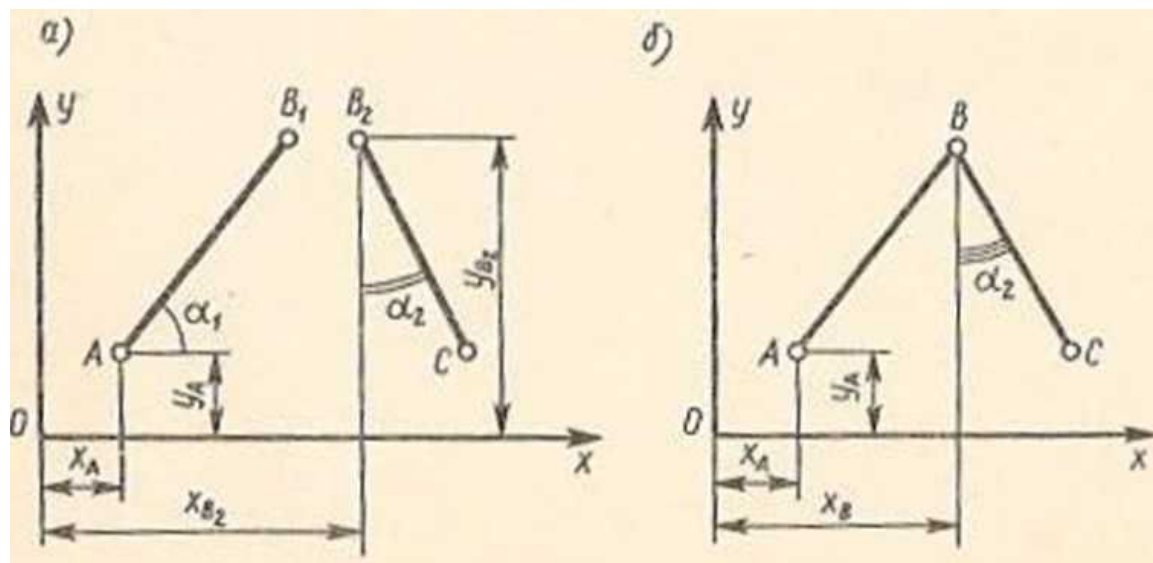


РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО МЕТОДУ СИЛ

1. Определение числа лишних связей плоской системы

Числом степеней свободы системы называется число независимых координат, определяющих положение всех ее элементов. При определении числа степеней свободы элементы системы считают абсолютно твердыми.

Система рис. а имеет шесть степеней свободы, так как для определения положений двух ее элементов относительно системы отсчета xu надо задать шесть независимых координат, за которые можно принять x_A , y_A , α_1 , x_{B2} , y_{B2} и α_2 .



Связями называются тела, уменьшающие число степеней свободы системы.

На рис. б элементы системы соединили шарнирно. Число независимых координат, определяющих их положения, уменьшилось до четырех x_A , y_A , x_B и α_2 . Следовательно, плоский шарнир, в котором сходятся два элемента (двойной), уменьшает число степеней свободы на две (накладывает на систему две связи).

Аналогично можно показать, что катковая связь уменьшает число степеней свободы системы на единицу. Наоборот, удаление двойного шарнира или катка равносильно удалению соответственно двух связей и одной связи.

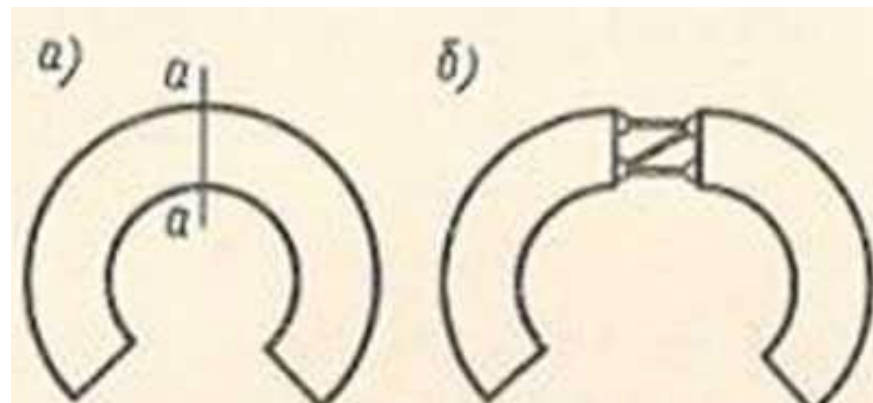
Связь (тело, уменьшающее число степеней свободы на единицу) можно условно изображать стержнем, шарнирно соединенным с частями системы. В теоретической механике изучались связи, соответствующие катку, шарниру, скользящей и глухой заделкам.

Так как тело имеет в плоскости три степени свободы, для его неподвижности относительно системы отсчета между ними должны существовать минимум три связи, направления которых не пересекаются в одной точке.

Если мысленно разрезать брус (рис. а) сечением $a — a$ на две части, то для сохранения взаимной неподвижности частей можно представить их соединенными тремя связями (глухая заделка) (рис. б). Значит, разрез системы по любому сечению эквивалентен удалению трех связей.

Система геометрически неизменяема, если взаимные перемещения ее точек могут происходить только за счет деформации.

Связи, удаление которых не нарушает геометрической неизменяемости системы, называются **лишними**.

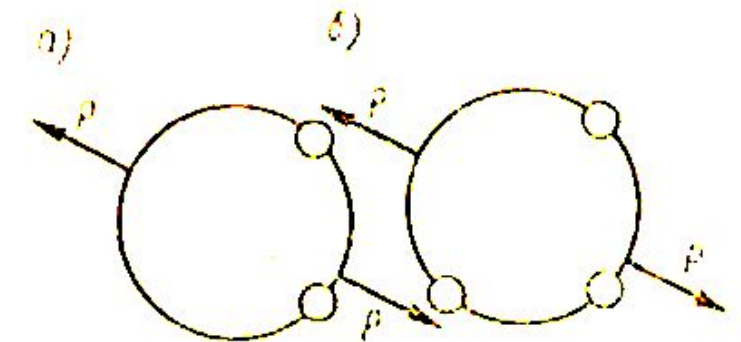
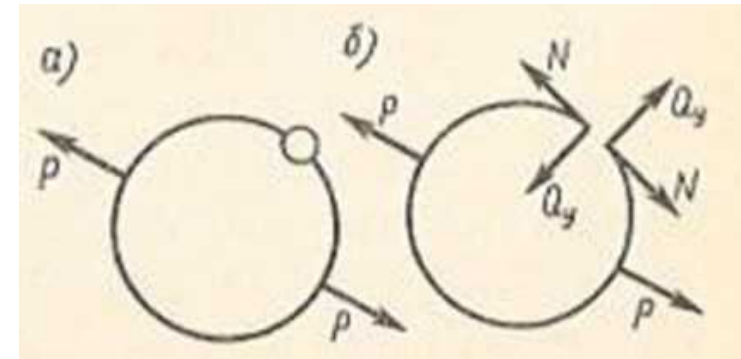
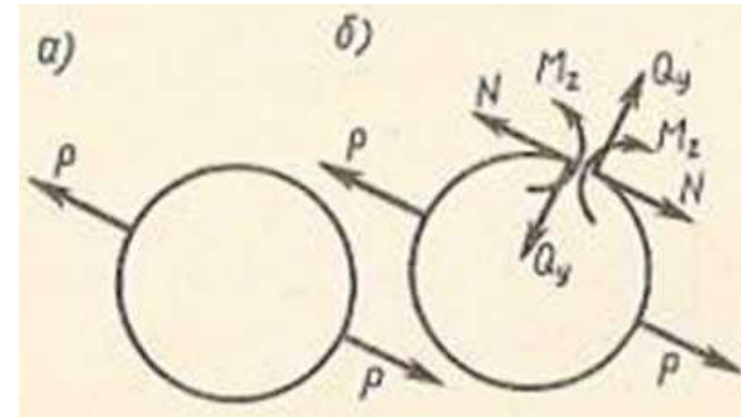


Контуром назовем замкнутую линию, образованную осями элементов системы, ограничивающую область, в пределах которой отсутствуют осевые линии, соединяющие точки контура.

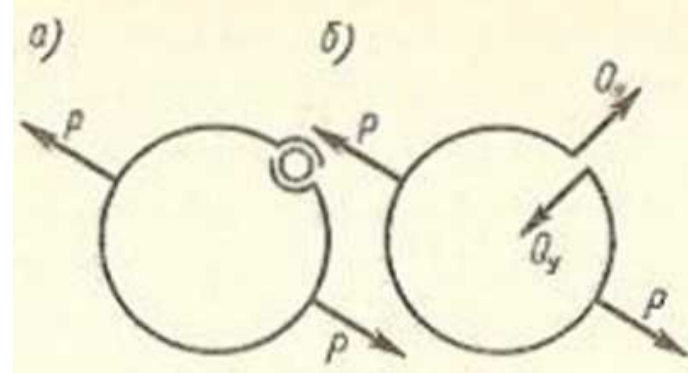
Бесшарнирный контур (рис а) содержит три лишние связи, так как разрез его по любому сечению (рис. б) геометрической неизменяемости не нарушает (в любом сечении разрезанного контура существуют три связи).

Контур с одним шарниром содержит две лишние связи, так как удаление шарнира не нарушает его геометрической неизменяемости. Сопоставляя эти контуры, заключаем, что двойной шарнир уменьшает число лишних связей на единицу.

Поэтому двухшарнирный и трехшарнирный контуры будут содержать соответственно одну лишнюю связь и ни одной лишней связи. Можно доказать, что шарнир, в котором сходятся i элементов, уменьшает число лишних связей системы на $i-1$.



Контур с катковой связью содержит одну лишнюю связь, так как удаление катка (рис. б) его геометрической неизменяемости не нарушает. Следовательно, каток уменьшает число лишних связей контура на две.



