Прямая задача о положении механизмов параллельной структуры

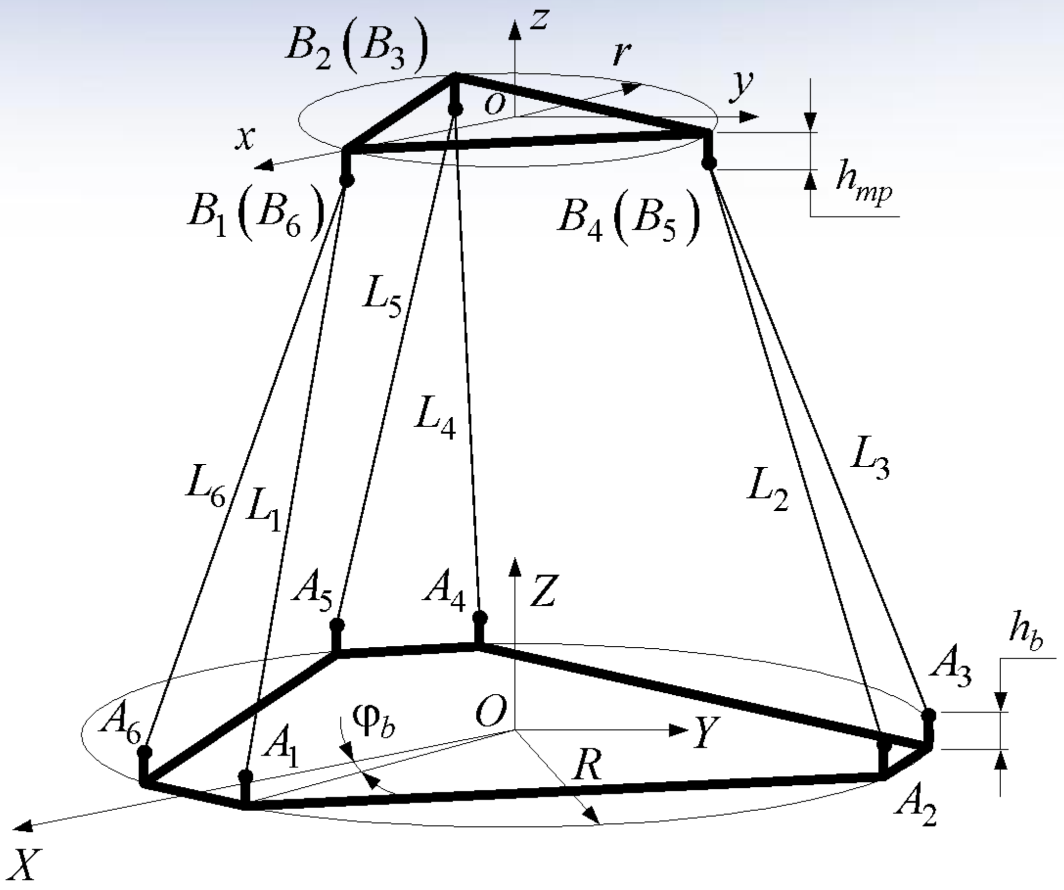
Постановка задачи

По заданному вектору обобщенных координат манипулятора

$$\boldsymbol{q}=(q_1, q_2, \ldots, q_N)^{\mathrm{T}}$$

найти положение и ориентацию его схвата $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$.

Платформа Гью-Стюарта 6-3 (Робот 6-3)



