



СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. Часть I

**МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ
В ДЕФОРМИРУЕМЫХ
СИСТЕМАХ**

Силловые факторы – реакции связей ↗ внешних (опорные реакции)
 ↘ внутренних ↗ между дисками

В сечениях элементов
 (внутренние силовые факторы)

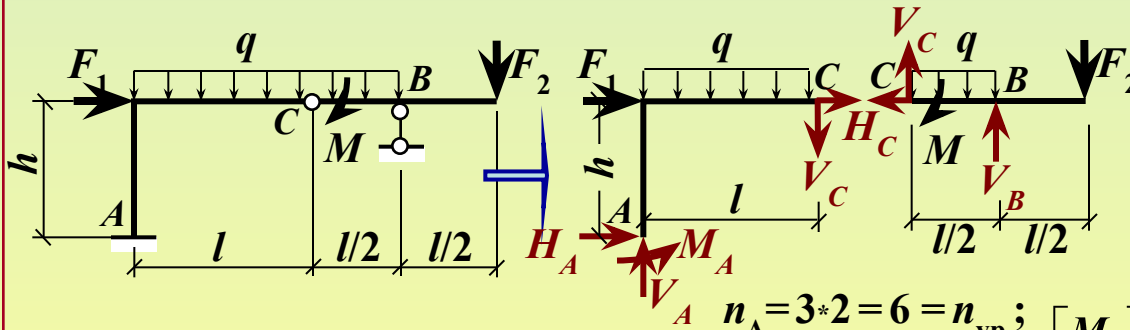
Методы определения силовых факторов ↗ статический
 ↗ кинематический
 ↘ энергетический

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность статического метода – непосредственное использование уравнений равновесия системы в целом и/или её частей.

Уравнения равновесия в случае линейно деформируемой системы: $A \cdot S + B_F = 0$

↗ дифференциальные уравнения для бесконечно малого элемента
 ↘ линейные алгебраические уравнения для системы элементов конечных размеров (дискретной системы)



S – вектор искомых усилий;
 A – матрица коэффициентов при неизвестных S в уравнениях равновесия;
 B_F – вектор «грузовых» членов уравнений равновесия (от заданных нагрузок).

$n_{\Delta} = 3 \cdot 2 = 6 = n_{ур}$;
 $n_c = n_s = 6$
 Вектор искомых реакций связей: $S =$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ V_A \\ H_A \\ V_B \\ V_C \\ H_C \end{bmatrix}$$

Для системы в целом:
 – число искомых усилий $n_S = n_c$;
 – количество уравнений $n_{ур} = n_{\Delta}$.
 В случае статически определимой системы ($W=0$) $n_{\Delta} = n_c \Rightarrow n_{ур} = n_S$

Силловые факторы – реакции связей ↗ внешних (опорные реакции)
 ↘ внутренних ↗ между дисками

В сечениях элементов
 (внутренние силовые факторы)

Методы определения
 силовых факторов

- ↗ статический
- кинематический
- ↘ энергетический

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность статического метода – непосредственное использование уравнений равновесия системы в целом и/или её частей.

Уравнения равновесия в случае линейно деформируемой системы: $A \cdot S + B_F = 0$

- ↗ дифференциальные уравнения для бесконечно малого элемента
- ↘ линейные алгебраические уравнения для системы элементов конечных размеров (дискретной системы)

Уравнения равновесия:

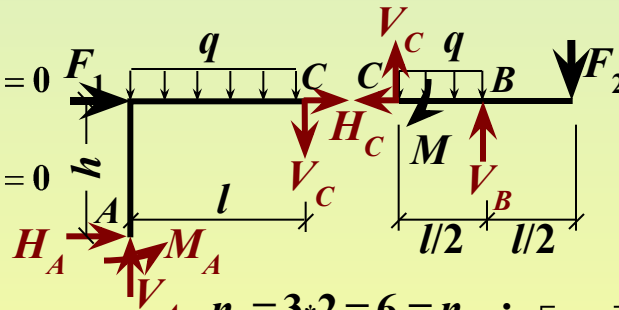
$$\sum M_A^{(AC)} = 0 \quad \sum V_C^{(AC)} = 0$$

Уравнения равновесия:

$$\sum H_A^{(AC)} = 0 \quad \sum V_C^{(AC)} = 0$$

$$\sum H_B^{(CB)} = 0 \quad \sum V_C^{(CB)} = 0$$

$$\sum x^{(CB)} = 0$$



$n_{\Delta} = 3 \cdot 2 = 6 = n_{ур}$;
 $n_c = n_s = 6$
 Вектор искомых реакций связей: $S =$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ V_A \\ H_A \\ V_B \\ V_C \\ H_C \end{bmatrix}$$

- S – вектор искомых усилий;
- A – матрица коэффициентов при неизвестных S в уравнениях равновесия;
- B_F – вектор «грузовых» членов уравнений равновесия (от заданных нагрузок).

Для системы в целом:

- число искомых усилий $n_S = n_c$;
 - количество уравнений $n_{ур} = n_{\Delta}$.
- В случае статически определимой системы ($W=0$) $n_{\Delta} = n_c \Rightarrow n_{ур} = n_S$

Силловые факторы – реакции связей ↗ внешних (опорные реакции)
 ↘ внутренних ↗ между дисками

В сечениях элементов
 (внутренние силовые факторы)

Методы определения
 силовых факторов

- ↗ статический
- кинематический
- ↘ энергетический

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность статического метода – непосредственное использование уравнений равновесия системы в целом и/или её частей.