Можно сформулировать безусловные признаки геометрической неизменяемости системы.

Система геометрически неизменяема, если:

1. каждый контур, входящий в ее состав, содержит не больше трех шарниров;
2. любые две ее геометрически неизменяемые части соединяются не меньше чем тремя связями, направления которых не пересекаются в одной точке (в частности, не параллельны);
3. путем последовательного удаления ее геометрически неизменяемых частей имеете с тремя связями, присоединяющими их к системе, геометрически неизменяемую систему.

Связи между частями системы называются **внутренними**. Если элемент системы не является расчетным объектом, то связи между ним и остальной частью системы назовем **внешними**. Элемент, не являющийся расчетным объектом, назовем **опорным**. Систему, не имеющую внешних связей, назовем **свободной**, а имеющую их — **прикрепленной**.

Пусть в системе: m — число лишних связей; n — число контуров; p_2 — число двойных шарниров; p_3 — число тройных шарниров; ...; p_i — число шарниров, в которых сходятся i элементов; p_k — число катковых связей.

Каждый контур может содержать в себе не больше трех лишних связей, поэтому их максимально возможное число в системе равно $3n$; каждый шарнир уменьшает число лишних связей системы на единицу меньше, чем число сходящихся в нем элементов; каждый каток уменьшает число лишних связей системы на две.

Поэтому

$$m = 3n - p_2 - 2p_3 - \dots - (i-1)p_i - 2p_k$$

Формулой можно пользоваться, убедившись предварительно, что система геометрически неизменяема.

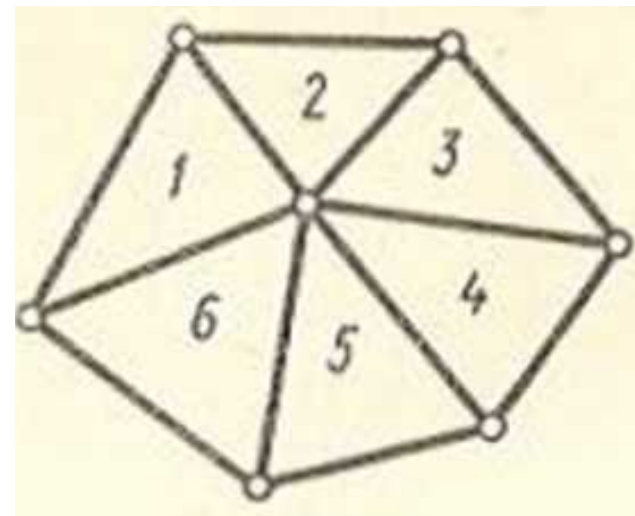
Рассмотрим примеры

Свободная система геометрически неизменяема, так как каждый контур, входящий в ее состав, содержит три шарнира

Из рис.

$$n=6, p_3=6, p_6=1.$$

$$\text{По формуле } m=3*6-2*6-5*1=1$$

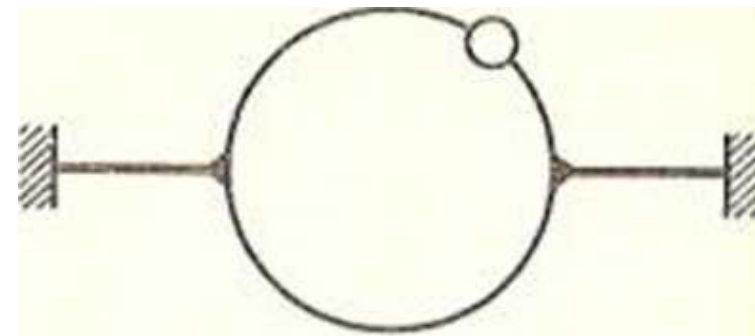
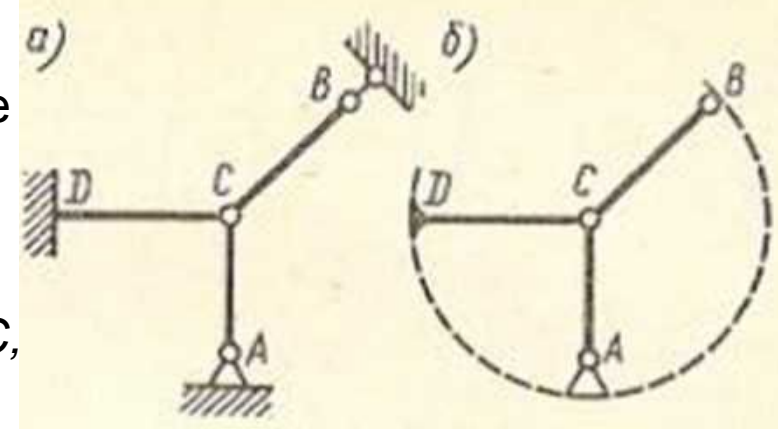


Система — прикрепленная. Чтобы воспользоваться формулой, надо представить ее как свободную, заменив опорный элемент сплошной незамкнутой линией, показанной на рис. б штрихами. Система геометрически неизменяема, так как после удаления стержня BC , присоединенного к системе тремя связями, оставшийся контур DCA — геометрически неизменяем.

Из рис.: $n=2$, $p_2=1$, $p_3=1$, $p_k=1$.

По формуле: $m=3*2-1-2*1-2*1=1$.

Определить число лишних связей достаточно простой системы можно, используя деление их на внешние и внутренние, не прибегая к формуле. Например, система на рис содержит три лишние внешние связи, так как удаление одной из двух заделок взаимной неподвижности опорного элемента и системы не нарушает. Кроме этого, в систему входит один одношарнирный контур, содержащий две лишние связи. Следовательно, на систему наложено пять лишних связей.



2. Степень статической неопределимости системы

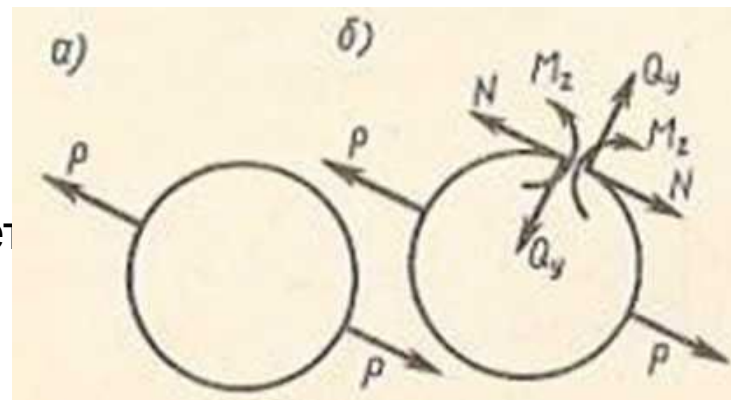
Система статически неопределима, если в любом ее сечении значения внутренних силовых факторов не могут быть найдены с помощью одних только уравнений статики.

Степенью статической неопределимости называется разность между числом уравнений, необходимых для определения значений внутренних силовых факторов в любом сечении системы, и числом уравнений статики, которое можно для этого использовать.

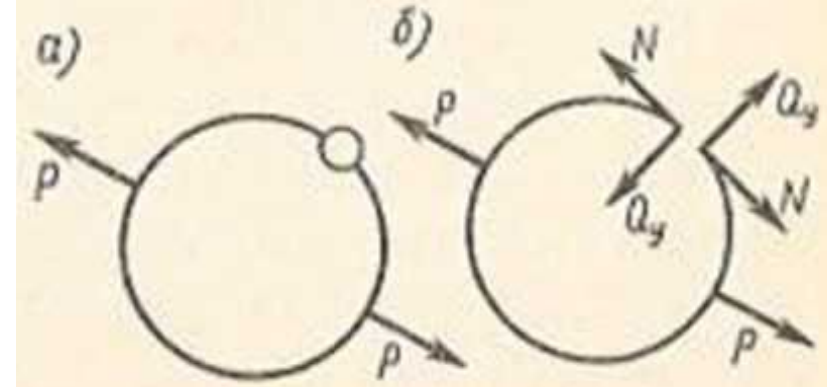
В дальнейшем степень статической неопределимости будем обозначать k . По аксиоме статики **связи можно отбрасывать, заменяя их действие на систему силами.**

Разрезав контур в произвольном сечении, мы отбрасываем три связи. Для того чтобы контур работал в тех же условиях, что и до разреза, следует заменить действие частей друг на друга тремя внутренними силовыми факторами N , Q_y и M_z ,

возникающими в общем случае в поперечном сечении рамного элемента плоской системы, направленными в силу закона действия и противодействия, как показано на рис. ,б. Для определения этих факторов ни одного уравнения статики использовать нельзя: все они обращаются в тождества, т. е. будут справедливы при любых значениях N , Q_y и M_z . Следовательно, замкнутый контур трижды статически неопределим.



Одношарнирный контур содержащий две лишние связи, по тем же соображениям будет дважды статически неопределим (в шарнире $M_z = 0$).