$$\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_6]$$

- обобщенные координаты

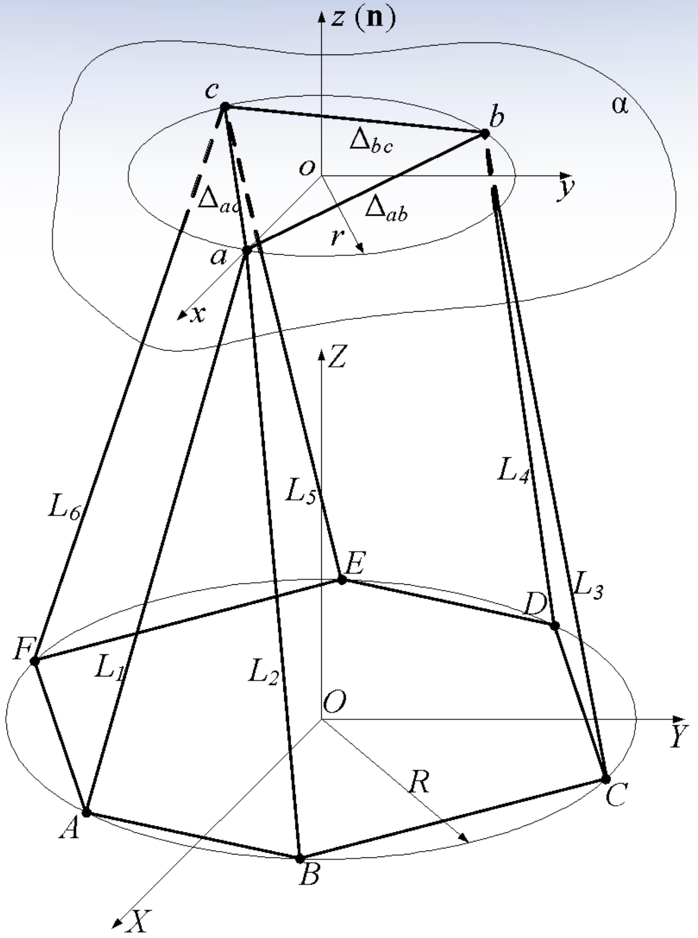
$$\mathbf{X} = [x_o \quad y_o \quad z_o \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma],$$

- положение и ориентация платформы

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) & \mathbf{p}(x_0, y_0, z_0) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

Кафедра мехатроники и робототехники М6-КФ

Решение с помощью вычисления аналитического уравнения плоскости



$$\begin{vmatrix} x-x_a & x_b-x_a & x_c-x_a \\ y-y_a & y_b-y_a & y_c-y_a \\ z-z_a & z_b-z_a & z_c-z_a \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-x_a)d_1-(y-y_a)d_2+(z-z_a)d_3=0,$$

$$d_1=(y_b-y_a)(z_c-z_a)-(y_c-y_a)(z_b-z_a),$$

$$d_2=(x_b-x_a)(z_c-z_a)-(x_c-x_a)(z_b-z_a),$$

$$d_3=(x_b-x_a)(y_c-y_a)-(x_c-x_a)(y_b-y_a).$$

Координаты шарниров основания

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
R\,\mathrm{c}(\varphi_b) & R\,\mathrm{c}\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi_b\right) & R\,\mathrm{c}\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi_b\right) & R\,\mathrm{c}\left(\frac{4\pi}{3}-\varphi_b\right) & R\,\mathrm{c}\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi_b\right) & R\,\mathrm{c}(-\varphi_b) \\
R\,\mathrm{s}(\varphi_b) & R\,\mathrm{s}\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi_b\right) & R\,\mathrm{s}\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi_b\right) & R\,\mathrm{s}\left(\frac{4\pi}{3}-\varphi_b\right) & R\,\mathrm{s}\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi_b\right) & R\,\mathrm{s}(-\varphi_b) \\
h_b & h_b & h_b & h_b & h_b & h_b \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix},
$$

$$\cos(\varphi) = \mathrm{c}(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \mathrm{s}(\varphi)$$

Кафедра мехатроники и робототехники Мб-КФ

Полученная система уравнений

$$
\begin{cases}
(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2 = \Delta_{ab}^2, \\
(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 + (z_a - z_c)^2 = \Delta_{ac}^2, \\
(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 + (z_b - z_c)^2 = \Delta_{bc}^2, \\
(x_a - \mathbf{A}_{1,1})^2 + (y_a - \mathbf{A}_{2,1})^2 + (z_a - \mathbf{A}_{3,1})^2 = \mathbf{L}_1^2, \\
(x_b - \mathbf{A}_{1,2})^2 + (y_b - \mathbf{A}_{2,2})^2 + (z_b - \mathbf{A}_{3,2})^2 = \mathbf{L}_2^2, \\
(x_b - \mathbf{A}_{1,3})^2 + (y_b - \mathbf{A}_{2,3})^2 + (z_b - \mathbf{A}_{3,3})^2 = \mathbf{L}_3^2, \\
(x_c - \mathbf{A}_{1,4})^2 + (y_c - \mathbf{A}_{2,4})^2 + (z_c - \mathbf{A}_{3,4})^2 = \mathbf{L}_4^2, \\
(x_c - \mathbf{A}_{1,5})^2 + (y_c - \mathbf{A}_{2,5})^2 + (z_c - \mathbf{A}_{3,5})^2 = \mathbf{L}_5^2, \\
(x_a - \mathbf{A}_{1,6})^2 + (y_a - \mathbf{A}_{2,6})^2 + (z_a - \mathbf{A}_{3,6})^2 = \mathbf{L}_6^2.
\end{cases}
$$

