

Прямой чистый изгиб

Поперечный плоский изгиб

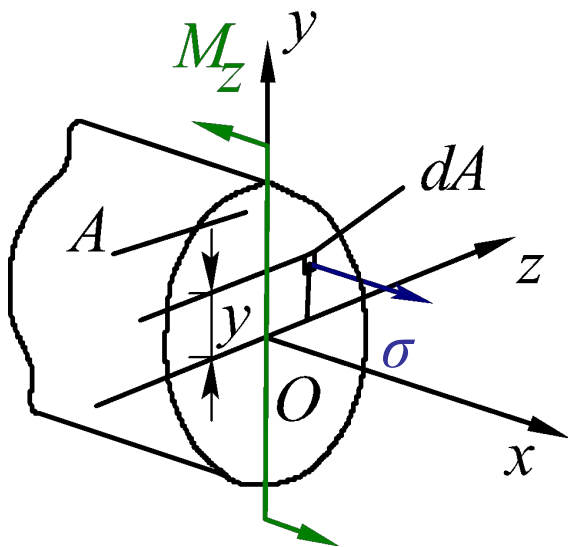
Доцент кафедры
самолетостроения
к.т.н Мухин Д.В.

1. Прямой чистый изгиб

Поперечный изгиб - деформация стержня силами, перпендикулярными оси (поперечными) и парами, плоскости действия которых перпендикулярны нормальным сечениям.

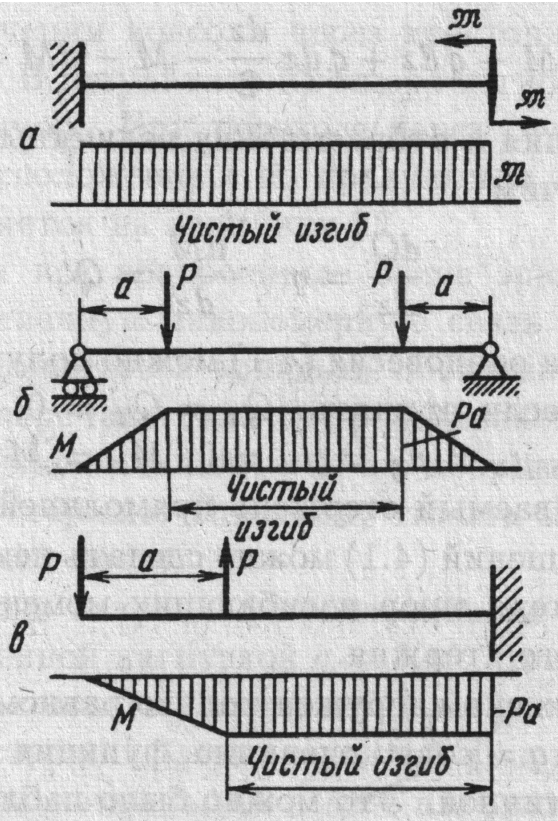
Стержень работающий на изгиб называют **балкой**.

При **прямом чистом изгибе** в поперечном сечении стержня возникает только один силовой фактор — изгибающий момент M_z . Так как $Q_y = dM_z/dx = 0$, то $M_z = \text{const}$ и чистый прямой изгиб может быть реализован при нагружении стержня парами сил, приложенными в торцевых сечениях стержня.



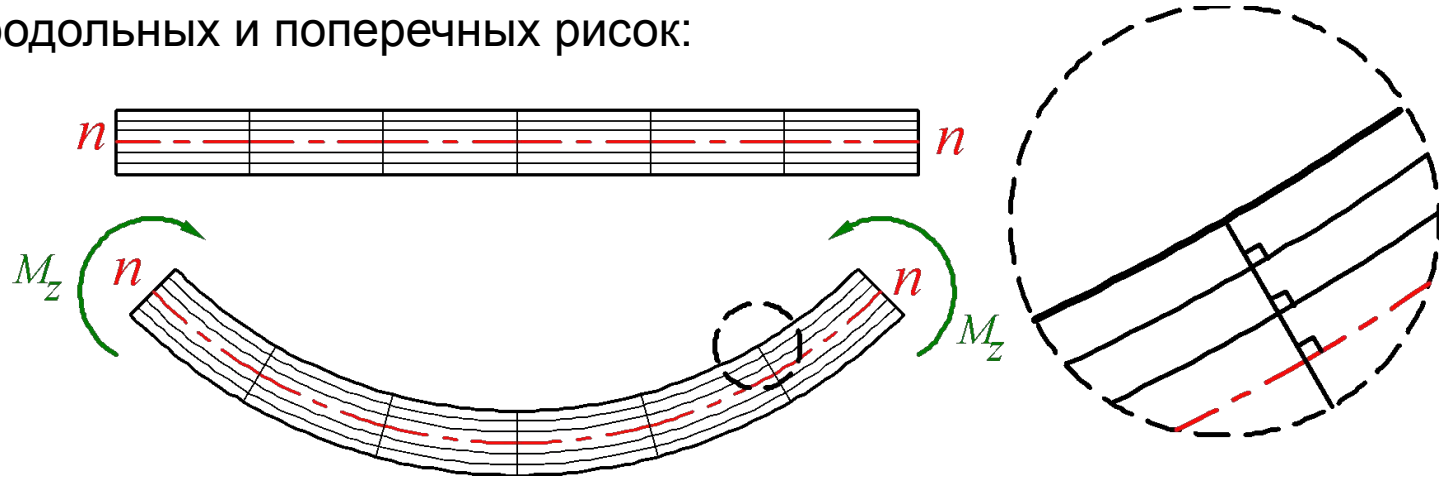
Поскольку изгибающий момент M_z по определению равен сумме моментов внутренних сил относительно оси Oz с нормальными напряжениями его связывает вытекающее из этого определения уравнение статики:

$$M_z = \int_A \sigma y dA$$



Анализ напряженного состояния при чистом изгибе

Проанализируем деформации модели стержня на боковой поверхности которого нанесена сетка продольных и поперечных рисок:



Поскольку поперечные риски при изгибе стержня парами сил, приложенными в торцевых сечениях, остаются прямыми и перпендикулярными к искривленным продольным рискам, это позволяет сделать вывод о выполнении **гипотезы плоских сечений**, а следовательно $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