Приведенные сопоставления между числом лишних связей, наложенных на систему, и степенью ее статической неопределимости, можно провести для любой системы. Из этих сопоставлений вытекает, что степень статической неопределимости равна числу лишних связей, наложенных на систему. Однако усилия по некоторым лишним связям могут оказаться известными, поэтому окончательно можно утверждать, что степень статической неопределимости не больше числа лишних связей, наложенных на систему:

$$k \leq m$$

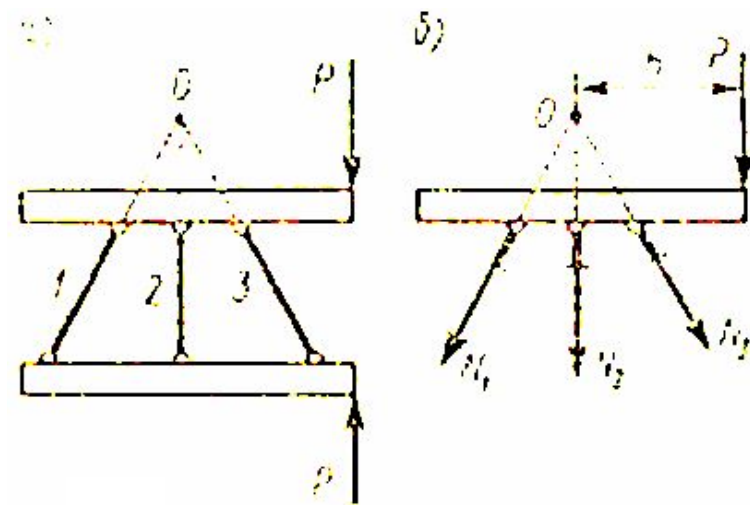
Система называется **мгновенно изменяемой**, если направления связей, соединяющих ее геометрически неизменяемые части, пересекаются в одной точке или если эти части соединяются более чем двумя шарнирами, лежащими на одной прямой.

Степень статической неопределимости мгновенно изменяемой системы будет больше числа лишних связей, наложенных на нее. Например, система (рис. а) лишних связей не содержит, но определить усилия в стержнях из уравнений статики не удастся, так как (рис. б)

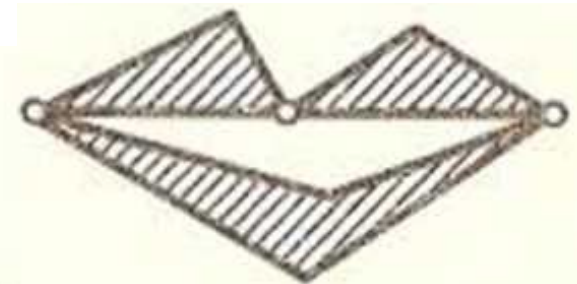
$$\sum m_o = p \cdot h \neq 0$$

То же самое можно сказать и о системах (рис. в, г). Для определения внутренних силовых факторов в мгновенно изменяемых системах, даже если они

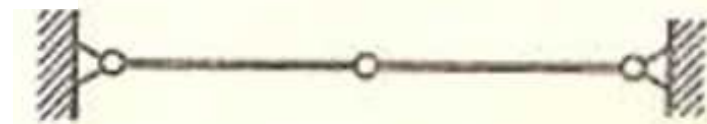
не несут лишних связей, приходится рассматривать их деформированное состояние. Решение задачи осложняется тем, что в таких системах зависимость между силами и перемещениями нелинейна. При конструировании систем следует обращать особое внимание на то, чтобы они не были мгновенно изменяемыми, так как сравнительно небольшие внешние силы могут создавать в таких системах очень большие внутренние силовые факторы.



в)



г)



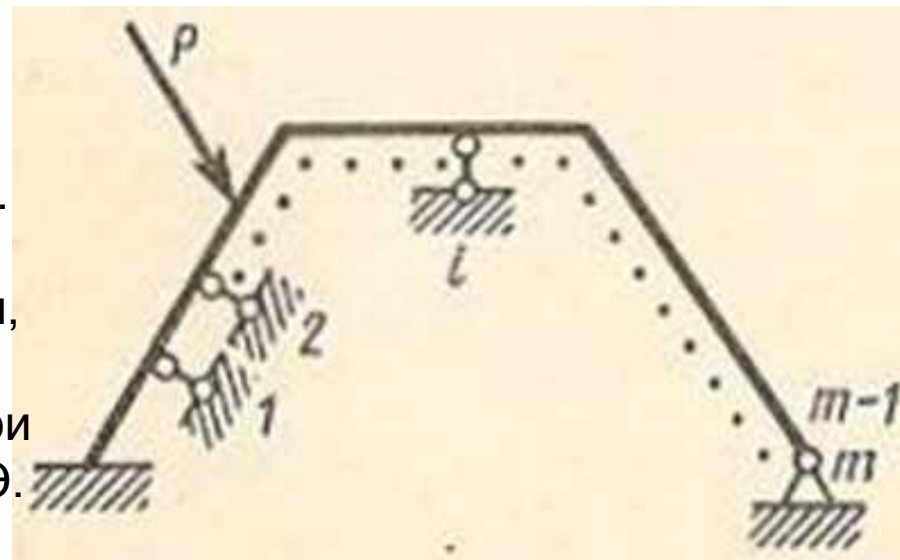
3. Эквивалентная система и канонические уравнения метода сил

Эквивалентной называется система, полученная из заданной путем удаления лишних связей и замены их действия на систему обобщенными силами, которые в методе сил обозначаются X_i и называются лишними неизвестными. Процесс определения X_i иногда называют раскрытием статической неопределимости системы.

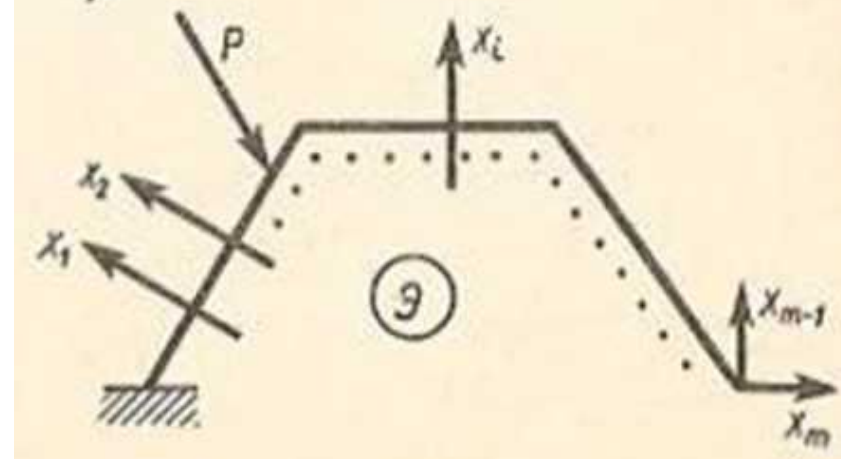
Основной системой назовем эквивалентную систему без заданных внешних факторов и лишних неизвестных.

Абсолютные и относительные обобщенные перемещения сечений в эквивалентной и основной (при ее нагружении) системах для краткости будем называть просто перемещениями. Обозначим через Δ_i — перемещение сечения по i -му направлению в заданной системе.

Пусть на заданную систему наложено m лишних связей (пунктир на рисунке обозначает неизображённые связи). Преобразуя эту систему в эквивалентную, сохраняем между ней и опорным элементом, который обычно принимают за систему отсчета, для их взаимной неподвижности, три связи. Эквивалентную систему обозначим Э.



Обозначим: δ_{ip} - перемещение сечения, в котором приложено X_i по его направлению, в основной системе при ее нагружении заданными силами (δ_{ip} — перемещение по i -му направлению в основной системе от заданных сил); δ_{iT} - перемещение по i -му направлению в основной системе от T (изменения температуры);



δ_{ij} — перемещение по i -му направлению в основной системе от единичной обобщенной силы, приложенной вместо и по направлению X_j . δ_{ij} называют единичным перемещением или податливостью. Единичные перемещения с одинаковыми индексами называют главными.

Сущность метода сил:

Эквивалентная система будет работать как заданная, если перемещения сечения, в которых располагались лишние связи по направлению этих связей в эквивалентной системе, будут равны соответствующим перемещениям в заданной системе, т. е. если

$$\delta_1 = \Delta_1, \delta_2 = \Delta_2 \dots \delta_i = \Delta_i \dots \delta_m = \Delta_m.$$

Условий эквивалентности заданной и эквивалентной систем можно написать столько, сколько лишних неизвестных.

Получаем систему m канонических (приведенных к определенному виду) уравнений

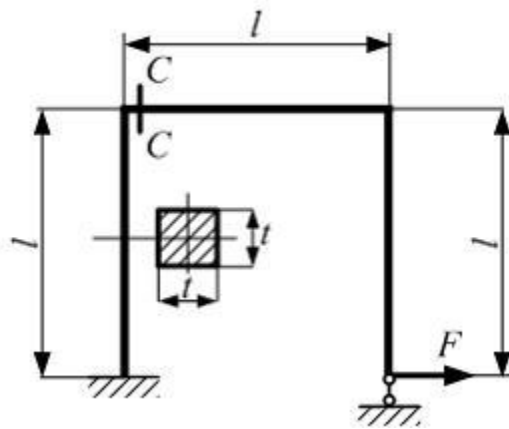
$$\delta_i = \delta_{ip} + \delta_{iT} + \sum_{j=1}^m \delta_{ij} X_j = \Delta_i; \quad i = 1, 2..m$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{1p} + \delta_{1T} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \dots + \delta_{1n} X_n = \Delta_1 \\ \delta_{2p} + \delta_{2T} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \dots + \delta_{2n} X_n = \Delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{mp} + \delta_{mT} + \delta_{m1} X_1 + \delta_{m2} X_2 + \delta_{m3} X_3 + \dots + \delta_{mn} X_n = \Delta_n \end{array} \right.$$

Расчет статически неопределимых систем с использованием данной системы (системы канонических уравнений метода сил) носит название расчета по методу сил. Этот расчет ведется в определенном порядке, который изложен в следующем примере .