Уравнения равновесия в случае линейно деформируемой системы: $A \cdot S + B_F = 0$

- ↗ дифференциальные уравнения для бесконечно малого элемента
- ↘ линейные алгебраические уравнения для системы элементов конечных размеров (дискретной системы)

Уравнения равновесия:
 $Det(A) \neq 0$
 Необходимое и достаточное статическое условие геометрической неизменяемости системы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -l & -h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & l/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

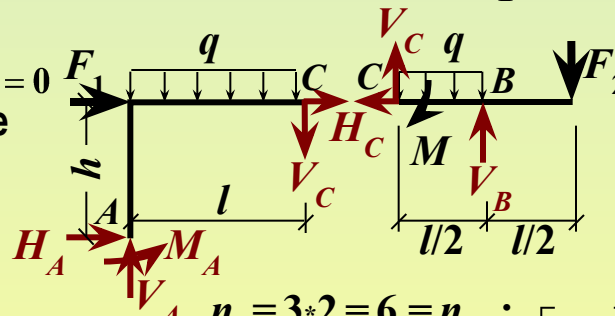
$$B_F = \begin{bmatrix} -F_1 h - ql^2/2 \\ -ql \\ F_1 \\ M - F_2 l - ql^2/8 \\ -F_2 - ql/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$n_{\Delta} = 3 \cdot 2 = 6 = n_{ур}$;
 $n_c = n_S = 6$

Вектор искомых реакций связей: $S =$

$$S = -A^{-1} B_F$$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ V_A \\ H_A \\ V_B \\ V_C \\ H_C \end{bmatrix}$$



- S – вектор искомых усилий;
- A – матрица коэффициентов при неизвестных S в уравнениях равновесия;
- B_F – вектор «грузовых» членов уравнений равновесия (от заданных нагрузок).

Для системы в целом:

- число искомых усилий $n_S = n_c$;
 - количество уравнений $n_{ур} = n_{\Delta}$.
- В случае статически определимой системы ($W=0$) $n_{\Delta} = n_c \Leftrightarrow n_{ур} = n_S$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность статического метода – непосредственное использование уравнений равновесия системы в целом и/или её частей.

Уравнения равновесия в случае линейно деформируемой системы: $A \cdot S + B_F = 0$

линейные алгебраические уравнения для системы элементов конечных размеров (дискретной системы)

Универсальная процедура формирования системы уравнений равновесия (концепция конечных элементов)

S – вектор искомых усилий;
 A – матрица коэффициентов при неизвестных S в уравнениях равновесия;
 B_F – вектор «грузовых» членов уравнений равновесия (от заданных нагрузок).

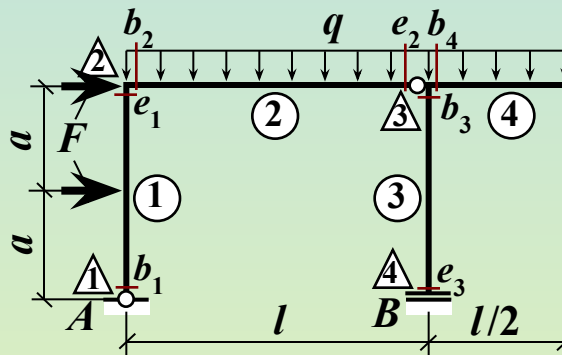
1. Разделение системы на *элементы* и *узлы* сечениями по концам стержневых элементов (концевыми сечениями).
2. Запись уравнений:
 - **1-я группа** – уравнения равновесия *элементов* в локальных (собственных) осях координат – стандартная процедура;
 - **2-я группа** – уравнения равновесия *узлов* (включая опорные) в общей (глобальной) системе координат;
 - **3-я группа** – статические характеристики связей в узлах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Универсальная процедура формирования системы уравнений равновесия $A \cdot S + B_F = 0$ (концепция конечных элементов)

1. Разделение системы на элементы и узлы сечениями по концам стержневых элементов (концевыми сечениями).
2. Запись уравнений:
 - 1-я группа – уравнения равновесия элементов в локальных (собственных) осях координат – стандартная процедура;
 - 2-я группа – уравнения равновесия узлов (включая опорные) в общей (глобальной) системе координат;
 - 3-я группа – статические характеристики связей в узлах.

Пример



Уравнения 1-й группы:

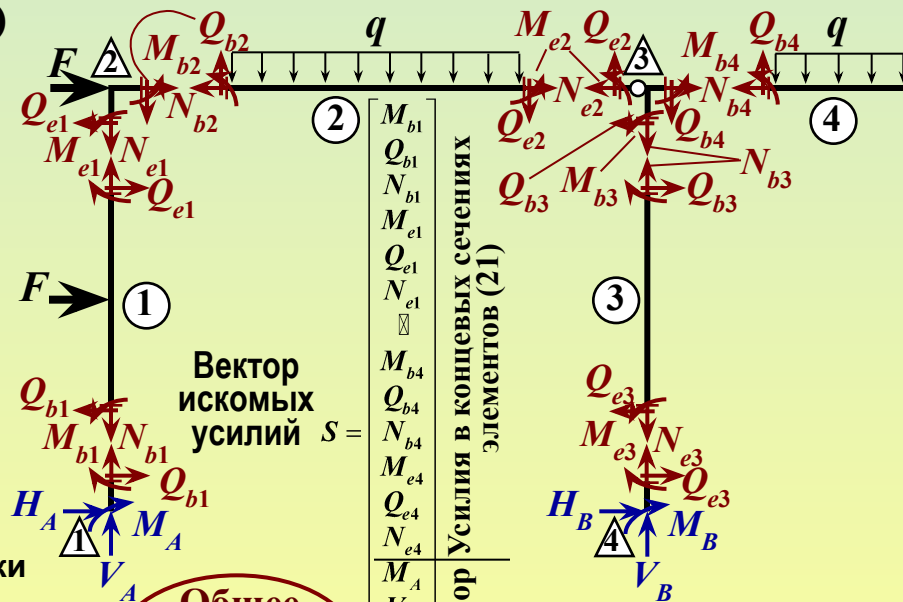
$$\begin{cases} \sum m_{bj}^{(j)} = 0 \\ \sum x_j^{(j)} = 0 \\ \sum y_j^{(j)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{bj} - M_{ej} + Q_{ej} \cdot l_j + M_{bj}^{(Fj)} = 0 \\ -N_{bj} + N_{ej} + X^{(Fj)} = 0 \\ Q_{bj} - Q_{ej} + Y^{(Fj)} = 0 \end{cases}$$