$\Delta_{ab}, \Delta_{ac}, \Delta_{bc}$

– расстояние между шарнирами подвижной платформы

$\mathbf{L}_i,\ i = \overline{1..6}$

– элементы вектора обобщенных координат манипулятора

Кафедра мехатроники и робототехники М6-КФ

Координаты вспомогательной точки:

$$x_o = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \qquad y_o = \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \qquad z_o = \frac{z_a + z_b + z_c}{3}$$

Каноническое уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A = d_1 \qquad B = -d_2 \qquad C = d_3 \qquad D = -x_a d_1 + y_a d_2 - z_a d_3$$

Элементы матрицы поворота

Направляющие косинусы оси OZ

$$\cos\alpha_{oz} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta_{oz} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\gamma_{oz} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Направляющие косинусы оси OX

$$\cos\alpha_{ox} = \frac{x_a - \dfrac{x_a + x_b + x_c}{3}}{\sqrt{\left(x_a - \dfrac{x_a + x_b + x_c}{3}\right)^2 + \left(y_a - \dfrac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)^2 + \left(z_a - \dfrac{z_a + z_b + z_c}{3}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_{ox} = \frac{y_a - \dfrac{y_a + y_b + y_c}{3}}{\sqrt{\left(x_a - \dfrac{x_a + x_b + x_c}{3}\right)^2 + \left(y_a - \dfrac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)^2 + \left(z_a - \dfrac{z_a + z_b + x_c}{3}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_{ox} = \frac{z_a - \dfrac{z_a + z_b + z_c}{3}}{\sqrt{\left(x_a - \dfrac{x_a + x_b + x_c}{3}\right)^2 + \left(y_a - \dfrac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)^2 + \left(z_a - \dfrac{z_a + z_b + z_c}{3}\right)^2}},$$

Элементы матрицы поворота и вектора переноса

Направляющие косинусы оси OY

$$\cos\alpha_{oy} = \cos\beta_{oz}\cos\gamma_{ox} - \cos\gamma_{oz}\cos\beta_{ox},$$

$$\cos\beta_{oy} = \cos\gamma_{oz}\cos\alpha_{ox} - \cos\alpha_{oz}\cos\gamma_{ox},$$

$$\cos\gamma_{oy} = \cos\alpha_{oz}\cos\beta_{ox} - \cos\beta_{oz}\cos\alpha_{ox}.$$