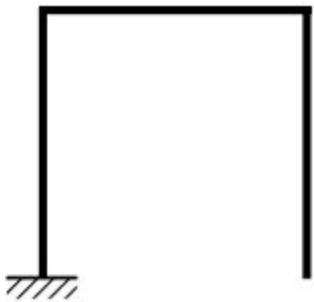
Пример



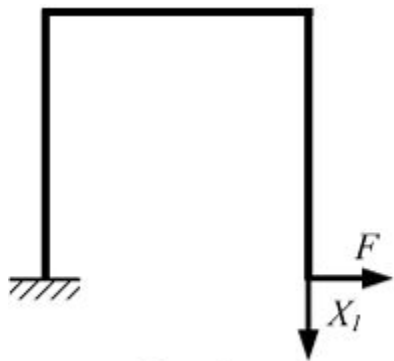
На рисунке показана рама с постоянным по контуру квадратным поперечным сечением, нагруженная силой F . Модуль упругости материала E . Определить максимальное нормальное напряжение в сечении $C-C$ рамы, вызванное изгибающим моментом.

Решение

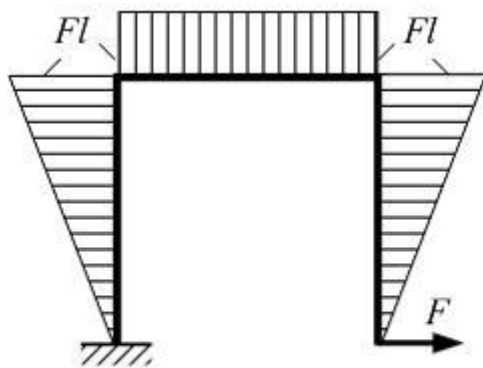
1. Отбрасываем лишнюю связь (получем основную систему)



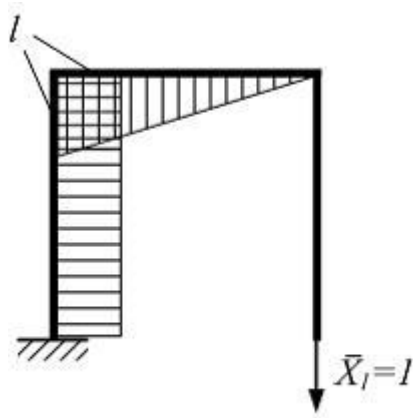
2. Заменяем действие отброшенных связей силовыми факторами



3. Строим эпюры от действия исходных сил



4. Строим эпюры от действия единичного фактора X_1



5. Записываем канонические уравнения метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0$$

6. Определяем коэффициенты уравнения по формуле Мора правилу Верещагина

Для определения δ_{11} умножаем единичный эпюр сам на себя

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l + l^2 \cdot l \right) = \frac{4l^3}{3EJ}$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{EJ} \left(-Fl^2 \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} Fl^2 \cdot l \right) = -\frac{Fl^3}{EJ}$$

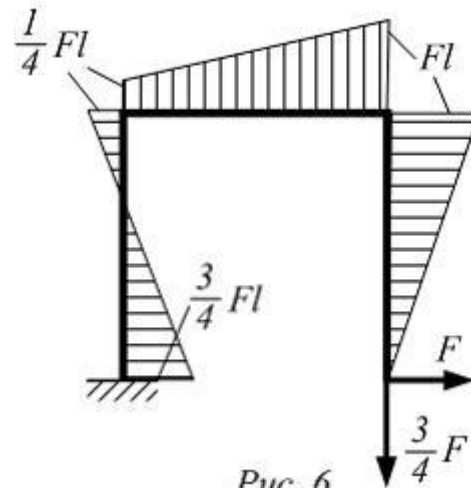
7. Подставляем и решаем

$$\frac{4l^3}{3EJ} X_1 - \frac{Fl^3}{EJ} = 0$$

$$\frac{4}{3} X_1 - F = 0$$

$$X_1 = \frac{3}{4} F$$

8. Строим эпюр с учетом найденного X_1



9. Находим напряжение в сечении С

$$M = \frac{1}{4} Fl \quad (\text{по эпюру})$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{4} Fl}{\frac{t \cdot t^3}{6}} = \frac{3}{2} \frac{Fl}{t^3}$$

4. Расчет ферм

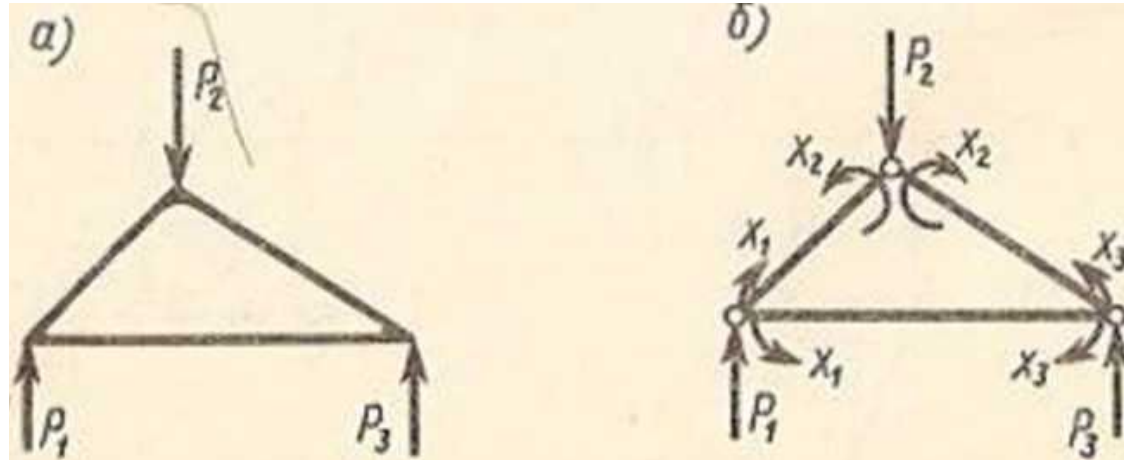
Стержни фермы с клепаными или сварными жесткими узлами работают на растяжение или сжатие как стержни соответствующей ей шарнирной фермы. Чтобы это доказать, преобразуем ферменный контур в эквивалентный, заменив жесткие узлы шарнирами.

Выпишем систему канонических уравнений

$$\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0$$

$$\delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0$$

$$\delta_{3P} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$



Основная система — шарнирная ферма, поэтому изгибающие моменты в сечениях ее стержней при нагружении внешними силами равны нулю и, следовательно

$$\delta_{1P} = \delta_{2P} = \delta_{3P} = 0$$

Система канонических уравнений становится однородной. Ее определитель никогда не равен нулю, и поэтому она может иметь единственное решение

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0.$$

Вывод: ферменный контур статически определим и замена жестких узлов шарнирами не изменяет работы его стержней.

5. Расчет смешанных систем

Система называется **смешанной или комбинированной**, если ее элементы работают на разные деформации, например одна часть элементов работает на изгиб, а другая - на растяжение или одна часть элементов работает на изгиб, а другая — на кручение. Брус лучше работает на растяжение, чем на изгиб, в том смысле, что при равенстве расчетных напряжений в элементах системы своим допускаемым (при равнопрочности системы) поперечные сечения ферменных элементов будут значительно меньше поперечных сечении рамных. Вследствие этого пренебрегать деформациями ферменных элементов от нормального усилия при расчете статически неопределимых смешанных систем нельзя, так как они будут величинами одного порядка с деформациями рамных элементов от изгибающего момента. В смешанных системах δ_{ip} и δ_{ij} должны определяться по формулам

$$\delta_{ip} = \sum_{k=1}^n \int_{S_k} \frac{M_{zp} M_{zi}}{EI_z} dS + \sum_{k=1}^m \frac{N_{pk} N_{ik} l_k}{(EA)_k};$$

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{S_k} \frac{M_{zi} M_{zj}}{EI_z} dS + \sum_{k=1}^m \frac{N_{ik} N_{ik} l_k}{(EA)_k}.$$

где n — число рамных участков в системе; m — число ферменных элементов в системе.

6. Многопролетные неразрезные балки.

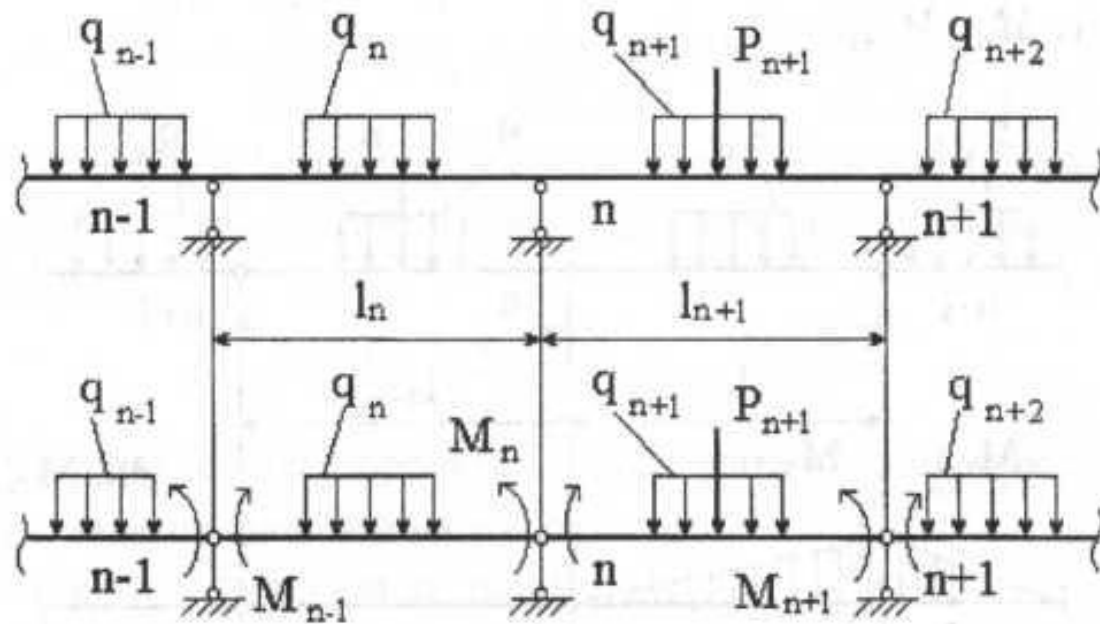
Уравнение трех моментов

Расчет многопролетных неразрезных балок осуществляется по общим правилам расчета статически неопределимых систем.