$j = 1, 2, 3, 4$
Количество уравнений 1-й группы – 12

Уравнения 2-й группы:

$$\begin{cases} \sum m_t^{(t)} = 0 & t = 1, 2, 3, 4 \\ \sum x^{(t)} = 0 & \text{Количество уравнений} \\ \sum y^{(t)} = 0 & \text{2-й группы – 12} \end{cases}$$



Общее число уравнений 27
 $n_{ур} = n_S$

Усилия в концевых сечениях элементов (21)
Реакции опор (6)

Уравнения 3-й группы (3):

$$\begin{cases} M_A = 0 \\ H_B = 0 \\ M_{e2} = 0 \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В случае *статически неопределимой* системы

$$W < 0 \quad \longrightarrow \quad n_{\Delta} < n_c \quad \longrightarrow \quad n_{yp} < n_S$$

Недостающие уравнения в количестве $n_c - n_{\Delta} = n_{л.с.}$ – геометрические:

$A_D * \Delta + D = 0$ – условия совместности перемещений
(например, описание перемещений по направлениям лишних связей)

Объединённая система уравнений:
$$\left[\begin{array}{l} A^* S + B_F = 0 \\ A_D^* \Delta + D = 0 \end{array} \right]$$

Из физических зависимостей (закон Гука и др.):
 $\Delta = \Delta(S)$ – выражения перемещений через усилия

Разрешающие уравнения в усилиях: $A_0^* S + B_0 = 0$

Необходимое и достаточное аналитическое условие
геометрической неизменяемости системы: $Det(A_0) \neq 0$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) КИНЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В основе метода – принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)*:

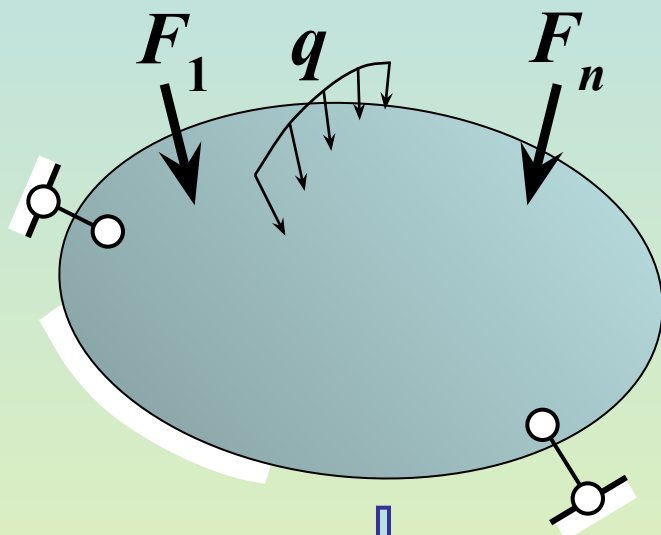
если механическая система находится в равновесии, то сумма работ внешних сил, приложенных к системе, и соответствующих им внутренних сил на возможных (виртуальных) перемещениях равна нулю:

$$W_{ext} + W_{int} = 0$$

*J.L. Lagrange (1788)

Возможные (виртуальные) перемещения –

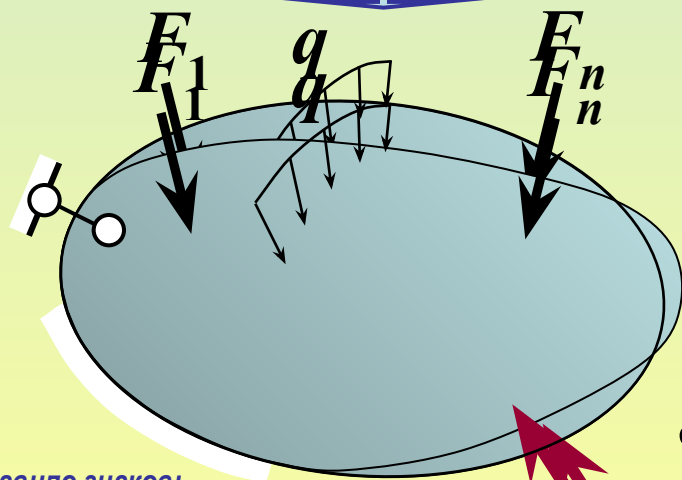
- а) **бесконечно малые** (для *линейно деформируемых систем* – конечные, но малые в сравнении с габаритами системы);
- б) **не противоречащие условиям совместности деформаций (перемещений) и кинематическим граничным условиям (условиям закрепления)**;
- в) **отсчитываемые от исследуемого положения равновесия.**



$F_1 = \alpha_1 F, \dots, F_n = \alpha_n F, q = \xi F$
 F – обобщённая нагрузка (параметр группы *активных внешних сил*)

Обязательная процедура – выявление подлежащего определению силового фактора S (реакции связи):
 связь удаляется, её реакция S переходит в категорию *внешних сил*.

Системе с удалённой связью, сохраняющей равновесие после приложения реакции S , задаётся *возможное (виртуальное) перемещение*.