Элементы вектора переноса

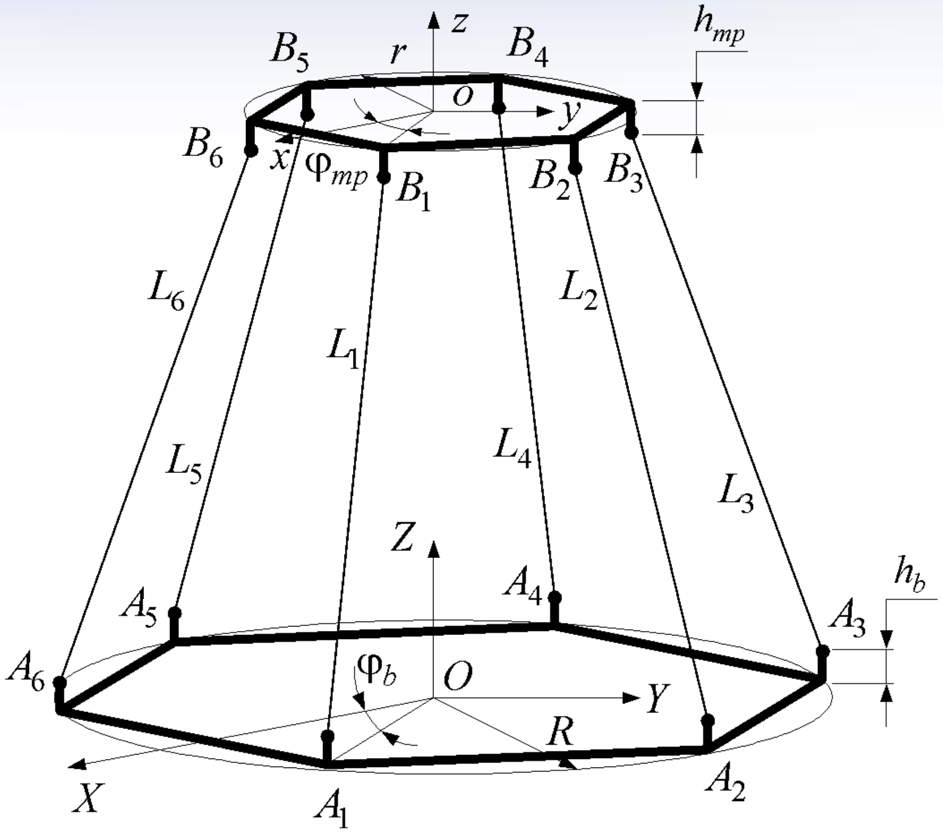
$$o\begin{pmatrix} x_o & y_o & z_o \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_a + x_b + x_c}{3} \\ \dfrac{y_a + y_b + y_c}{3} \\ \dfrac{z_a + z_b + z_c}{3} \end{bmatrix} + h_{mp}\mathbf{n}.$$

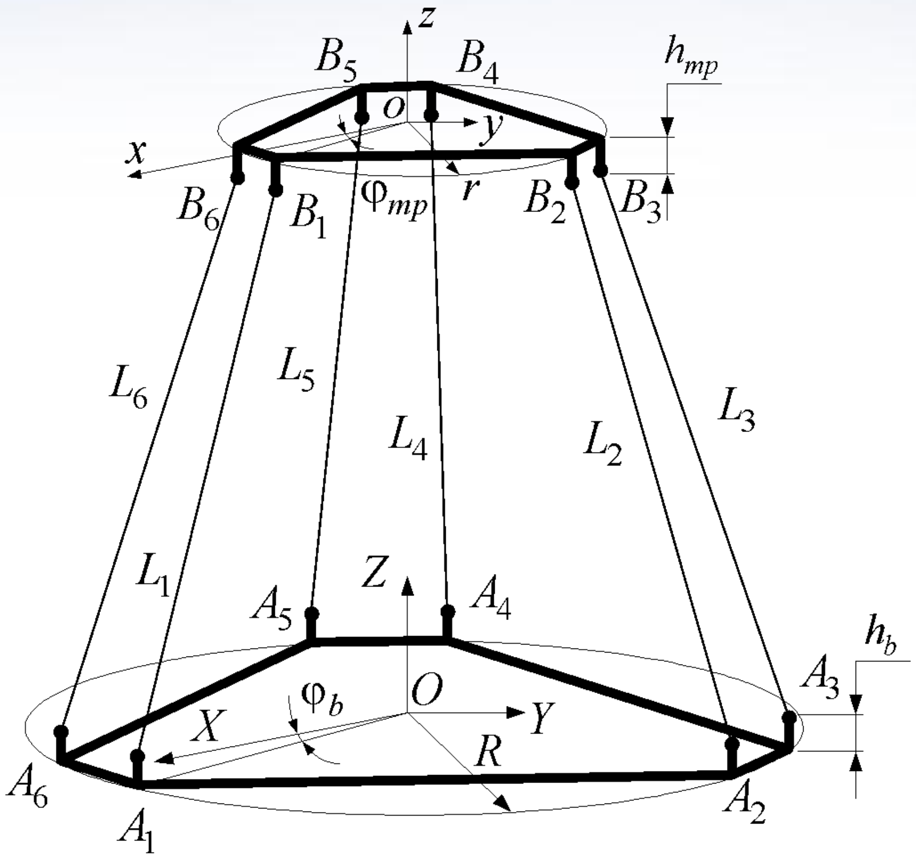
Кафедра мехатроники и робототехники
М6-КФ

Искомая матрица однородного преобразования

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ox} & \cos\alpha_{oy} & \cos\alpha_{oz} & x_o \\ \cos\beta_{ox} & \cos\beta_{oy} & \cos\beta_{oz} & y_o \\ \cos\gamma_{ox} & \cos\gamma_{oy} & \cos\gamma_{oz} & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