В качестве основной системы берем систему не связанных однопролетных балок, как показано на рис..

Выбор основной системы осуществлен так, чтобы заданная система после выбора основной разбилась бы, по возможности, на не связанные между собой элементы.

Тогда многие вспомогательные коэффициенты канонической системы уравнений обращаются в нуль. Поэтому в рассматриваемом случае неразрезную балку превращают в разрезную, а в качестве неизвестных принимаем опорные изгибающие моменты. Их число, если крайние опоры шарнирные, равно числу промежуточных опор.



Если крайняя опора представляет собой жесткую заделку, то в заделке добавляется ещё один изгибающий момент и дополнительный пролет, длина которого затем полагается равной нулю.

Преимущество выбранной основной системы заключается в том, что эпюры моментов от единичных сил распространяются только на два соседних пролета, которые опираются на три опоры. Поэтому в характерное каноническое уравнение войдут три момента, которые возникают на краях этих двух соседних пролетов. В первое и последнее уравнения войдут по два неизвестных.

Указанные соображения позволяют сразу выписать систему канонических уравнений для неразрезной балки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = -\delta_{1P}, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = -\delta_{2P}, \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{n-1n}X_{n-1} + \delta_{nn}X_n + \delta_{n+1n}X_{n+1} = -\delta_{nP}, \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{r-1r}X_{r-1} + \delta_{rr}X_r = -\delta_{rP}. \end{array} \right.$$

где r - число промежуточных опор балки.

Для определенности, учитывая, что X_1, X_2, \dots, X_r - изгибающие моменты, будем их обозначать M_1, M_2, \dots, M_r . Определим коэффициенты характерного уравнения

$$\delta_{nn-1}M_{n-1} + \delta_{nn}M_n + \delta_{nn+1}M_{n+1} = -\delta_{nP}$$

На рис изображен участок основной системы и эюры M_{n-1} , M_n , M_{n+1} и M_P .

Вычислим коэффициенты уравнения (по формуле Мора + правило Верещагина)

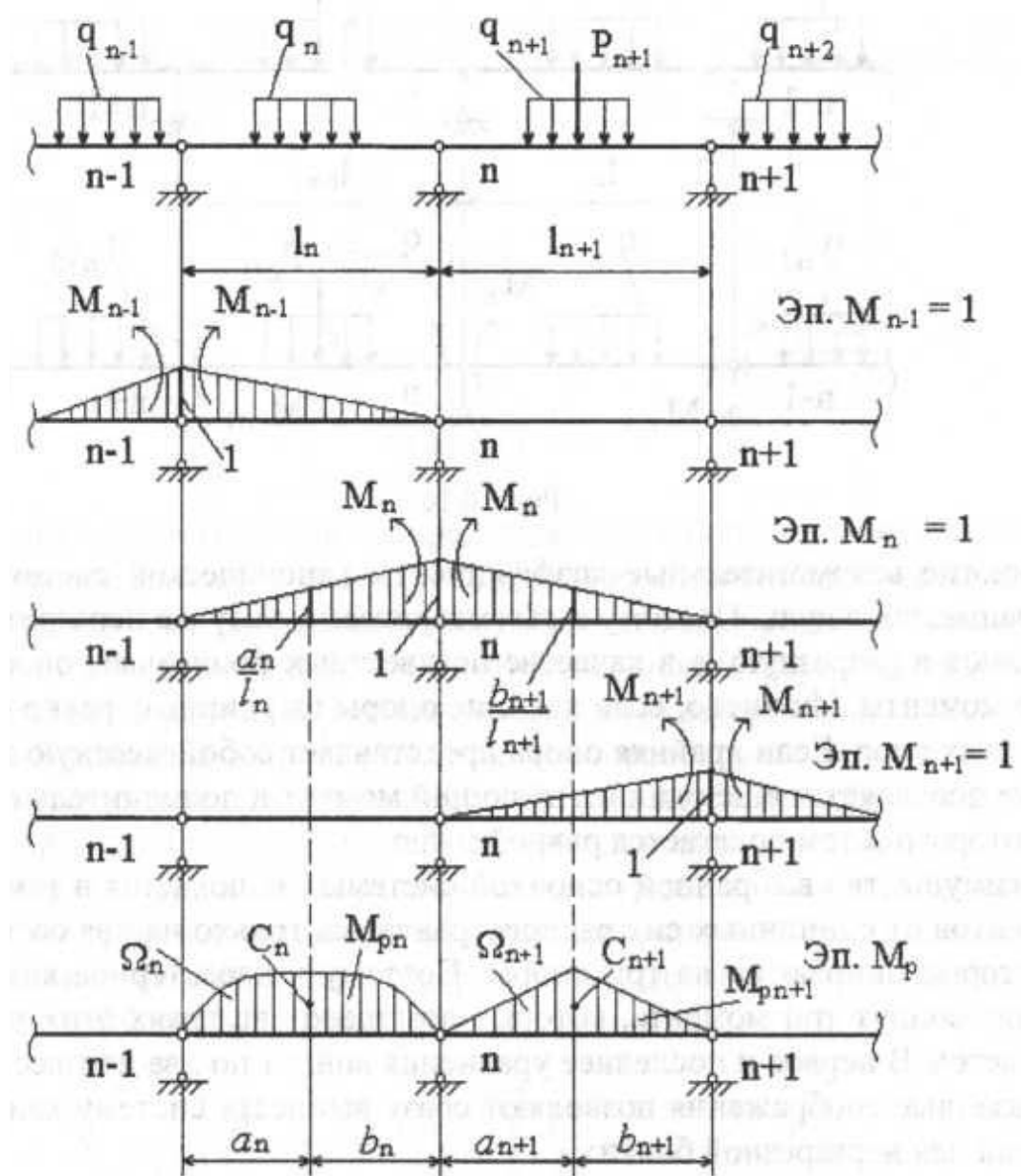
$$\delta_{m-1} = \frac{1}{EI_n} \frac{l_n}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EI_n};$$

$$\delta_{nn} = \frac{1}{EI_n} \frac{l_n}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \frac{2}{3} =$$

$$= 2 \left(\frac{l_n}{6EI_n} + \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}} \right);$$

$$\delta_{nn+1} = \frac{1}{EI_{n+1}} \frac{l_{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}};$$

$$\delta_{nP} = \frac{1}{EI_n} \frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{1}{EI_{n+1}} \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}.$$



Подставляя найденные коэффициенты в уравнение:

$$\frac{l_n}{6EI_n} M_{n-1} + 2 \left(\frac{l_n}{6EI_n} + \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}} \right) M_n + \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}} M_{n+1} = \frac{\Omega_n a_n}{EI_n l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{EI_{n+1} l_{n+1}}.$$

В уравнении Ω_n и Ω_{n+1} площади соответствующих грузовых эпюр изгибающих моментов M_p . Эпюры изгибающих моментов по длине пролета получаются сложением

$$M_{n\Sigma} = M_{pn} + M_n \frac{z}{l_n} + M_{n-1} \frac{l_n - z}{l_n},$$

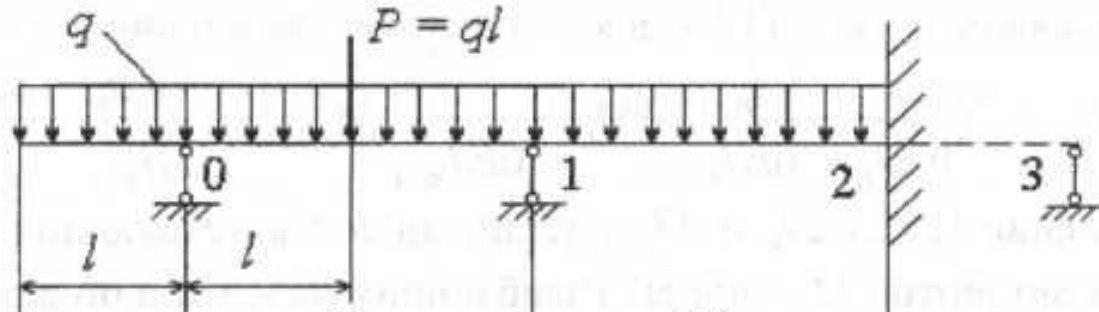
где $M_{n\Sigma}$ - суммарная эпюра в пролете l_n , M_{pn} - изгибающий момент в пролете l_n в основной системе от внешней нагрузки.

Координата z отсчитывается от опоры $n-1$.

Пример расчета неразрезной балки.

При расчете неразрезной балки, имеющей консоли, действие нагрузки на консоли на остальную часть балки заменяется сосредоточенным моментом. В заделке добавляется фиктивный пролет, длина которого затем полагается равной нулю.