Возможная работа внешних сил W_{ext} складывается из работ нагрузки и реакции связи S : $W_{ext} = W_F + W_S$,

где $W_F = F * \delta_F$, $W_S = S * \delta_S$,

δ_F – обобщённое (групповое) перемещение, соответствующее обобщённой нагрузке F ;
 δ_S – перемещение по направлению удалённой связи (по направлению реакции S).

Правило знаков:

перемещения δ_F и δ_S положительные, если совпадают по направлению соответственно с F и S (возможная работа F на δ_F или S на δ_S положительная).

Алгоритм определения реакции связи кинематическим методом

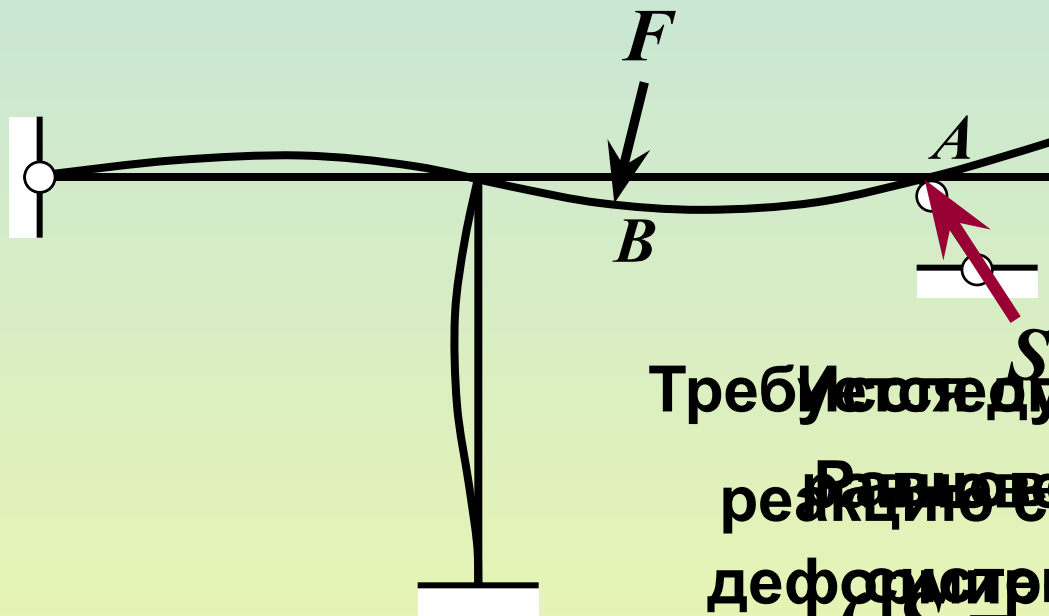
1. В системе, находящейся в равновесном деформированном состоянии при заданной нагрузке, удаляется связь, реакцию которой S требуется определить. Взамен удалённой связи прикладывается её реакция S , обеспечивающая сохранение неизменным состояния равновесия системы.
2. Системе с удалённой связью, находящейся по-прежнему в равновесном деформированном состоянии при действующей нагрузке и реакции S , задаётся возможное (виртуальное) перемещение.
3. Определяются (с точностью до общего неопределённого множителя δ_0) перемещения δ_F и δ_S – соответственно по направлениям заданной нагрузки F и искомой реакции S .
4. Из уравнения возможных работ $W_{ext} + W_{int} = 0$ определяется искомый силовой фактор S (реакция связи):

$$S = - \frac{F \cdot \delta_F + W_{int}}{\delta_S}$$

Алгоритм определения реакции связи кинематическим методом

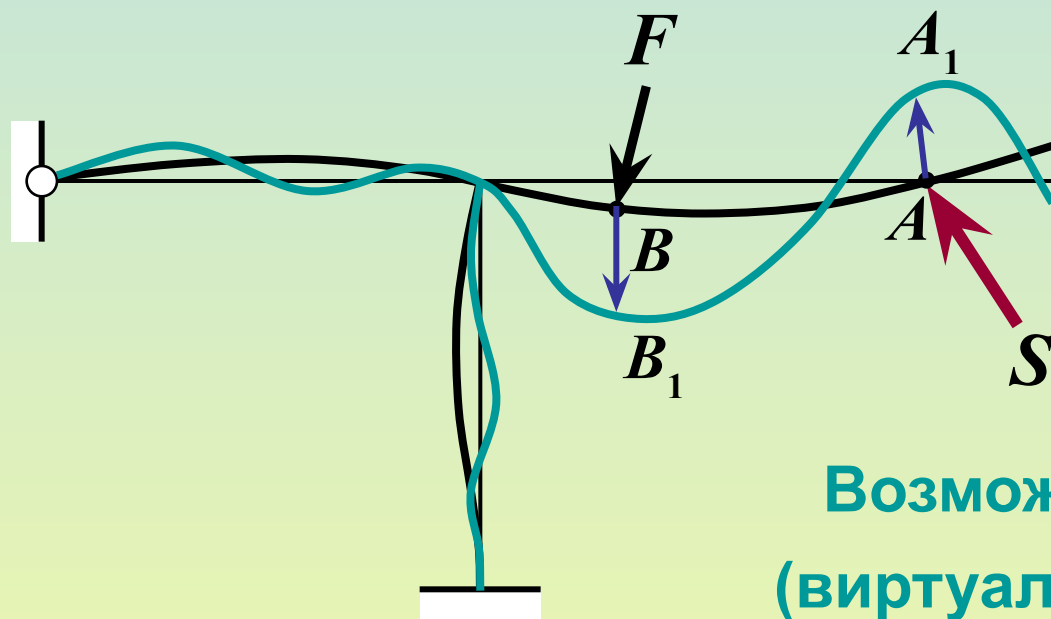
1. В системе, находящейся в равновесном деформированном состоянии при заданной нагрузке, удаляется связь, реакцию которой S требуется определить. Взамен удалённой связи прикладывается её реакция S , обеспечивающая сохранение неизменным состояния равновесия системы.
2. Системе с удалённой связью, находящейся по-прежнему в равновесном деформированном состоянии при действующей нагрузке и реакции S , задаётся возможное (виртуальное) перемещение.
3. Определяются (с точностью до общего неопределённого множителя δ_0) перемещения δ_F и δ_S – соответственно по направлениям заданной нагрузки F и искомой реакции S .
4. Из уравнения возможных работ $W_{ext} + W_{int} = 0$ определяется искомый силовой фактор S (реакция связи):