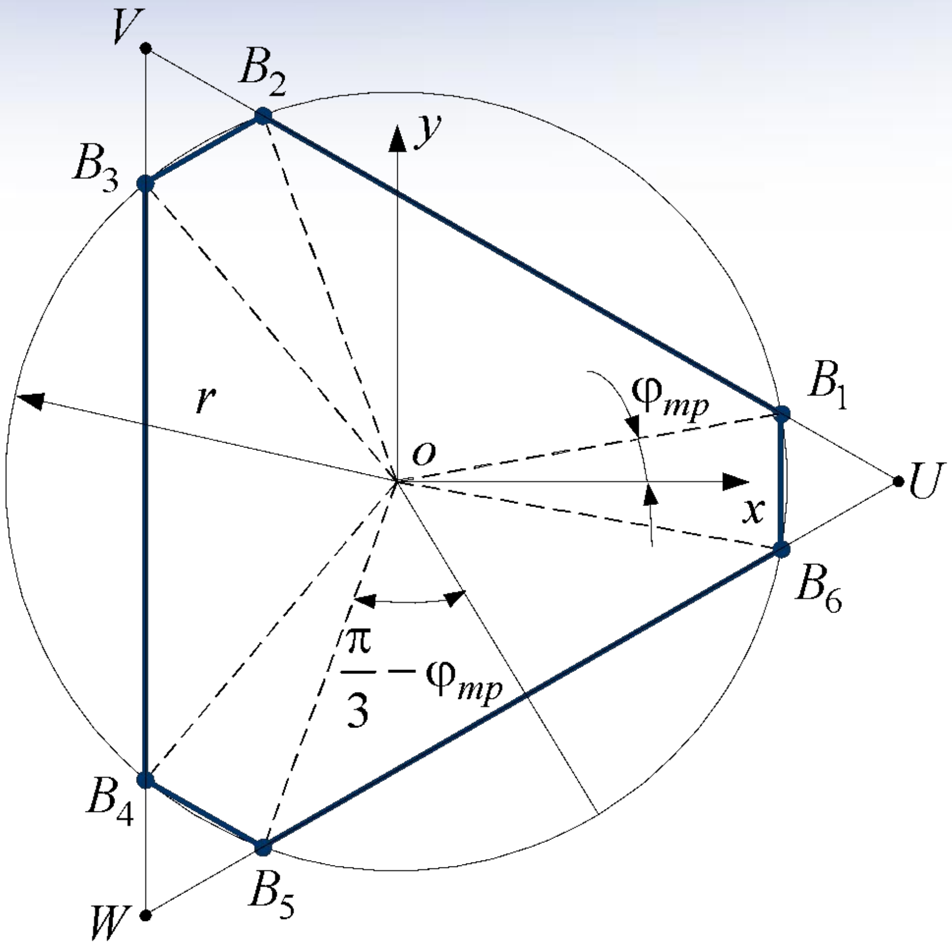
Платформа Гью-Стюарта 6-6 (Робот 6-6)





Кафедра мехатроники и робототехники М6-КФ

Введение виртуальных точек



$$WB_5 = B_6U = 2r\sin\left(\varphi_{mp}\right)$$

$$B_5B_6 = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi_{mp}\right)$$

Кафедра мехатроники и робототехники
Мб-КФ

Координаты шарниров, выраженные через виртуальные точки

$$B_1\left(x_{B_1} \quad y_{B_1} \quad z_{B_1}\right)=\left(x_U+K\left(x_V-x_U\right) \quad y_U+K\left(y_V-y_U\right) \quad z_U+K\left(z_V-z_U\right)\right),$$

$$B_2\left(x_{B_2} \quad y_{B_2} \quad z_{B_2}\right)=\left(x_V+K\left(x_V-x_U\right) \quad y_V+K\left(y_V-y_U\right) \quad z_V+K\left(z_V-z_U\right)\right),$$

$$B_3\left(x_{B_3} \quad y_{B_3} \quad z_3\right)=\left(x_V+K\left(x_W-x_V\right) \quad y_V+K\left(y_W-y_V\right) \quad z_V+K\left(z_W-z_V\right)\right),$$