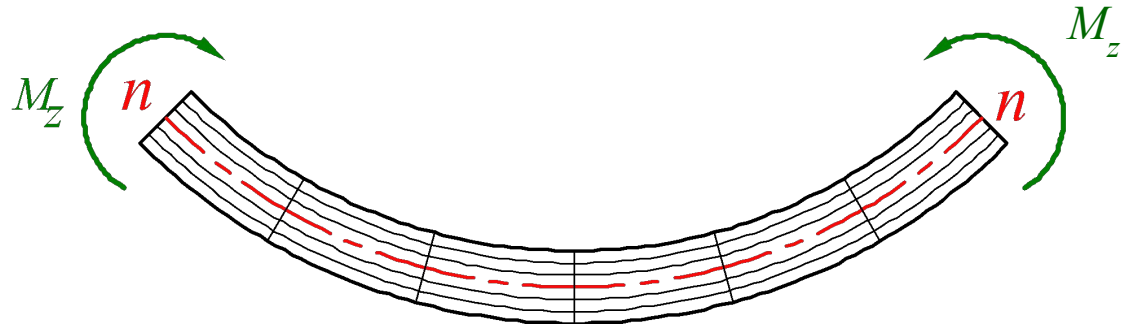
Замеряя изменение расстояний между продольными рисками, приходим к выводу о справедливости **гипотезы о ненадавливании продольных волокон**, то есть

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

То есть из всех компонентов тензора напряжений при чистом изгибе не равно нулю только напряжение $\sigma_x = \sigma$ и чистый прямой изгиб призматического стержня сводится к одноосному растяжению или сжатию продольных волокон напряжениями σ . При этом часть волокон находится в зоне растяжения (на рис. это—нижние волокна), а другая часть—в зоне сжатия (верхние волокна). Эти зоны разделены **нейтральным слоем (n—n)**, не меняющим своей длины, напряжения в котором равны нулю.

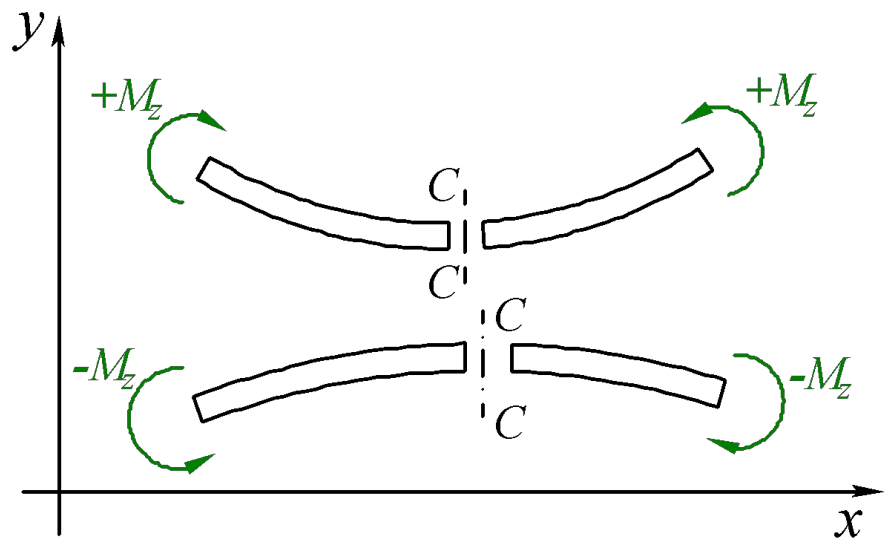
Правило знаков изгибающих моментов

Правила знаков моментов в задачах теоретической механики и сопротивления материалов не совпадают. Причина этого в различии рассматриваемых процессов. В теоретической механике рассматриваемым процессом является движение или равновесие твердых тел, поэтому два момента на рисунке стремящиеся повернуть стержень в разные стороны (правый момент по часовой стрелке, а левый – против) имеют в задачах теоретической механики разный знак.



В задачах сопромата рассматриваются возникающие в теле напряжения и деформации. С этой точки зрения оба момента вызывают в верхних волокнах напряжения сжатия, а в нижних напряжения растяжения, поэтому моменты имеют одинаковый знак.

Правила знаков изгибающих моментов относительно сечения С-С представлены на схеме:

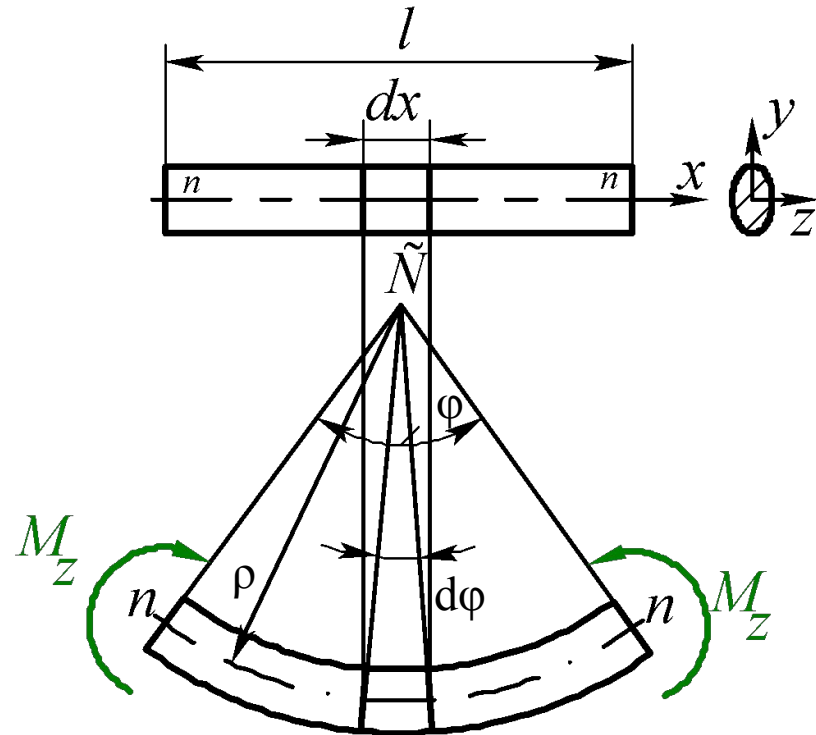


Расчет значений напряжений при чистом изгибе

Выведем формулы для расчета радиуса кривизны нейтрального слоя и нормальных напряжений в стержне.

Рассмотрим призматический стержень в условиях прямого чистого изгиба с поперечным сечением, симметричным относительно вертикальной оси Oy . Ось Ox поместим на нейтральном слое, положение которого заранее неизвестно. Отметим, что постоянство поперечного сечения призматического стержня и изгибающего момента ($M_z = const$), обеспечивает постоянство радиуса кривизны нейтрального слоя по длине стержня.