$$S = - \frac{F \cdot \delta_F + W_{int}}{\delta_S}$$

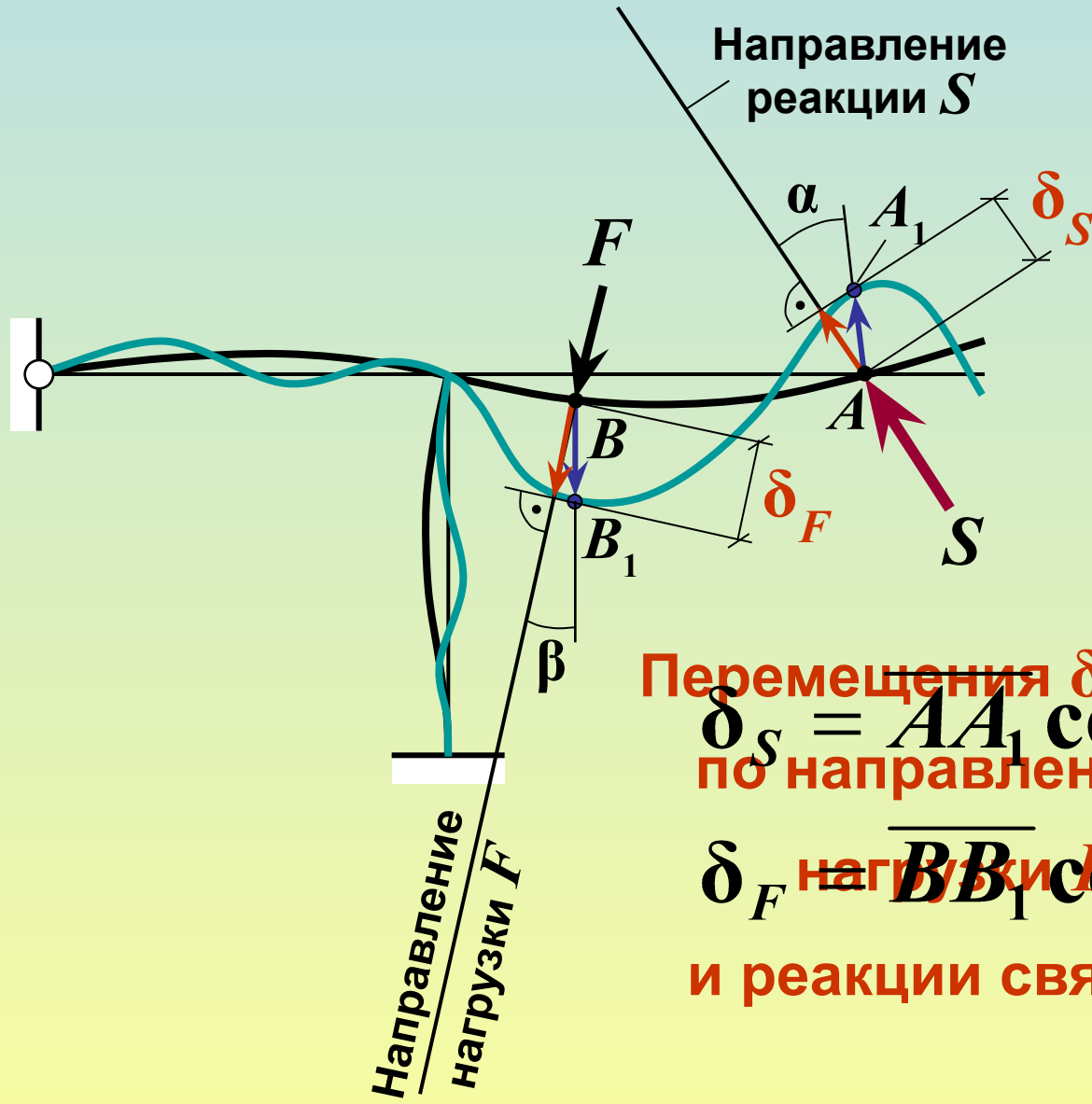


Требуется определить
 реакцию связи R_A
 деформированное
 состояние системы
 ($S \equiv R_A$)

Примечание: F следует рассматривать как модель
 обобщённой (произвольной) нагрузки