Пусть жесткость балки
одинакова по ее длине $EI = \text{const}$
Тогда уравнение трех моментов
можно переписать в виде:



$$l_n M_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1})M_n + l_{n+1}M_{n+1} = -6 \left(\Omega_n \frac{a_n}{l_n} + \Omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \right)$$

В рассматриваемом случае имеем

$$2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 = -6 \left(\Omega_1 \frac{a_1}{l_1} + \Omega_2 \frac{b_2}{l_2} \right)$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 = -6 \left(\Omega_2 \frac{a_2}{l_2} + 0 \right)$$

Учитывая, что, $l_1=2l$, $l_2=2l$, $l_3=0$

получаем

$$8lM_1 + 2lM_2 = -6 \left(\Omega_1 \frac{a_1}{l_1} + \Omega_2 \frac{b_2}{l_2} \right)$$

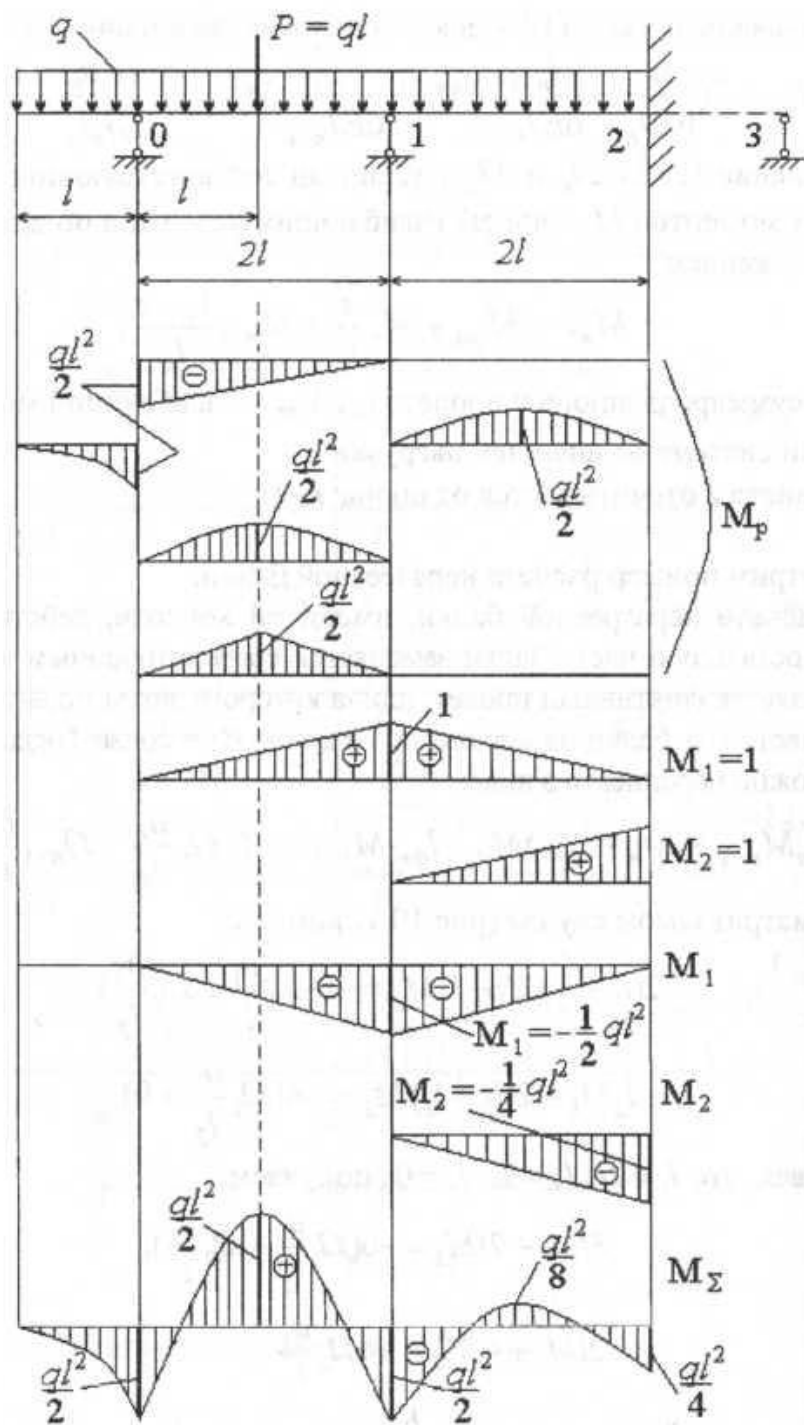
$$2lM_1 + 4lM_2 = -6 \cdot \Omega_2 \frac{a_2}{l_2}$$

Величины $B_n = \Omega_n \frac{a_n}{l_n}$ и $A_{n+1} = \Omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}$ представляют собой фиктивные реакции в опорах n от площади грузовой эпюры Ω_n слева от опоры и Ω_{n+1} справа от опоры. Поэтому их можно вычислить от каждой составляющей нагрузки отдельно, а затем суммировать.

$$6B_1 = 6\Omega_1 \frac{a_1}{l_1} = 6 \left(-\frac{ql^3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{4ql^3}{3 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{ql^2}{2} \cdot 2l \frac{1}{2} \right) =$$

$$= -ql^3 + 2ql^3 + 1,5ql^3 = 2,5ql^3;$$

$$6A_2 = 2ql^3; \quad 6B_2 = 2ql^3.$$



Подставляем в уравнение

$$8lM_1 + 2lM_2 = -4,5ql^2$$

$$2lM_1 + 4lM_2 = -2ql^2$$

Отсюда $M_1 = -\frac{1}{2}ql^2;$

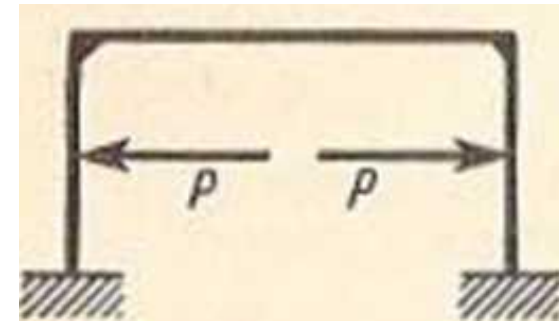
$$M_2 = -\frac{1}{4}ql^2$$

После чего, суммируя эпюры, строим эпюру M_Σ

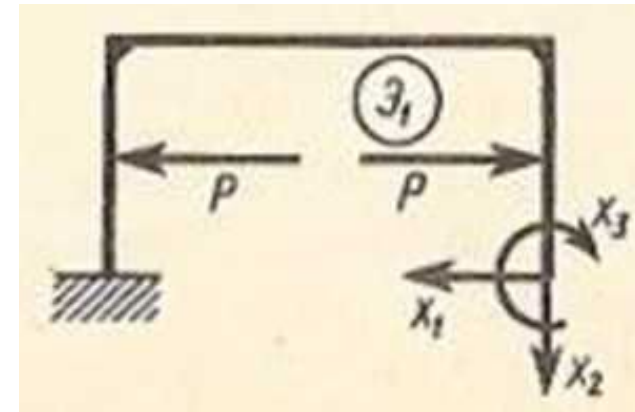
7. Использование симметрии при расчете статически неопределимых систем

Система называется прямосимметричной (симметричной), если она геометрически симметрична и внешние факторы, приложенные к ней, симметричны относительно оси геометрической симметрии.

Симметричная рама (рис. а) имеет три лишние связи.

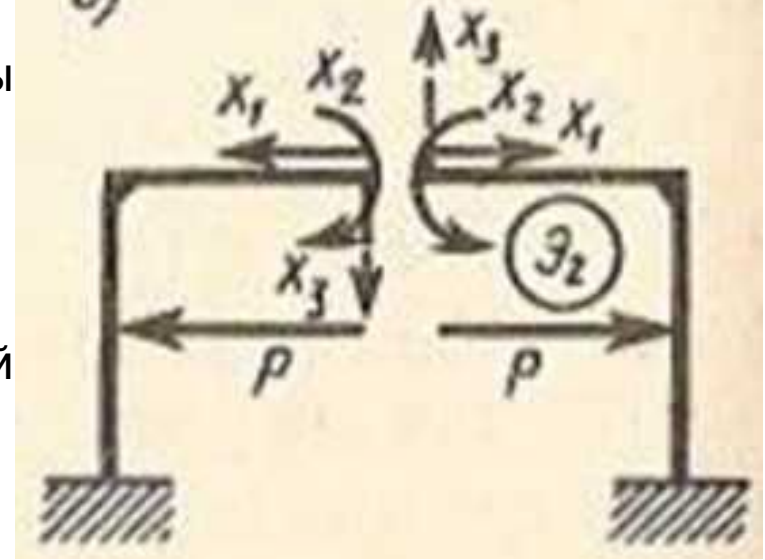


Произвольно выбранный вариант эквивалентной системы, полученный, например, отбрасыванием одной из заделок трижды статически неопределим. Для раскрытия статической неопределимости рамы в этом варианте придется составить и решить систему трех канонических уравнений :



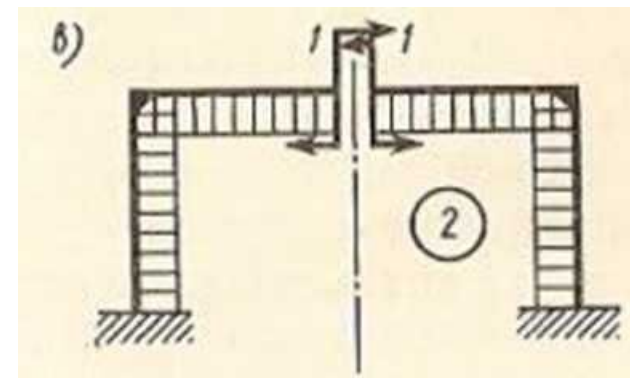
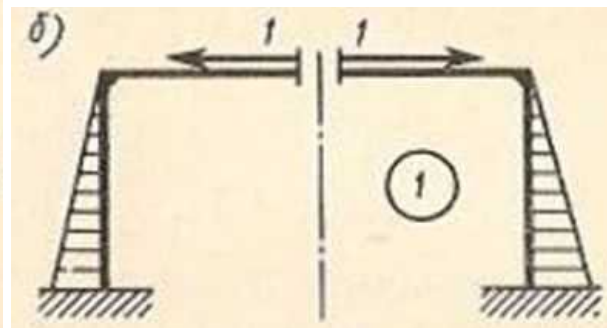
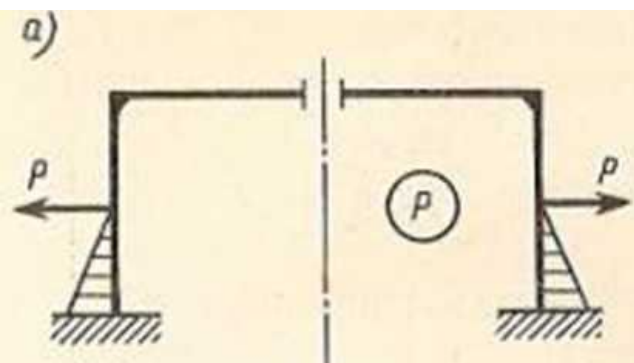
$$\begin{cases} \delta_{1p} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0 \\ \delta_{2p} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0 \\ \delta_{3p} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0 \end{cases}$$

Выберем другой вариант эквивалентной системы приняв за лишние связи в сечении на оси симметрии. Уравнения для этого варианта требуют, чтобы относительный поворот, относительное перемещение по горизонтали и относительное перемещение по вертикали левой правой сторон разрезанного сечения равнялись нулю.