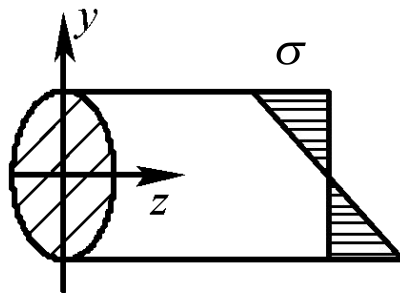
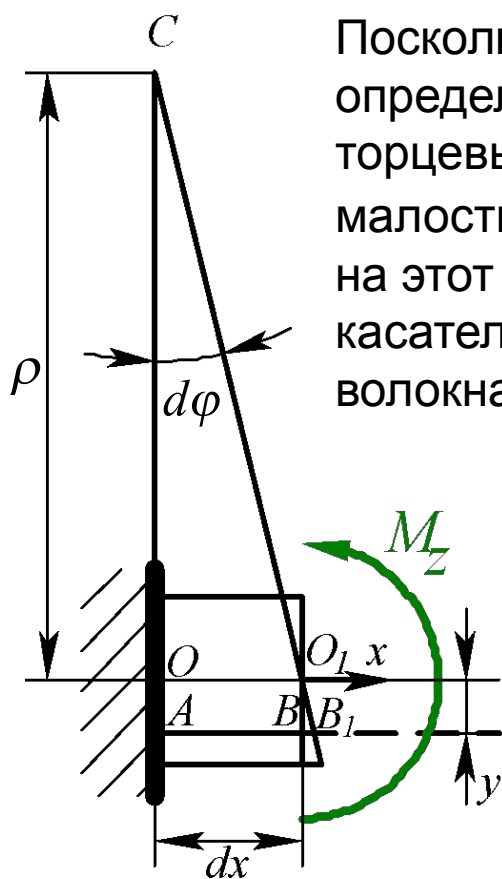
При изгибе с постоянной кривизной нейтральный слой стержня становится дугой окружности, ограниченной углом φ . Рассмотрим вырезанный из стержня бесконечно малый элемент длиной dx . При изгибе он превратится в бесконечно малый элемент дуги, ограниченный бесконечно малым углом $d\varphi$.



С учетом зависимостей между радиусом окружности, углом и длиной дуги:

$$l = \rho \cdot \varphi; \quad dx = \rho \cdot d\varphi.$$

Поскольку интерес представляют деформации элемента, определяемые относительным смещением его точек, одно из торцевых сечений элемента можно считать неподвижным. Ввиду малости $d\varphi$ считаем, что точки поперечного сечения при повороте на этот угол перемещаются не по дугам, а по соответствующим касательным. Вычислим относительную деформацию продольного волокна AB , отстоящего от нейтрального слоя на y :



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{OO_1}$$

Из подобия треугольников COO_1 и O_1BB_1 следует, что

$$BB_1/OO_1 = O_1B/CO = y/\rho$$

то есть: $\varepsilon = y/\rho$

Продольная деформация оказалась линейной функцией расстояния от нейтрального слоя, что является прямым следствием закона плоских сечений.

Тогда нормальное напряжение, растягивающее волокно AB , на основании закона Гука будет равно:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho}$$

Полученная формула не пригодна для практического использования, так как содержит две неизвестные: кривизну нейтрального слоя $1/\rho$ и положение нейтральной оси Ox , от которой отсчитывается координата y . Для определения этих неизвестных воспользуемся уравнениями равновесия статики. Первое выражает требование равенства нулю продольной силы

$$N_x = \int_A \sigma \cdot dA = 0$$

Подставляя в это уравнение выражение для σ : $N_x = \int_A E \cdot \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot dA = 0$

и учитывая, что $E/\rho \neq 0$, получаем, что:

$$\int_A y \cdot dA = 0$$

Интеграл в левой части этого уравнения представляет собой статический момент поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси Ox , который может быть равным нулю только относительно центральной оси (оси проходящей через центр тяжести сечения). Поэтому нейтральная ось Ox проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Вторым уравнением равновесия статики является, связывающее нормальные напряжения с изгибающим моментом. Подставляя в это уравнение выражение для напряжений, получим:

$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA$$

Интеграл в полученном уравнении ранее изучен: $\int_A y^2 dA = J_z$

J_z — момент инерции относительно оси Oz. В соответствии с выбранным положением осей координат он же главный центральный момент инерции сечения.

Получаем формулу для кривизны нейтрального слоя: $\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}$

Кривизна нейтрального слоя $1/\rho$ является мерой деформации стержня при прямом чистом изгибе. Кривизна тем меньше, чем больше величина EJ_z , называемая **жесткостью поперечного сечения при изгибе**.

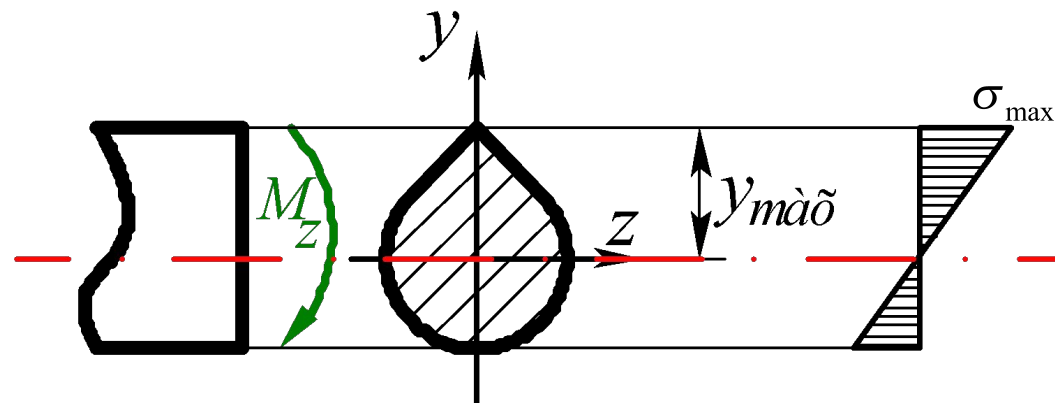
Подставляя выражение в формулу для σ , получаем: $\sigma = -\frac{M_z}{J_z} y$

Таким образом, **нормальные напряжения при чистом изгибе призматического стержня являются линейной функцией координаты y и достигают наибольших значений в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси.**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max} = \frac{M_z}{W_z}$$

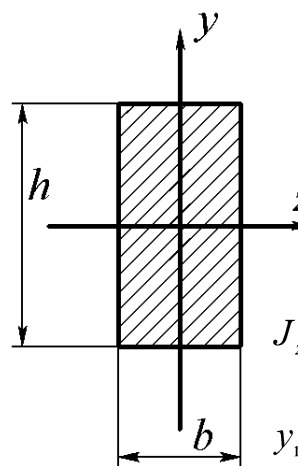
геометрическая характеристика,

$W_z = J_z / y_{\max}$ имеющая размерность м^3 называется **моментом сопротивления при изгибе**.