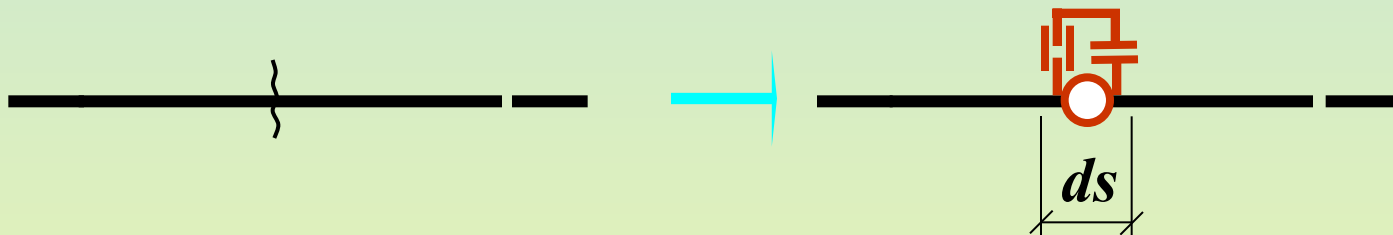
Возможные
(виртуальные)
перемещения



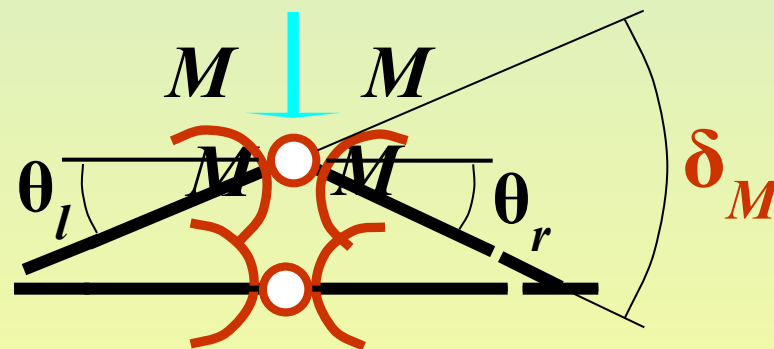
Удаление внутренних связей.

Смысл перемещения δ_S

1. Удаление **внутренней угловой связи** для определения **изгибающего момента** в сечении ($S \equiv M$)



$\delta_S = \delta_M = \theta_l + \theta_r$ —
 Возможная работа реакции
 угла связи M относительно
 (относительно виртуального)
 поворота перемещение
 бесконечно близко
 слева и справа от
 введённого шарнира

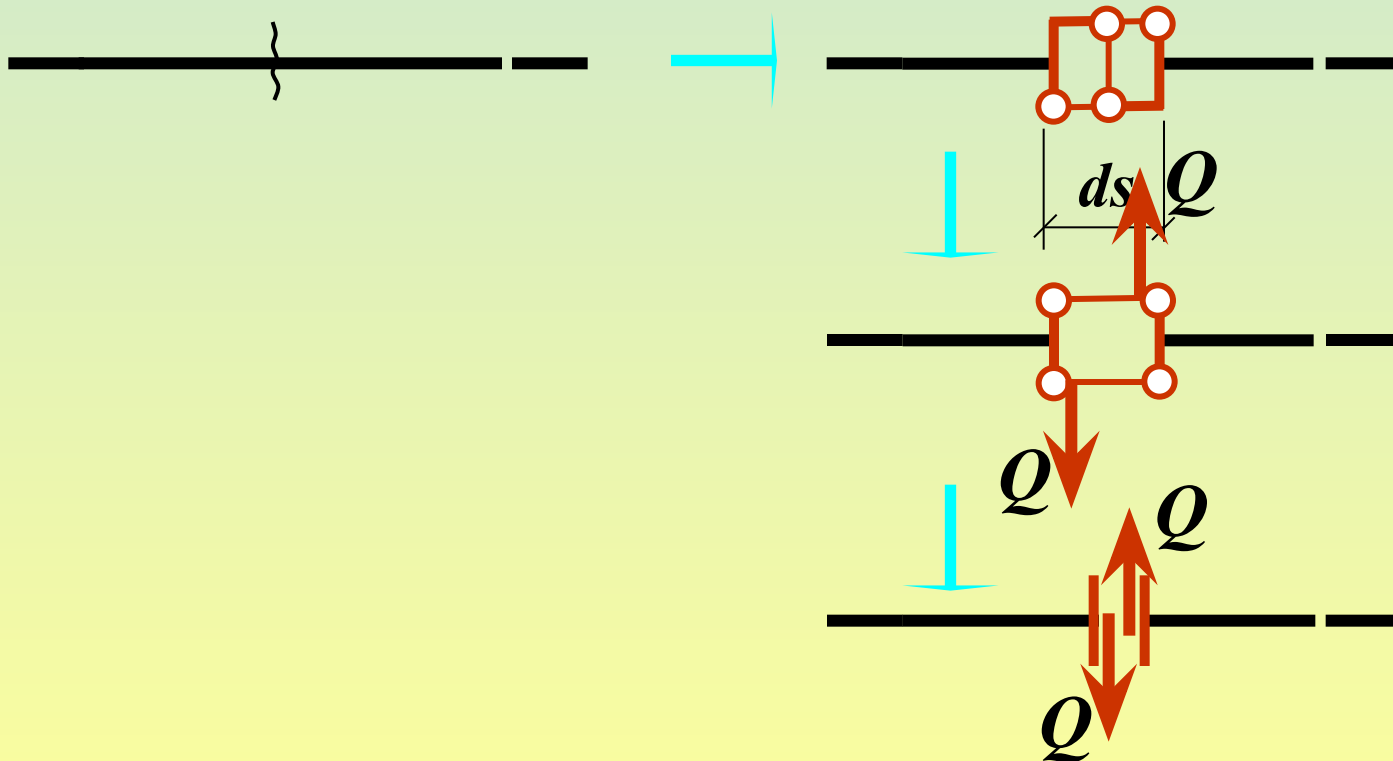


$$\theta_l > 0, \theta_r > 0 \rightarrow \delta_S > 0$$

Удаление внутренних связей.

Смысл перемещения δ_s

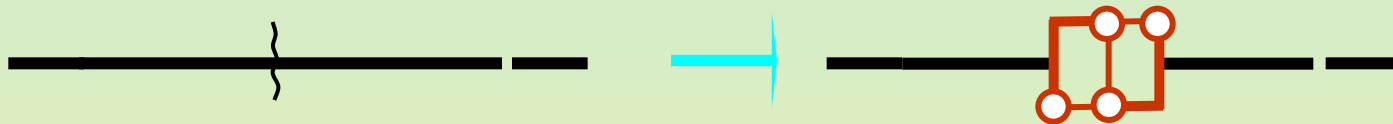
2. Удаление **внутренней линейной связи**
для определения **поперечной силы**
в сечении ($S \equiv Q$)



Удаление внутренних связей.