$$B_4\left(x_{B_4} \quad y_{B_4} \quad z_{B_4}\right)=\left(x_W+K\left(x_V-x_W\right) \quad y_W+K\left(y_V-y_W\right) \quad z_W+K\left(z_V-z_W\right)\right),$$

$$B_5\left(x_{B_5} \quad y_{B_5} \quad z_{B_5}\right)=\left(x_W+K\left(x_U-x_W\right) \quad y_W+K\left(y_U-y_W\right) \quad z_W+K\left(z_U-z_W\right)\right),$$

$$B_6\left(x_{B_6} \quad y_{B_6} \quad z_{B_6}\right)=\left(x_U+K\left(x_W-x_U\right) \quad y_U+K\left(y_W-y_U\right) \quad z_U+K\left(z_W-z_U\right)\right),$$

Коэффициент линейной пропорциональности

$$K=\frac{r\sin\left(\varphi_{mp}\right)}{2r\sin\left(\varphi_{mp}\right)+r\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi_{mp}\right)}$$

Кафедра мехатроники и робототехники М6-КФ

$$
\begin{cases}
\left(x_U - x_V\right)^2 + \left(y_U - y_V\right)^2 + \left(z_U - z_V\right)^2 = \Delta_{UV}^2, \\
\left(x_U - x_W\right)^2 + \left(y_U - y_W\right)^2 + \left(z_U - z_W\right)^2 = \Delta_{UW}^2, \\
\left(x_V - x_W\right)^2 + \left(y_V - y_W\right)^2 + \left(z_V - z_W\right)^2 = \Delta_{VW}^2, \\
\left(\mathbf{C}_{1,1} - \mathbf{A}_{1,1}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{2,1} - \mathbf{A}_{2,1}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{3,1} - \mathbf{A}_{3,1}\right)^2 = \mathbf{L}_1^2, \\
\left(\mathbf{C}_{1,2} - \mathbf{A}_{1,2}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,2}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{3,2} - \mathbf{A}_{3,2}\right)^2 = \mathbf{L}_2^2, \\
\left(\mathbf{C}_{1,3} - \mathbf{A}_{1,3}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{2,3} - \mathbf{A}_{2,3}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{3,3} - \mathbf{A}_{3,3}\right)^2 = \mathbf{L}_3^2, \\
\left(\mathbf{C}_{1,4} - \mathbf{A}_{1,4}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{2,4} - \mathbf{A}_{2,4}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{3,4} - \mathbf{A}_{3,4}\right)^2 = \mathbf{L}_4^2, \\
\left(\mathbf{C}_{1,5} - \mathbf{A}_{1,5}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{2,5} - \mathbf{A}_{2,5}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{3,5} - \mathbf{A}_{3,5}\right)^2 = \mathbf{L}_5^2, \\
\left(\mathbf{C}_{1,6} - \mathbf{A}_{1,6}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{2,6} - \mathbf{A}_{2,6}\right)^2 + \left(\mathbf{C}_{3,6} - \mathbf{A}_{3,6}\right)^2 = \mathbf{L}_6^2.
\end{cases}
$$

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix}
x_{B_1} & x_{B_2} & x_{B_3} & x_{B_4} & x_{B_5} & x_{B_6} \\
y_{B_1} & y_{B_2} & y_{B_3} & y_{B_4} & y_{B_5} & y_{B_6} \\
z_{B_1} & z_{B_2} & z_{B_3} & z_{B_4} & z_{B_5} & z_{B_6} \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}.
$$

Элементы матрицы поворота

Направляющие косинусы оси OZ

$$\cos\alpha_{oz} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta_{oz} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\gamma_{oz} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Направляющие косинусы оси OX

$$\cos\alpha_{ox} = \frac{x_U - \dfrac{x_U + x_V + x_W}{3}}{\sqrt{\left(x_U - \dfrac{x_U + x_V + x_W}{3}\right)^2 + \left(y_U - \dfrac{y_U + y_V + y_W}{3}\right)^2 + \left(z_U - \dfrac{z_U + z_V + z_W}{3}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_{ox} = \frac{y_U - \dfrac{y_U + y_V + y_W}{3}}{\sqrt{\left(x_U - \dfrac{x_U + x_V + x_W}{3}\right)^2 + \left(y_U - \dfrac{y_U + y_V + y_W}{3}\right)^2 + \left(z_U - \dfrac{z_U + z_V + z_W}{3}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_{ox} = \frac{z_U - \dfrac{z_U + z_V + z_W}{3}}{\sqrt{\left(x_U - \dfrac{x_U + x_V + x_W}{3}\right)^2 + \left(y_U - \dfrac{y_U + y_V + y_W}{3}\right)^2 + \left(z_U - \dfrac{z_U + z_V + z_W}{3}\right)^2}},$$