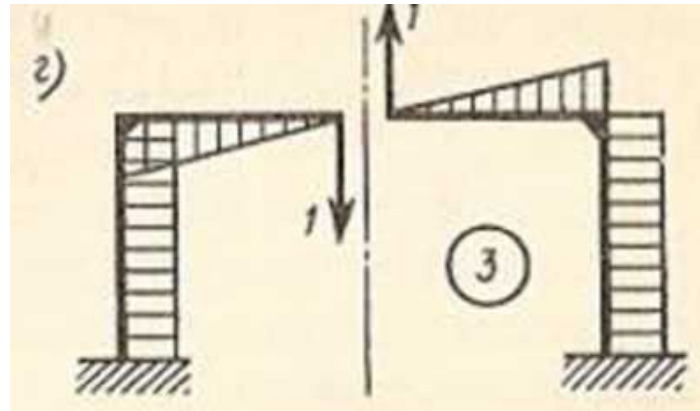


Обратно симметричными назовем силы и эпюры, которые, для того чтобы они стали симметричны, на одной из половин геометрически симметричной системы надо повернуть вокруг ее оси на 180° .

Эпюры P , 1 и 2 (рис. а, б, в), построенные на симметричном варианте основной системы от симметричных сил, симметричны,



а эпюр 3 (рис. г), построенный на этом варианте от обратно симметричных сил, — обратно симметричен.



Любое произведение этих эпюр на левой половине системы будет перемещением левой стороны разрезанного сечения, а их произведение на правой половине — перемещением его правой стороны, в одной из схем нагружения основной системы. Следовательно, сумма этих произведений даст относительное перемещение сторон разрезанного сечения в этой схеме нагружения — один из коэффициентов или свободных членов уравнений системы.

Произведение симметричного эпюра на обратно симметричный равно нулю, так как на одной из половин системы оно будет положительным, а на другой таким же по абсолютной величине, но отрицательным. Поэтому

$$\delta_{3P} = \delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

Система канонических уравнений распадается на систему двух уравнений с неизвестными X_1 , и X_2 и на уравнение с неизвестным X_3 :

$$\begin{cases} \delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0, \\ \delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0; \\ \delta_{33}X_3 = 0. \end{cases}$$

В последнем уравнении перемещение δ_{33} —главное и нулю никогда не равно, следовательно, $X_3 = 0$.

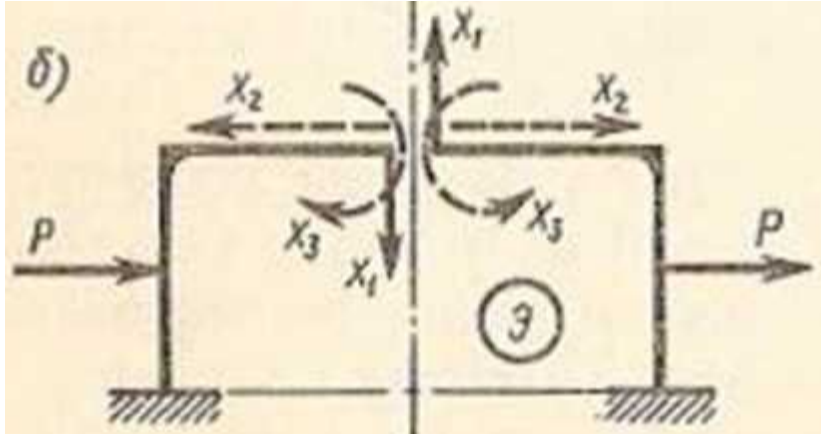
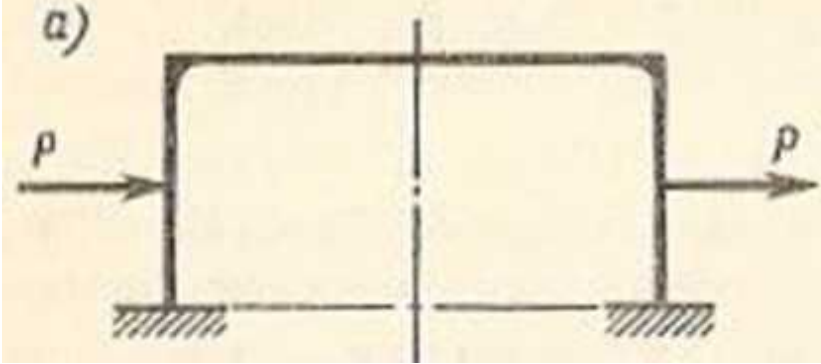
Рациональный выбор эквивалентной системы позволил упростить решение задачи при раскрытии статической неопределимости рамы методом сил, так как в таком варианте рама дважды статически неопределима и вместо системы уравнений с тремя неизвестными решается система уравнений с двумя неизвестными.

Система называется обратно симметричной, если она геометрически симметрична и внешние факторы, приложенные к ней, обратно симметричны относительно оси геометрической симметрии.

Обратносимметричная рама имеет три лишние связи.

Выбирая эквивалентную систему, примем за лишние связи в сечении, лежащем на оси геометрической симметрии. Эпюры P и 1 будут обратносимметричны, а 2 и 3 симметричны и поэтому

$$\delta_{2P} = \delta_{3P} = \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0$$



Система уравнений распадается на уравнение с неизвестным X_1 , и на систему однородных уравнений с неизвестными X_2 и X_3 :

$$\begin{cases} \delta_{1P} + \delta_{11}X_1 = 0; \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0. \end{cases}$$

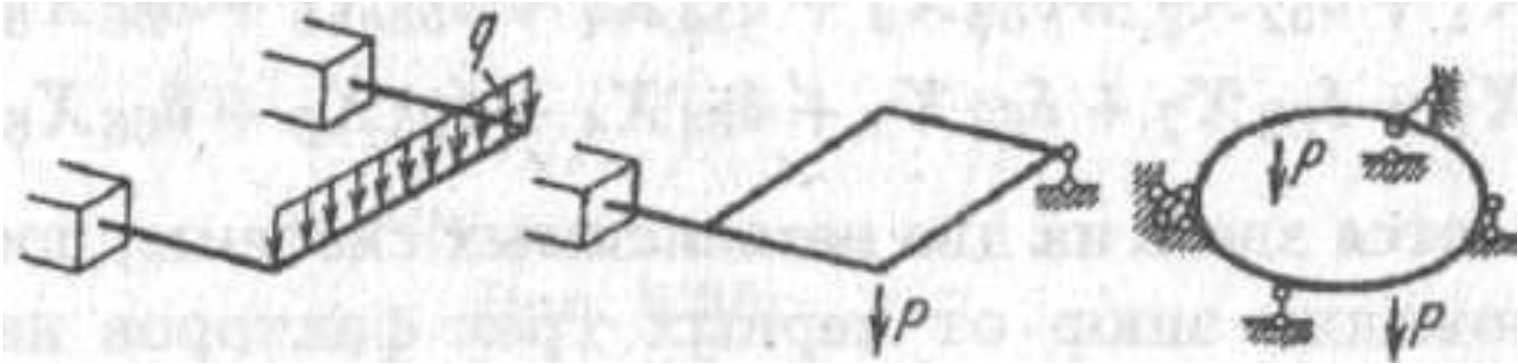
Определитель системы нулю никогда не равен, так как $\delta_{22} \cdot \delta_{33} \neq \delta_{32}$, поэтому она может иметь для неизвестных только единственное решение $X_2 = X_3 = 0$.

Следовательно, в варианте эквивалентной системы Э рама один раз статически неопределима и при раскрытии ее статической неопределимости придется решать уравнение с одним неизвестным.

1. В симметричных системах в сечениях, лежащих на оси симметрии, равны нулю обратносимметричные, а в обратносимметричных системах в сечениях, лежащих на оси геометрической симметрии, равны нулю симметричные внутренние силовые факторы.
2. Преобразуя статически неопределимые симметричные и обратносимметричные системы в эквивалентные, за лишние следует принимать либо связи в сечениях, лежащих на оси геометрической симметрии, либо симметричные связи в симметричных элементах. Такой выбор эквивалентной системы упростит расчет.
3. Лишние неизвестные, равные нулю из соображений прямой или обратной симметрии, изображать на эквивалентной системе не следует, выписывая систему канонических уравнений в соответствии со степенью ее статической неопределимости.