Определение моментов сопротивления W_z поперечных сечений

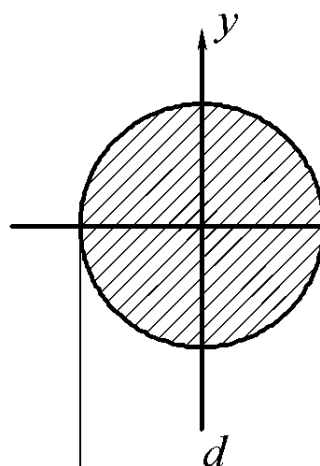
- У простейших фигур в справочнике (лекция 4) или рассчитать самостоятельно



$$J_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$y_{\max} = \frac{h}{2}$$

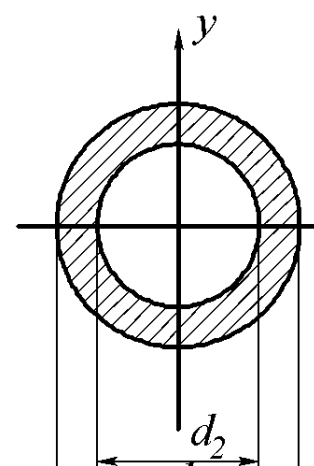
$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{bh^2}{6}$$



$$J_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$y_{\max} = \frac{d}{2}$$

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\pi d^3}{32}$$



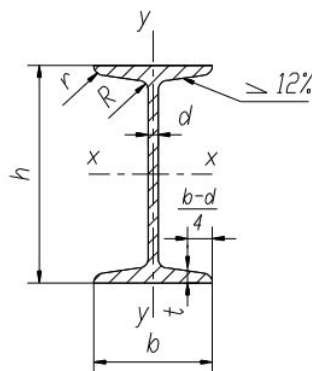
$$J_z = \frac{\pi d_1^4}{64} (1 - c^4)$$

$$c = \frac{d_2}{d_1}; y_{\max} = \frac{d_1}{2}$$

$$W_z = \frac{\pi d_1^3}{32} (1 - c^4)$$

- У стандартных профилей в сортаменте ГОСТ

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ



Балки двутавровые (по ГОСТ 8239 – 72)

Обозначения:

h – высота балки;
 b – ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;

J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции;
 S – статический момент полусечения.

| № профиля | Размеры, мм | | | | Площадь сечения $A, \text{см}^2$ | $J_x, \text{см}^4$ | $W_{x_3}, \text{см}^3$ | $i_x, \text{см}$ | $S_{x_3}, \text{см}^3$ | $J_y, \text{см}^4$ | $W_{y_3}, \text{см}^3$ | $i_y, \text{см}$ | Масса 1 м, кг |
|-----------|-------------|-----|-----|-----|-------------------------------------|--------------------|------------------------|------------------|------------------------|--------------------|------------------------|------------------|------------------|
| | h | b | d | t | | | | | | | | | |
| 10 | 100 | 55 | 4,5 | 7,2 | 12,0 | 198 | 39,7 | 4,06 | 23,0 | 17,9 | 6,49 | 1,22 | 9,46 |
| 12 | 120 | 64 | 4,8 | 7,3 | 14,7 | 350 | 58,4 | 4,88 | 33,7 | 27,9 | 8,72 | 1,38 | 11,5 |

Расчет на прочность при чистом изгибе

Проектировочный расчет

Условие прочности при расчете чистого изгиба будет иметь вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$$

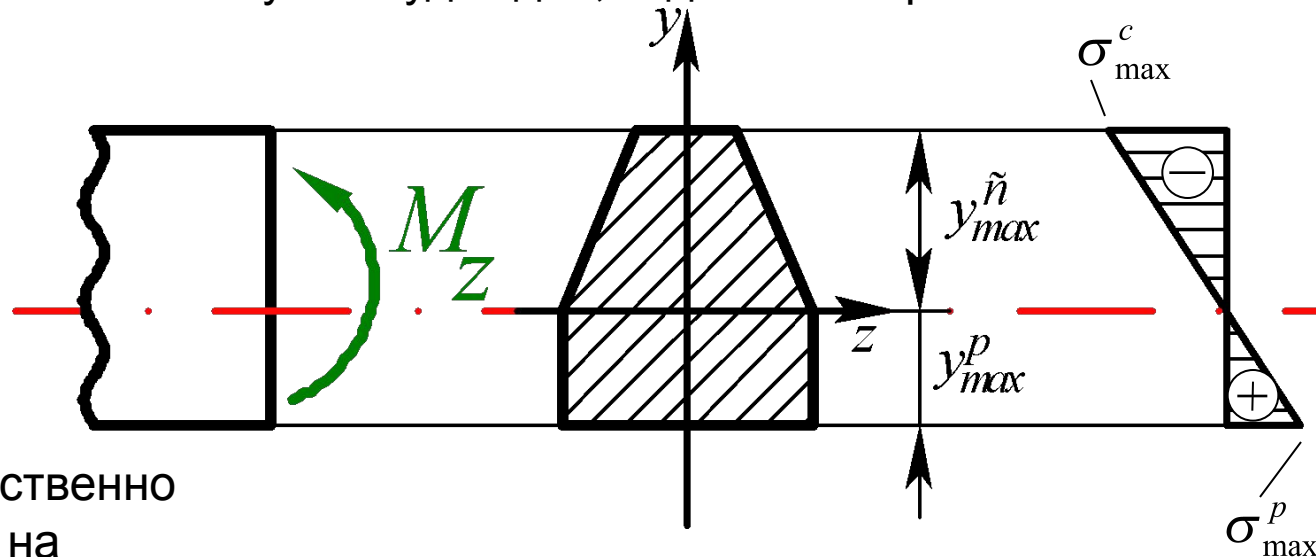
Из данного условия определяют W_z , а далее либо подбирают нужный профиль из сортамента стандартного проката, либо по геометрическим зависимостям рассчитывают размеры сечения.

При расчете балок из хрупких материалов следует различать наибольшие растягивающие σ_{\max}^p и наибольшие сжимающие σ_{\max}^c напряжения, которые сравниваются соответственно с допускаемыми напряжениями на растяжение и сжатие. Условий прочности в этом случае будет два, отдельно по растяжению и по сжатию:

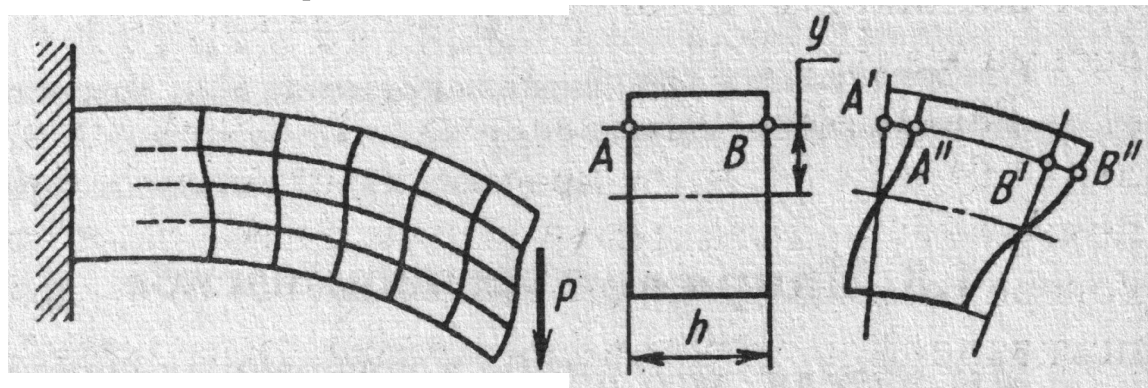
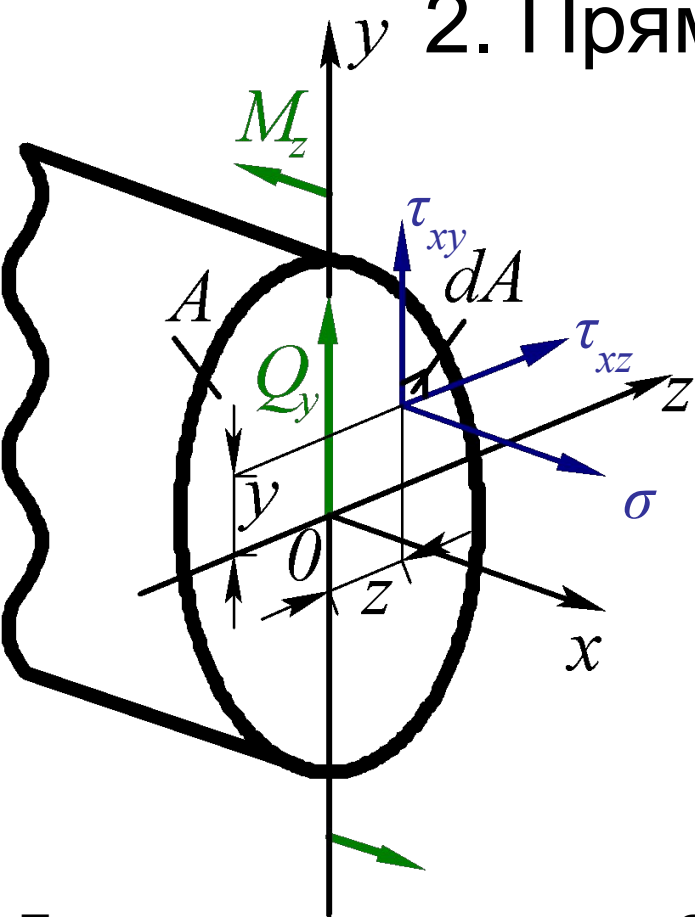
$$\sigma_{\max}^p = \frac{M_z}{J_z} y_{\max}^p \leq [\sigma]_p$$

$$|\sigma_{\max}^c| = \left| \frac{M_z}{J_z} y_{\max}^c \right| \leq [\sigma]_c$$

Здесь $[\sigma]_p, [\sigma]_c$ - соответственно допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие.



2. Прямой поперечный изгиб



Выведенная в случае чистого изгиба стержня формула для расчета нормальных напряжений в случае прямого поперечного изгиба, строго говоря, неприменима, поскольку из-за сдвигов, вызываемых касательными напряжениями, происходит депланация (искривление) поперечных сечений, то есть нарушается гипотеза плоских сечений. Однако для балок с высотой сечения $h < l/4$ погрешность невелика и ее применяют для определения нормальных напряжений поперечного изгиба как приближенную.

При прямом поперечном изгибе в сечениях стержня возникает изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y , которые связаны с нормальными и касательными напряжениями

$$M_z = \int_A \sigma y dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA$$

При выводе условия прочности при чистом изгибе использовалась гипотеза об отсутствии поперечного взаимодействия продольных волокон. При поперечном изгибе наблюдаются отклонения от этой гипотезы:

а) в местах приложения сосредоточенных сил. Под сосредоточенной силой напряжения поперечного взаимодействия σ_y могут быть достаточно велики и во много раз превышать продольные напряжения, убывая при этом, в соответствии с принципом Сен-Венана,

по мере удаления от точки приложения силы;

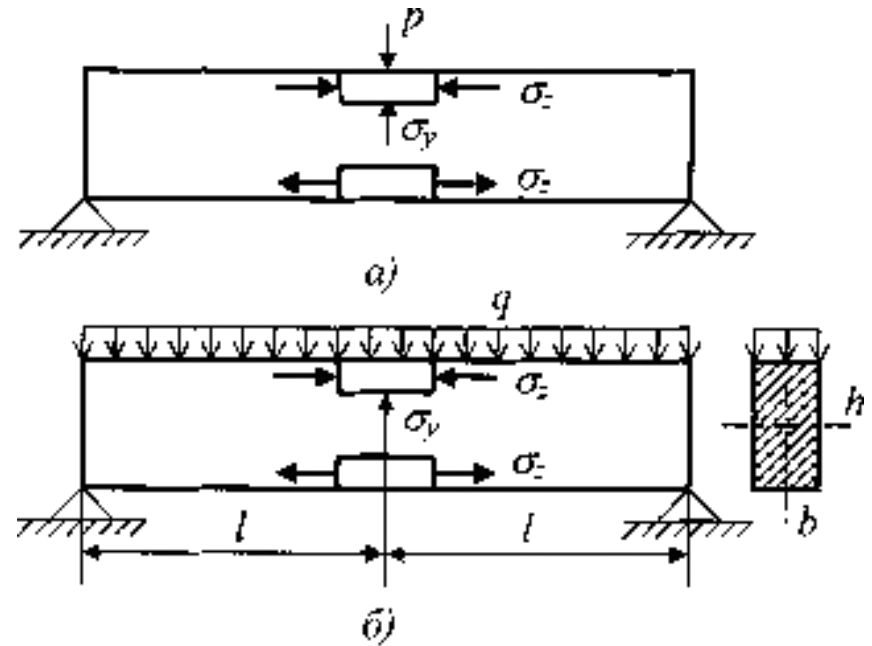
б) в местах приложения распределенных нагрузок. Так, в случае, приведенном на рис, напряжения от давления на верхние волокна балки.

$$\sigma_y = -\frac{q}{b}$$

Сравнивая их с продольными напряжениями σ_x , имеющими порядок:

$$\sigma_{x \max} = \frac{ql^2/8}{bh^2/6} = \frac{3}{4} \frac{q}{b} \left(\frac{l}{h}\right)^2$$