Элементы матрицы поворота и вектора переноса

Направляющие косинусы оси OY

$$\cos\alpha_{oy} = \cos\beta_{oz}\cos\gamma_{ox} - \cos\gamma_{oz}\cos\beta_{ox},$$

$$\cos\beta_{oy} = \cos\gamma_{oz}\cos\alpha_{ox} - \cos\alpha_{oz}\cos\gamma_{ox},$$

$$\cos\gamma_{oy} = \cos\alpha_{oz}\cos\beta_{ox} - \cos\beta_{oz}\cos\alpha_{ox}.$$

Элементы вектора переноса

$$o\begin{pmatrix} x_o & y_o & z_o \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_U + x_V + x_W}{3} \\ \dfrac{y_U + y_V + y_W}{3} \\ \dfrac{z_U + z_V + z_W}{3} \end{bmatrix} + h_{mp}\mathbf{n}.$$

Искомая матрица однородного преобразования

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ox} & \cos\alpha_{oy} & \cos\alpha_{oz} & x_o \\ \cos\beta_{ox} & \cos\beta_{oy} & \cos\beta_{oz} & y_o \\ \cos\gamma_{ox} & \cos\gamma_{oy} & \cos\gamma_{oz} & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Моделирование движения механизма

Алгоритм:

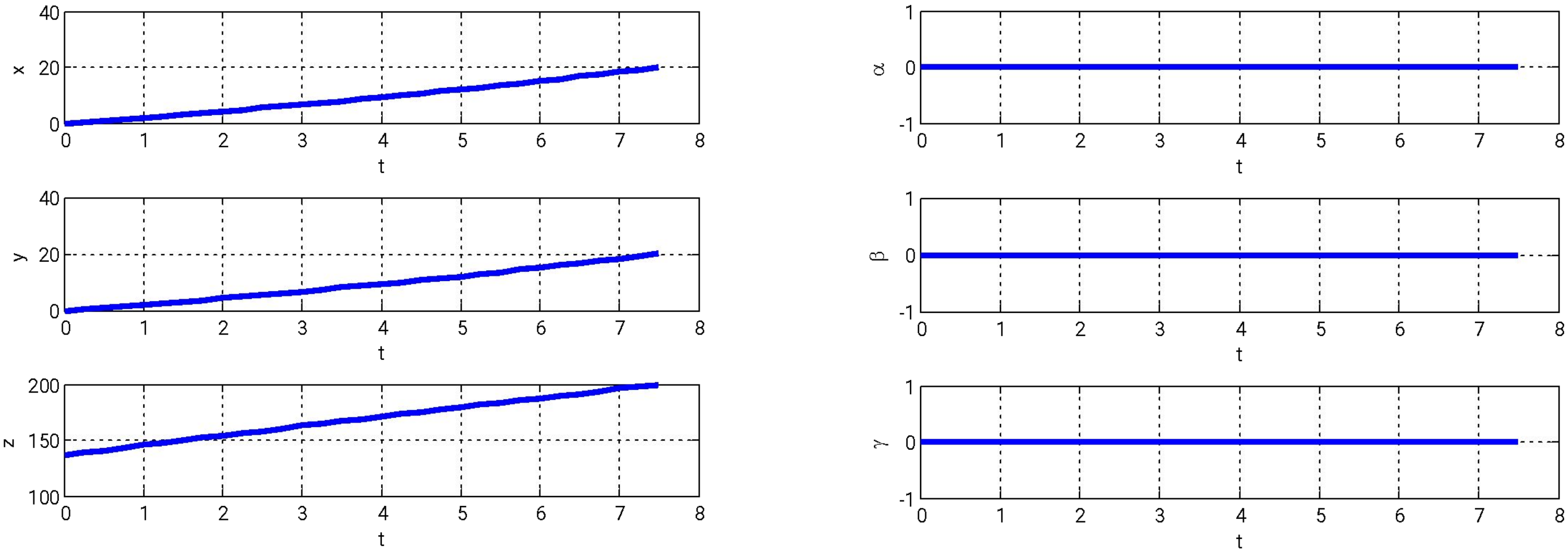
1. Выбрать закон изменения обобщенных координат.
2. Если закон непрерывный – дискретизировать.
3. Для набора дискретных значений решить прямую задачу.
4. Отобразить график движения.