Смысл перемещения δ_s

2. Удаление **внутренней линейной связи** для определения **поперечной силы** в сечении ($S \equiv Q$)



$\delta_s = \delta_Q = \delta_l + \delta_r$ — возможная работа реакции удалённой связи:

взаимное (относительное) нормальное перемещение

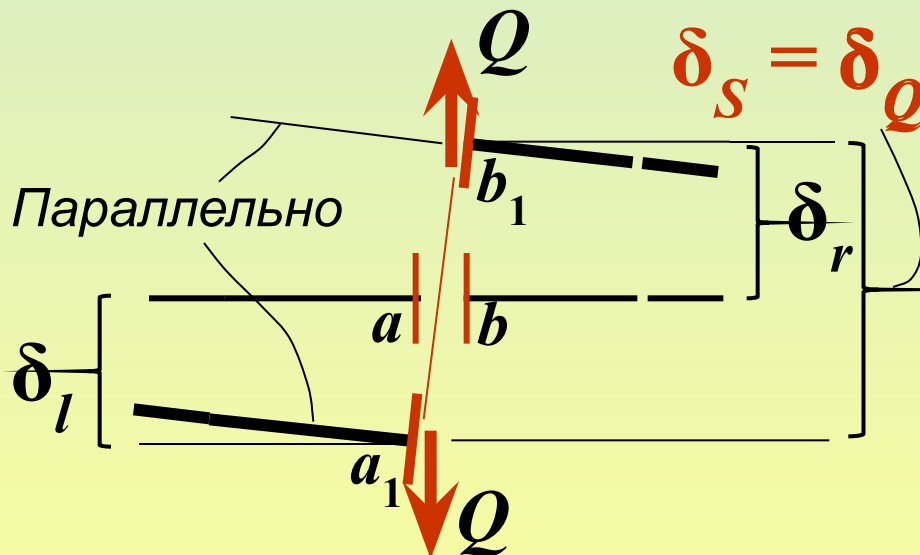
стержня (виртуальное) перемещение

сечений (точек a и b)

бесконечно близко

слева и справа от введённого

поперечного шарнира

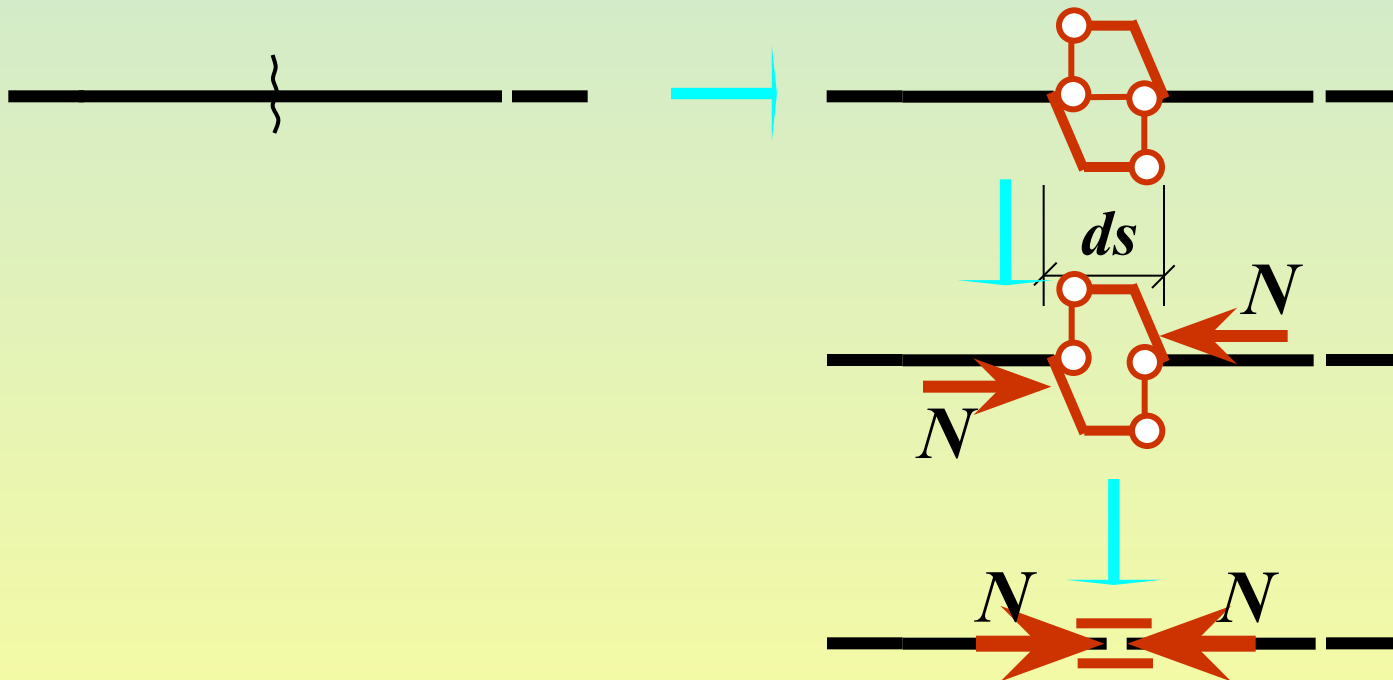


$\delta_l > 0, \delta_r > 0 \rightarrow \delta_s > 0$

Удаление внутренних связей.