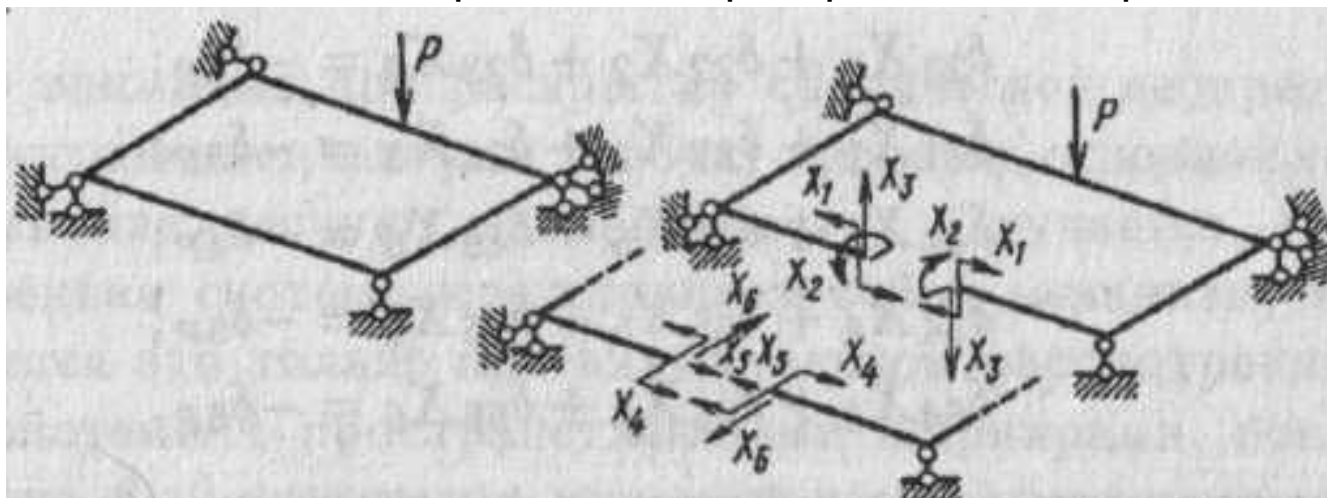
7. Плоскопространственные и пространственные системы

Плоскопространственными называются системы, плоские в геометрическом отношении, но нагруженные силовыми факторами, перпендикулярными плоскости рамы. Например



Особенностью этих систем является то, что во всех поперечных сечениях внутренние силовые факторы, лежащие в плоскости рамы, равны нулю. Доказывается это так же, как и при рассмотрении свойств с учетом прямой и косой симметрии.

Положим, имеется некоторая плоскопространственная рама



Разрезаем эту раму в произвольном сечении, превращая ее в статически определимую. Обозначим через X_1 , X_2 , X_3 силовые факторы, плоскость действия которых перпендикулярна плоскости рамы. Это - изгибающий и крутящий моменты и вертикальная поперечная сила. Остальные три силовых фактора в сечении обозначим через X_4 , X_5 , X_6 . На рис. эти силовые факторы, возникающие в плоскости рамы, вынесены для ясности в сторону.

Система канонических уравнений

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{15}X_5 + \delta_{16}X_6 = -\delta_{1P}; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{25}X_5 + \delta_{26}X_6 = -\delta_{2P}; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{35}X_5 + \delta_{36}X_6 = -\delta_{3P}; \\ \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \delta_{46}X_6 = -\delta_{4P}; \\ \delta_{51}X_1 + \delta_{52}X_2 + \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \delta_{56}X_6 = -\delta_{5P}; \\ \delta_{61}X_1 + \delta_{62}X_2 + \delta_{63}X_3 + \delta_{64}X_4 + \delta_{65}X_5 + \delta_{66}X_6 = -\delta_{6P}. \end{cases}$$

Система канонических уравнений распадается здесь на две независимых системы, поскольку при перемножении эпюр от первых трех факторов на эпюры от трех последних получим всегда нуль:

$$\delta_{14} = \delta_{15} = \delta_{16} = \delta_{24} = \delta_{25} = \dots = 0$$

При этом, предполагаем, что одна из главных осей сечения расположена в плоскости рамы.

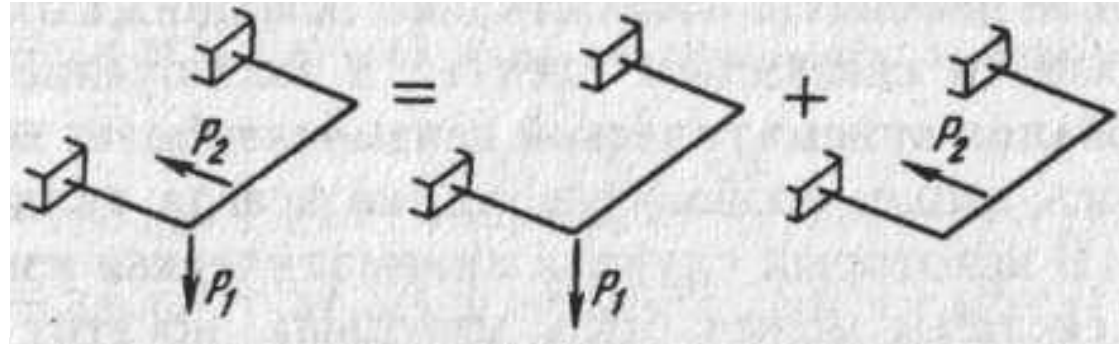
Таким образом, получаем

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = -\delta_{1p}; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = -\delta_{2p}; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = -\delta_{3p}; \\ \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \delta_{46}X_6 = -\delta_{4p}; \\ \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \delta_{56}X_6 = -\delta_{5p}; \\ \delta_{64}X_4 + \delta_{65}X_5 + \delta_{66}X_6 = -\delta_{6p}. \end{cases}$$

Если внешние силы действуют в плоскости рамы, т.е. если рама является плоской в обычном понимании, то обращаются в нуль δ_{1p} , δ_{2p} и δ_{3p} , и внутренние силовые факторы X_1 , X_2 , X_3 равны нулю. Это значит, что для плоской рамы возникают только внутренние факторы, действующие в ее плоскости.

Если же внешняя нагрузка перпендикулярна плоскости рамы, то равны нулю δ_{4p} , δ_{5p} и δ_{6p} . Тогда равны нулю и X_4 , X_5 , X_6 . В заданной для расчета раме, как видим, сохраняются внутренние силовые факторы, плоскости действия которых перпендикулярны к плоскости рамы.

При смешанной нагрузке, действующей на плоскую раму, всегда имеется возможность разложить силы по плоскостям и рассмотреть отдельно плоскую и плоскопространственную системы.



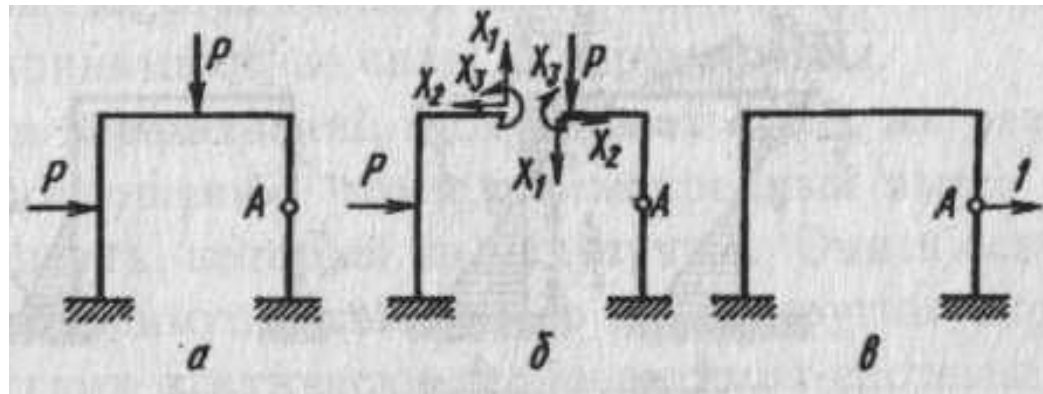
Внутренние силовые факторы определяют в дальнейшем как результат наложения полученных решений.

Для пространственных систем задача раскрытия статической неопределенности выглядит, как правило, более громоздкой, чем для плоских систем. Однако канонические уравнения метода сил остаются теми же, и их коэффициенты определяют при помощи тех же приемов.

8. Определение перемещений в статически неопределимых системах

В любой системе перемещение определяется как результат перемножения эпюры моментов от внешних сил на эпюру моментов от единичной силы, приложенной в точке, перемещение которой надо найти. В статически неопределимых системах, очевидно, для построения эпюры моментов от внешних сил нужно раскрыть статическую неопределимость и построить суммарную эпюру так, как это уже многократно делалось в рассмотренных ранее примерах. Когда к такой системе приложена единичная сила, снова возникает вопрос о раскрытии статической неопределимости. Таким образом, получается, что для определения перемещения в статически неопределимых системах нужно дважды раскрывать статическую неопределимость.

Возникающие трудности, однако, легко устраняются. Положим, дана некоторая статически неопределимая система и требуется определить перемещение, например, точки A .



Рассмотрим некоторую основную систему и приложим к ней заданные силы и неизвестные силовые факторы X_1 , X_2 , X_3 (рис. б). После того как статическая неопределимость раскрыта и неизвестные найдены, рама, показанная на рис. 6.45, б, ничем не отличается от заданной. В частности, и перемещения всех ее точек будут точно такими же, как и у заданной. Поэтому можно рассматривать силы X_1 , X_2 , X_3 как заданные. Эюра моментов от сил P , X_1 , X_2 и X_3 представляет собой эюру моментов в статически неопределимой раме. Следовательно, сначала необходимо раскрыть статическую неопределимость и построить суммарную эюру моментов. Вид этой эюры, понятно, не зависит от выбора основной системы. Далее, освобождаем систему от внешних сил, в том числе и от сил X_1 , X_2 и X_3 , и прикладываем единичную силу к статически определимой раме (рис. в).

Полученную единичную эюру перемножаем с суммарной эюрой внешних заданных сил. На практике удобнее умножить единичную эюру отдельно на эюры от заданных сил и от силовых факторов X_1 , X_2 , X_3 , а затем полученные результаты алгебраически сложить. Таким образом определяется искомое перемещение. Вторично раскрывать статическую неопределимость не нужно.