Дискретный закон движения:

$$L_{i,n+1} = L_{i,n} + \frac{L_{i,f} - L_{i,s}}{N} t, n = \overline{0..N}, L_{i,0} = L_{i,s},$$

Численный пример

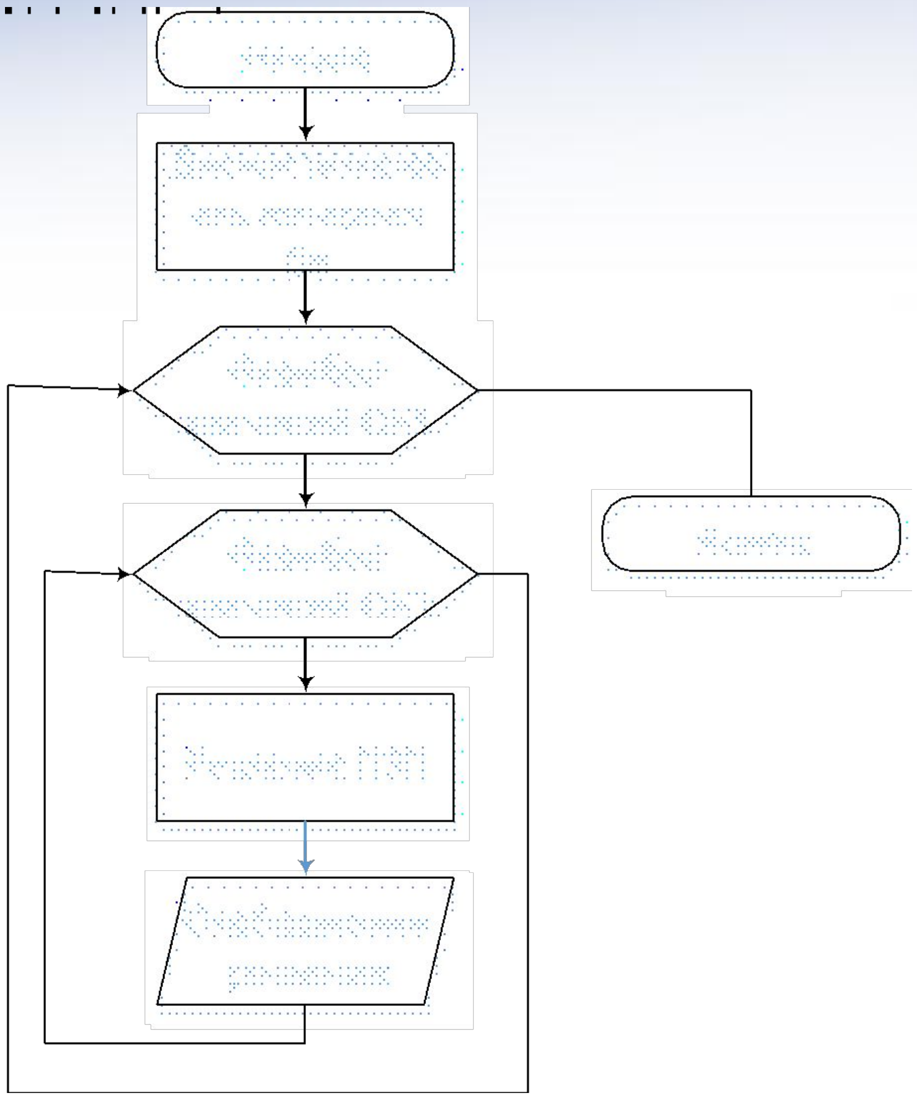
$$R = 100 \qquad r = 50 \qquad h_b = h_{mp} = 5 \qquad \varphi_b = \varphi_{mp} = \frac{\pi}{18}$$



Кафедра мехатроники и робототехники
Мб-КФ

Построение рабочей зоны механизма

Алгоритм решения:



Кафедра мехатроники и робототехники М6-КФ