Смысл перемещения δ_s

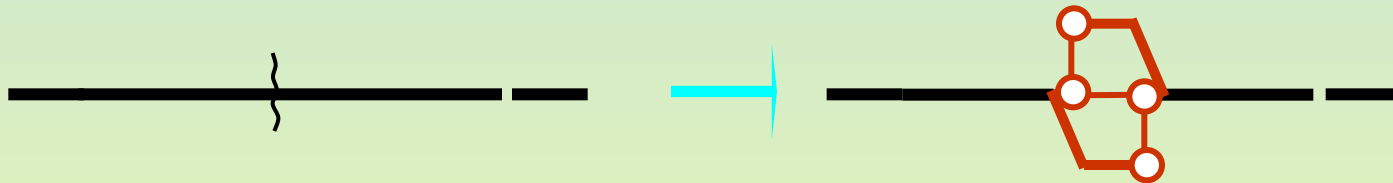
3. Удаление **внутренней линейной связи** для определения **продольной силы** в сечении ($S \equiv N$)



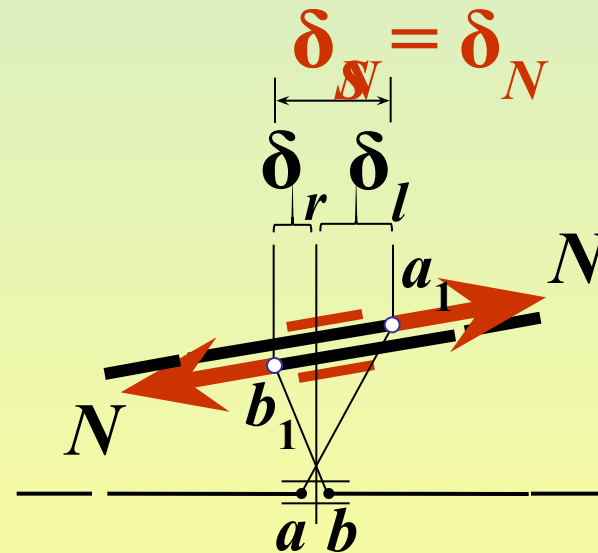
Удаление внутренних связей.

Смысл перемещения δ_S

3. Удаление **внутренней линейной связи** для определения **продольной силы** в сечении ($S \equiv N$)



- $\delta_S = \delta_N = \delta_l + \delta_r$ — **Возможная работа реакции удалённой связи** по касательной к оси стержня линейное перемещение сечений (тогда $\delta_S = N \cdot \delta$) бесконечно близко слева и справа от введённого поступательного шарнира



$$\delta_l > 0, \delta_r > 0 \rightarrow \delta_S > 0$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Силовой фактор S в линейно деформируемой системе определяется как производная потенциальной энергии упругой деформации U (ПЭУД) по соответствующему перемещению Δ_S по направлению S
(теорема Лагранжа):

$$S = \frac{dU}{d\Delta_S}$$

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 22»)

1. Какие силовые факторы определяются в расчётах сооружений и конструкций? (2)
2. Перечислить основные методы определения силовых факторов. (2)
3. В чём сущность статического метода определения реакций связей и внутренних усилий? (2)
4. Какими уравнениями описывается равновесие
 - а) дифференциально-малого элемента (2)
 - б) дискретной (конечно-элементной) линейно деформируемой системы? (2)
5. Каково соотношение между числом уравнений равновесия и количеством искомым силовых факторов в случае статически определимой системы? (2)
6. В чём суть универсальной процедуры формирования уравнений равновесия, реализующей концепцию конечных элементов? (5)
7. Из каких групп состоит система уравнений равновесия, формируемых с помощью универсальной процедуры? (4) универсальной процедуры? (4) (6)
8. Какие особенности имеет применение статического метода к статически неопределимым системам? (7)
9. Каково необходимое и достаточное аналитическое (статическое) условие геометрической неизменяемости системы? (4) геометрической неизменяемости системы? (4) (7)
10. На чём основан кинематический метод определения реакций связей (силовых факторов)? Дать формулировку принципа Лагранжа. (8)
11. Что такое возможные (виртуальные) перемещения? – три их свойства. (9)
12. Какая обязательная процедура предшествует заданию виртуальных перемещений при реализации кинематического метода определения реакции некоторой связи? (10)
13. Что такое обобщённая нагрузка и обобщённое перемещение? (10)

*) Только в режиме «Показ слайдов»

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 23»)

14. Изложить алгоритм определения реакции связи кинематическим методом. (11)
15. Основная формула кинематического метода для определения силового фактора S . (11)
16. Что такое δ_F и δ_S в основной формуле кинематического метода? (10)
17. Каково правило знаков для перемещений δ_F и δ_S ? (10)
18. Какие связи должны удаляться при определении внутренних силовых факторов кинематическим методом? (самостоятельно)
19. Какая связь удаляется при определении кинематическим методом изгибающего момента в определённом сечении стержневого элемента? Что появляется в сечении в результате удаления связи? (16)
20. Какой смысл имеет величина δ_S в случае определения изгибающего момента M ? (16)
21. Какая связь удаляется при определении кинематическим методом поперечной силы в сечении стержневого элемента? Что появляется в сечении в результате удаления связи? (17)
22. Какой смысл имеет величина δ_S в случае определения поперечной силы Q ? (18)
23. Какая связь удаляется при определении кинематическим методом продольной силы в сечении стержневого элемента? Что появляется в сечении в результате удаления связи? (19)
24. Какой смысл имеет величина δ_S в случае определения продольной силы N ? (20)
25. На чём основан энергетический метод определения силовых факторов в деформируемых системах? (21)
26. Аналитическая запись энергетической теоремы Лагранжа для определения силового фактора S . (21)

*) Только в режиме «Показ слайдов»