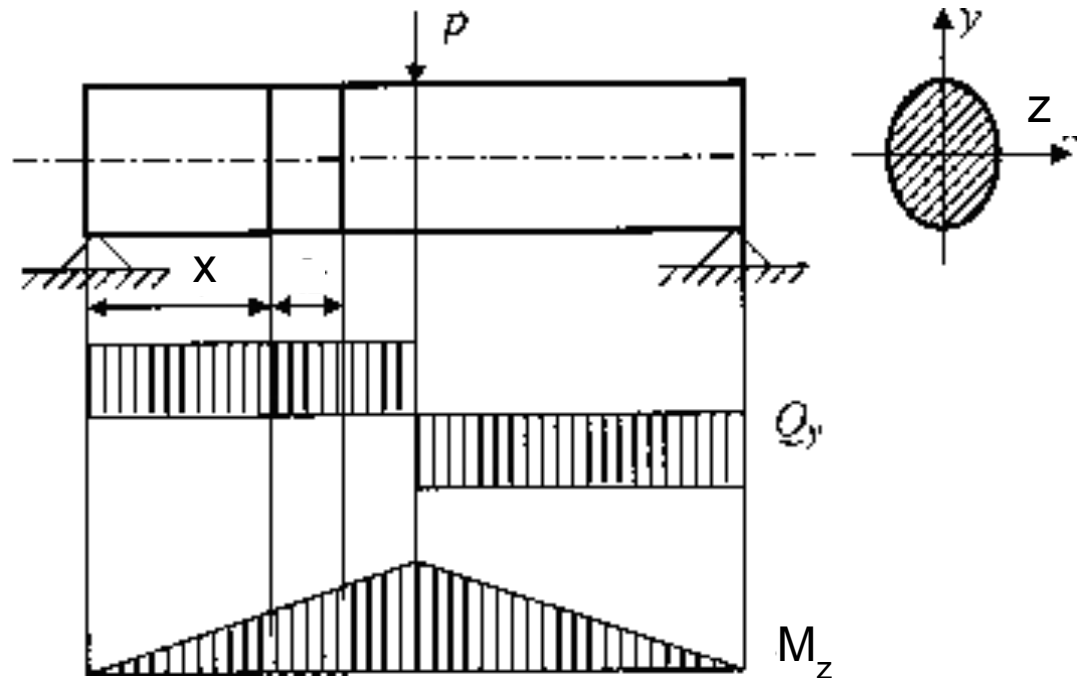
приходим к выводу, что напряжения $\sigma_y \ll \sigma_x$ при условии, что $h^2 \ll l^2$



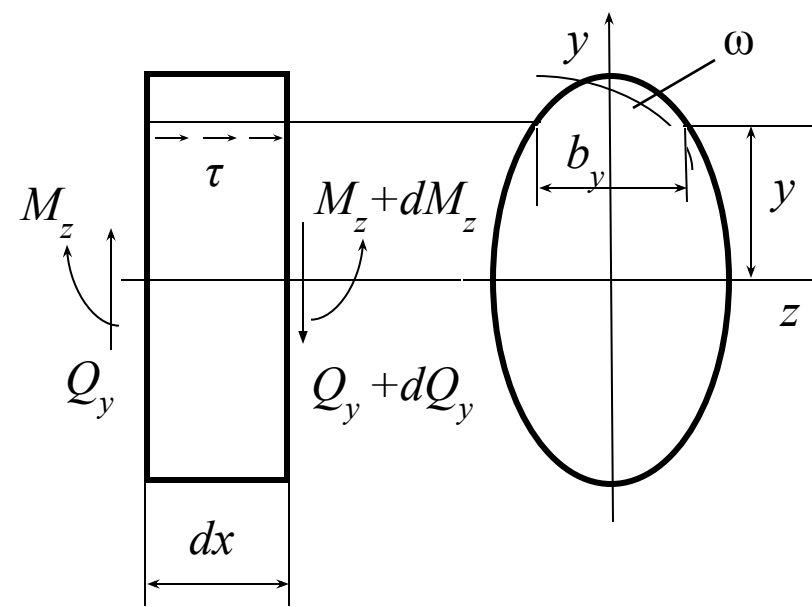
Расчет касательных напряжений при прямом поперечном изгибе

Примем, что касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения.

Непосредственное определение напряжений τ_{yx} затруднительно, поэтому находим равные им касательные напряжения τ_{xy} возникающие на продольной площадке с координатой y элемента длиной dx , вырезанного из балки



От этого элемента продольным сечением, отстоящим от нейтрального слоя на y , отсекаем верхнюю часть, заменяя действие отброшенной нижней части касательными напряжениями τ . Нормальные напряжения σ и $\sigma + d\sigma$, действующие на торцевых площадках элемента, также заменим их равнодействующими



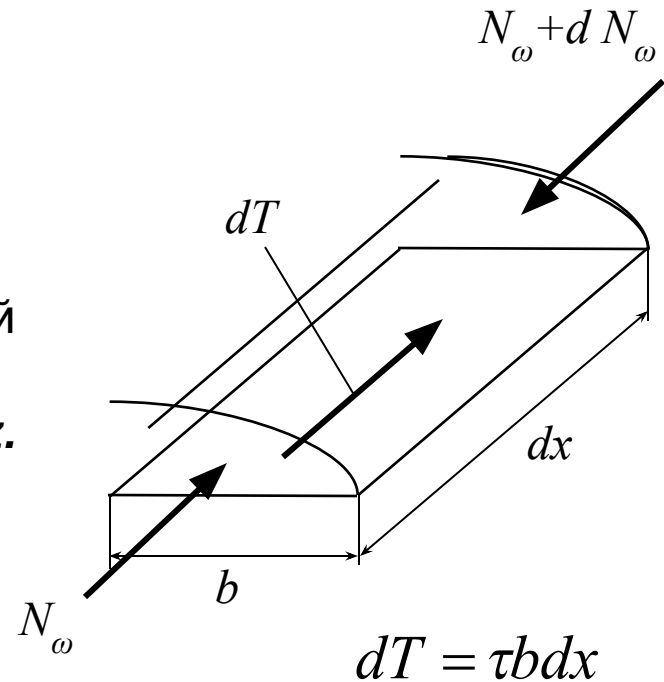
$$N_{\omega} = \int_{\omega} \sigma dA = \int_{\omega} \frac{M_z}{I_z} y dA = \frac{M_z}{I_z} S_z^{\omega}$$

$$N_{\omega} + dN_{\omega} = \int_{\omega} (\sigma + d\sigma) dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} S_z^{\omega}$$

$$S_z^{\omega} = \int_{\omega} y dA \quad \text{статический момент отсеченной части площади поперечного сечения } \omega \text{ относительно оси } Oz.$$

Рассмотрим условие равновесия отсеченного элемента составив для него уравнение статики

$$\sum x = 0 \Rightarrow N_{\omega} + dT - (N_{\omega} + dN_{\omega}) = 0$$

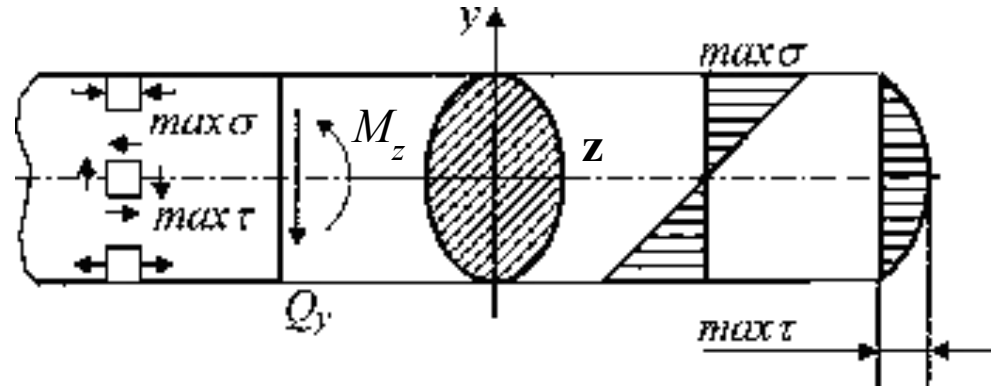


откуда после несложных преобразований, учитывая, что $\frac{dM_z}{dx} = Q_y$

получим
$$\tau = \frac{Q_y S_z^\omega}{J_z b_y}$$

Формула Журавского

Касательные напряжения по высоте сечения меняются по закону квадратичекой параболы, достигая максимума на нейтральной оси



