонических уравнений метода сил. Определяются неизвестные силы и затем определяются напряжения и деформации в стержнях.

Система канонических уравнений метода сил имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + .. + \delta_{1n}X_n + \Delta_1 = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + .. + \delta_{2n}X_n + \Delta_2 = 0 \\ \vdots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + .. + \delta_{nn}X_n + \Delta_n = 0 \end{cases}$$

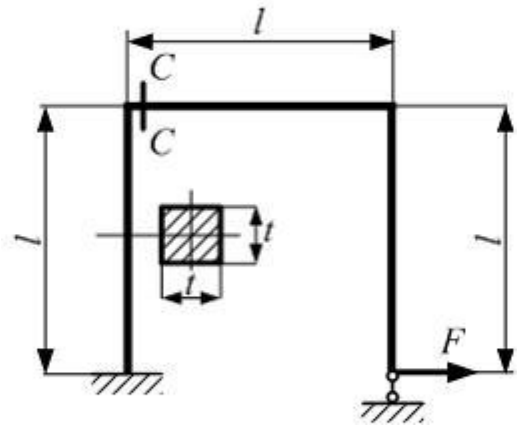
δ_{ij} – перемещение в направлении i-го силового фактора, под действием единичного j-го силового фактора;

X_j –j-й силовой фактор (неизвестная величина)

Δ_i – перемещение в направлении i-го силового фактора, под действием исходной системы сил.

Величины δ_{ij} и Δ_i определяют по формуле Мора. Затем решают систему уравнений и находят значения X_j. Затем заново строят эпюры нагрузок в стержнях с учетом X_j и находят интересующие напряжения и деформации.

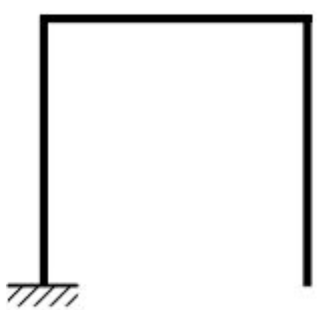
Пример



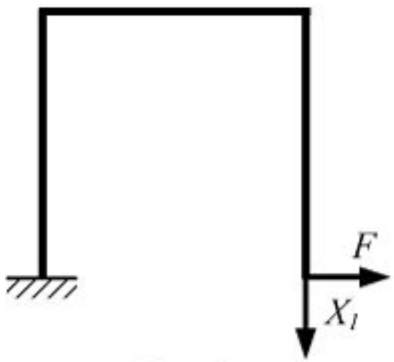
На рисунке показана рама с постоянным по контуру квадратным поперечным сечением, нагруженная силой *F*. Модуль упругости материала *E*. Определить максимальное нормальное напряжение в сечении С-С рамы, вызванное изгибающим моментом.

Решение

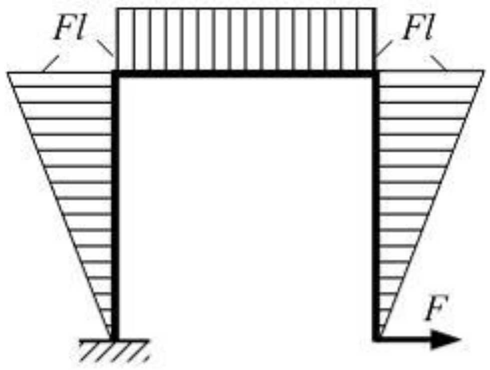
1. Отбрасываем лишнюю связь (получем основную систему)



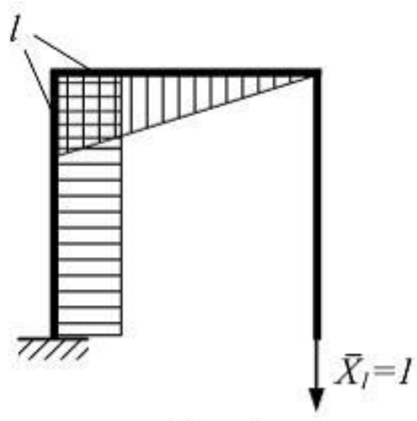
2. Заменяем действие отброшенных связей силовыми факторами



3. Строим эпюры от действия исходных сил



4. Строим эпюры от действия единичного фактора X_1



5. Записываем канонические уравнения метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_1 = 0$$

6. Определяем коэффициенты уравнения по формуле Мора по правилу Верещагина

Для определения δ_{11} умножаем единичный эпюр сам на себя

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}l^2 \cdot \frac{2}{3}l + l^2 \cdot l\right) = \frac{4l^3}{3EJ}$$

Для определения Δ_1 умножаем единичный эпюр на грузовой

$$\Delta_1 = \frac{1}{EJ}\left(-Fl^2 \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2}Fl^2 \cdot l\right) = -\frac{Fl^3}{EJ}$$

7. Подставляем и решаем

$$\frac{4l^3}{3EJ}X_1 - \frac{Fl^3}{EJ} = 0$$

$$\frac{4}{3}X_1 - F = 0$$

$$X_1 = \frac{3}{4}F$$

8. Строим эпюр с учетом найденного X_1

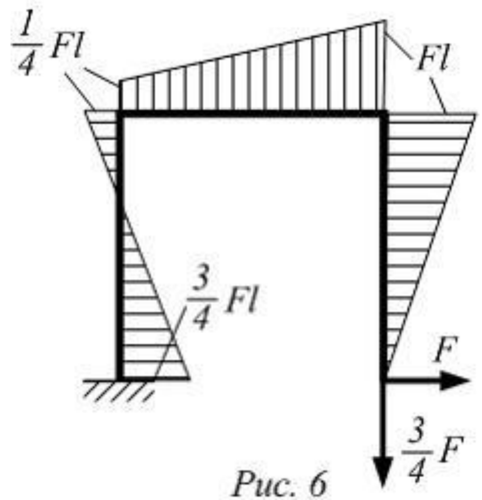


Рис. 6

9. Находим напряжение в сечении С

$$M = \frac{1}{4} Fl \quad (по\ \ эпюру)$$

$$\sigma_{мах} = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{4} Fl}{\frac{t \cdot t^3}{6}} = \frac{3}{2} \frac{Fl}{t^3}$$