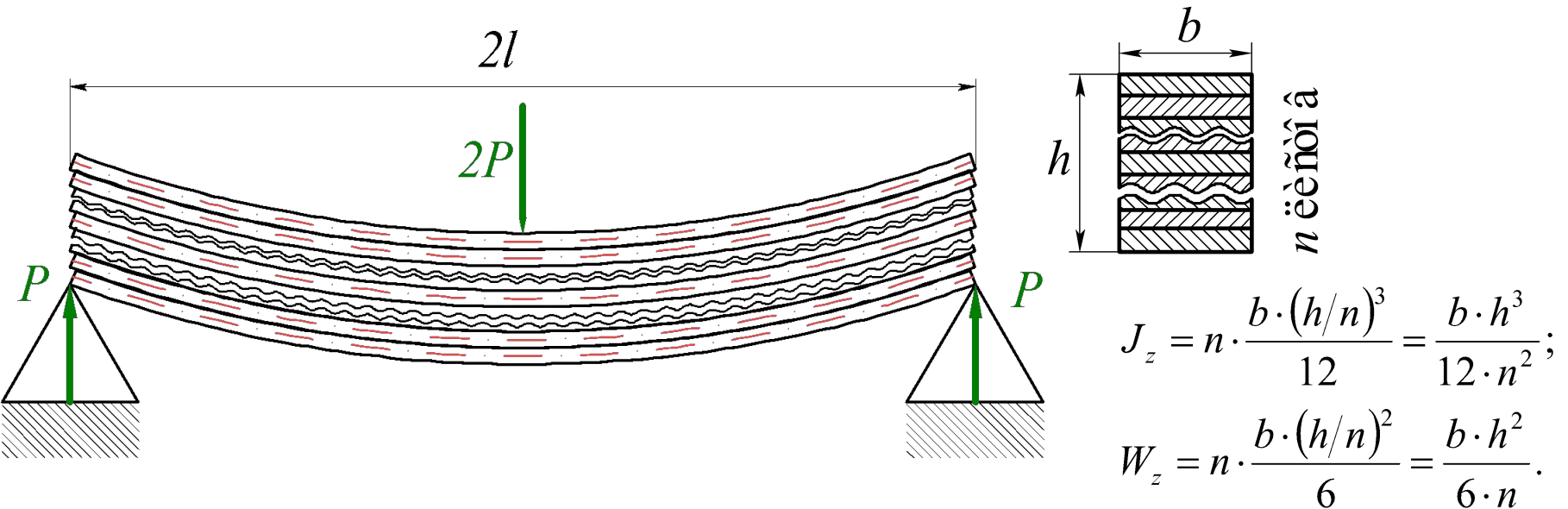
Учитывая, что наибольшие нормальные напряжения возникают в крайних волокнах, где касательные напряжения отсутствуют, а наибольшие касательные напряжения во многих случаях имеют место в нейтральном слое, где нормальные напряжения равны нулю, условия прочности в этих случаях формулируются отдельно по нормальным и касательным напряжениям

$$\max \sigma \leq [\sigma];$$

$$\max \tau \leq [\tau].$$

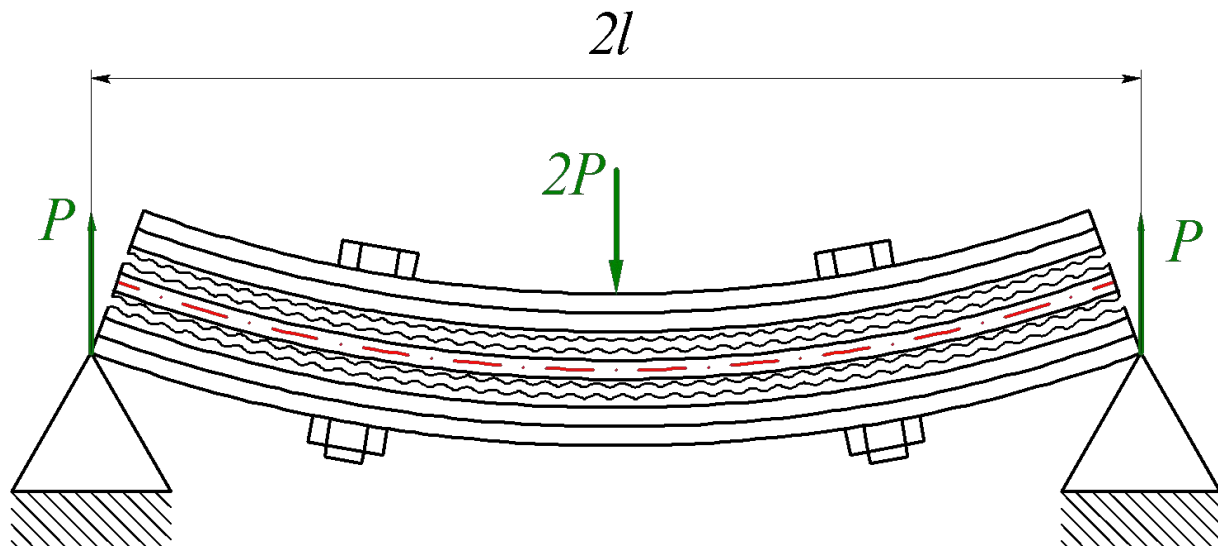
3. Составные балки при изгибе

Касательные напряжения в продольных сечениях являются выражением существующей связи между слоями стержня при поперечном изгибе. Если эта связь в некоторых слоях нарушена, характер изгиба стержня меняется.



В стержне, составленном из листов, каждый лист при отсутствии сил трения изгибается самостоятельно. Изгибающий момент равномерно распределяется между составными листами. Максимальное значение изгибающего момента будет в середине балки и будет равно $M_z = P \cdot l$. Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении листа равно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{P \cdot l}{(b \cdot h^2)/(6 \cdot n)} = \frac{6 \cdot P \cdot l}{b \cdot h^2} \cdot n$$



$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12};$$

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Если листы плотно стянуть достаточно жесткими болтами, стержень будет изгибаться как целый. В этом случае наибольшее нормальное напряжение оказывается в n раз меньше, т.е.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{P \cdot l}{b \cdot h^2 / 6} = \frac{6 \cdot P \cdot l}{b \cdot h^2}$$

В поперечных сечениях болтов при изгибе стержня возникают поперечные силы. Наибольшая поперечная сила будет в сечении, совпадающем с нейтральной плоскостью изогнутого стержня.

Эту силу можно определить из равенства сумм поперечных сил в сечениях болтов и продольной равнодействующей касательных напряжений в случае целого стержня:

$$m \cdot Q_{\text{болта}}^{\max} = \tau_{\max} \cdot b \cdot l = \frac{3}{2} \frac{P}{b \cdot h} \cdot b \cdot l = \frac{3}{2} \frac{P \cdot l}{h} \quad \text{где } m \text{ - число болтов.}$$

Сопоставим изменение кривизны стержня в заделке в случае связанного и несвязанного пакетов.

Для связанного пакета:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z} = \frac{12 \cdot P \cdot l}{E \cdot b \cdot h^3}$$

Для несвязанного пакета:

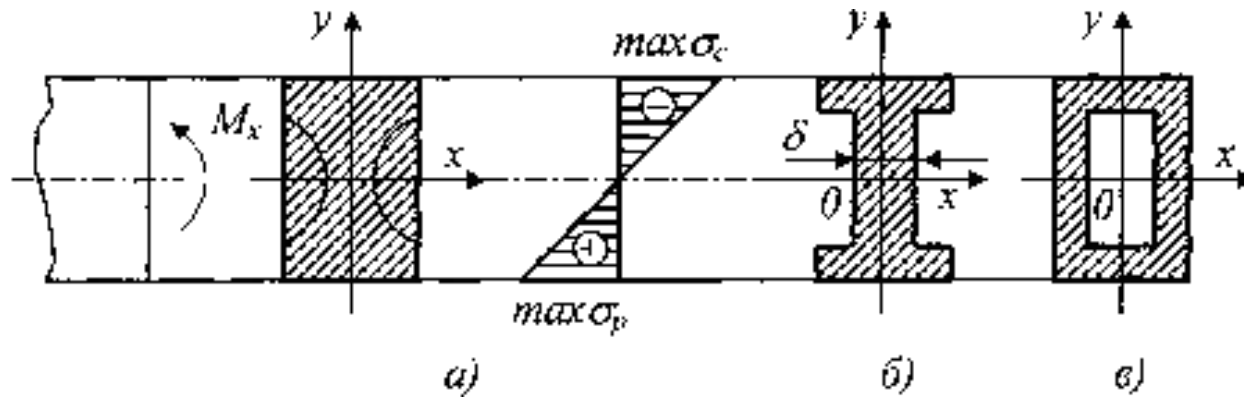
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z} = \frac{(P/n) \cdot l}{E \cdot (b/12) \cdot (h/n)^3} = \frac{12 \cdot P \cdot l}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot n^2$$

Пропорционально изменениям кривизны меняются и прогибы.

Таким образом, по сравнению с целым стержнем набор свободно сложенных листов оказывается в n^2 раз более гибким и только в n раз менее прочным. Это различие в коэффициентах снижения жесткости и прочности при переходе к листовому пакету используют на практике при создании гибких рессорных подвесок. Силы трения между листами повышают жесткость пакета, так как частично восстанавливают касательные силы между слоями стержня, устраненные при переходе к листовому пакету. Рессоры нуждаются поэтому в смазке листов и их следует оберегать от загрязнения.

4. Рациональные формы поперечных сечений при изгибе

Наиболее рациональным является сечение, обладающее минимальной площадью при заданной нагрузке на балку. В этом случае расход материала на изготовление балки, будет минимальным. Для получения балки минимальной материалоемкости нужно стремиться к тому, чтобы по возможности наибольший объем материала работал при напряжениях, равных допускаемым или близким к ним. Прежде всего рациональное сечение балки при изгибе должно удовлетворять *условию равнопрочности растянутой и сжатой зон балки*. Для этого необходимо, чтобы наибольшие напряжения растяжения и наибольшие напряжения сжатия одновременно достигали допускаемых напряжений. Приходим к *рациональному для пластичного материала сечению в форме симметричного двутавра*, у которого возможно большая часть материала сосредоточена на полках, соединенных стенкой, толщина которой назначается из условий прочности стенки по касательным напряжениям. К двутавровому сечению близко по критерию рациональности так называемое коробчатое сечение

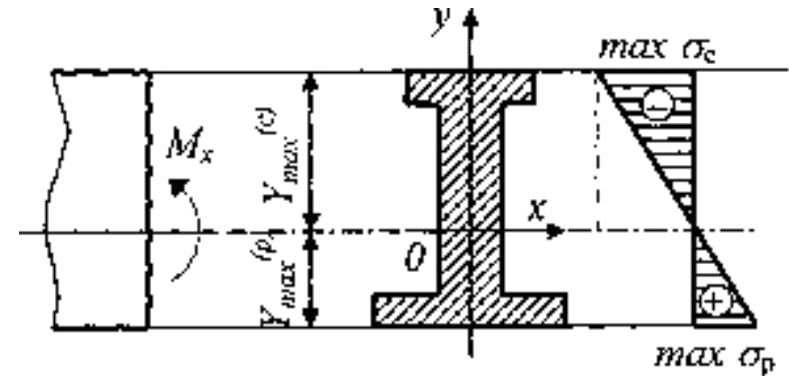


Для балок из хрупкого материала наиболее рациональным будет сечение в форме несимметричного двутавра, удовлетворяющего условию равнопрочности на растяжение и сжатие

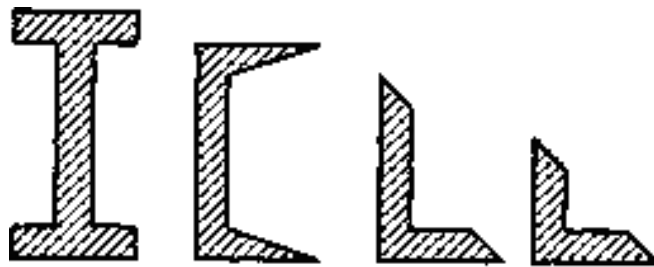
$$\frac{y_{\max}^{(p)}}{y_{\max}^{(c)}} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$$

которое вытекает из требования

$$\frac{\max \sigma_p}{\max \sigma_c} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$$

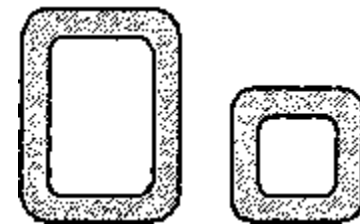


Идея рациональности поперечного сечения стержней при изгибе реализована в стандартных тонкостенных профилях, получаемых методами горячего прессования или прокатки из рядовых и легированных конструкционных высококачественных сталей, а также алюминия и алюминиевых сплавов.



а) б) в) г)

а—двутавр, б—швеллер, в — неравнобокий уголок, г—равнобокий уголок.



холодногнутые замкнутые сварные профили