

# Равномерно темперированный строй (РТС)

## Математическая модель

$$f(i) = f_0 \cdot 2^{i/12}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

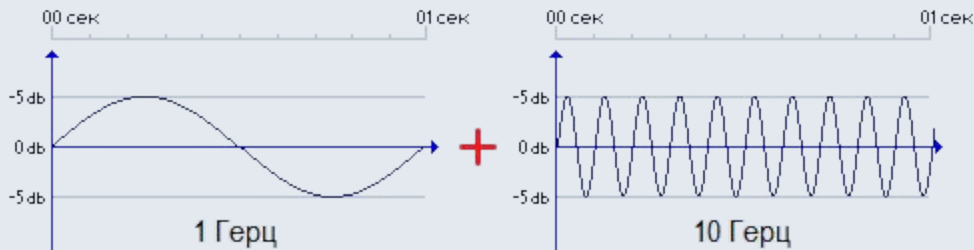
*Методическая работа преподавателя  
математики и информатики ГАПОУ МО  
«Московский областной музыкальный  
колледж имени С.С.Прокофьева»  
САСИНОВСКОГО А.Ю.*

# Звук - это колебания



**1 Герц** — одно колебание в секунду

**10 Герц** — десять колебаний за одну секунду



**Генрих Рудольф ГЕРЦ**

(1857 — 1894)  
немецкий физик

# НОТЫ и ЗВУКИ

Ноты	Суббконтр-октава	Контр-октава	Большая	Малая	Первая	Вторая	Третья	Четвертая	Пятая
<i>ДО</i>	16,35	32,70	65,41	130,82	261,63	523,26	1046,52	2093,04	4186,08
<i>ДО диез</i>	17,32	34,65	69,30	138,59	277,18	554,36	1108,72	2217,44	4434,88
<i>РЕ</i>	18,35	36,71	73,42	146,83	293,66	587,32	1174,64	2349,28	4698,56
<i>РЕ диез</i>	19,45	38,89	77,78	155,57	311,13	622,26	1244,52	2489,04	4978,08
<i>МИ</i>	20,60	41,20	82,41	164,82	329,63	659,26	1318,52	2637,04	5274,08
<i>ФА</i>	21,83	43,65	87,31	174,62	349,23	698,46	1396,92	2793,84	5587,68
<i>ФА диез</i>	23,12	46,25	92,50	185,00	369,99	739,98	1479,96	2959,92	5919,84
<i>СОЛЬ</i>	24,50	49,00	98,00	196,00	392,00	784,00	1568,00	3136,00	6272,00
<i>СОЛЬ диез</i>	25,96	51,91	103,83	207,65	415,30	830,60	1661,20	3322,40	6644,80
<i>ЛЯ</i>	27,50	55,00	110,00	220,00	440,00	880,00	1760,00	3520,00	7040,00
<i>ЛЯ диез</i>	29,14	58,27	116,54	233,08	466,16	932,32	1864,64	3729,28	7458,56
<i>СИ</i>	30,87	61,74	123,47	246,94	493,88	987,76	1975,52	3951,04	7902,08

## Основной тон - нота «Ля» первой октавы (440 Герц)

Этот «эталон» не всегда был именно таким. Ранее он был 435 Герц, а во времена Баха - 426, и даже (по некоторым свидетельствам) колебался в пределах от 396 до 465 Герц. Да и сегодня некоторые настройщики настраивают концертные рояли от «Ля» равного 441, 442 и даже 444 Герц, и некоторые духовые инструменты выпускаются со строем «Ля» равным 442, а, то, и 444 Герц.

Не случайно нота «Ля» во многих языках мира называется, или обозначается латинской буквой «А» — первой буквой алфавита, и далее все ноты идут в алфавитном порядке: В С D E F G H

# Равномерно темперированный строй

(нем. gleichschwebende temperatur, gleichschwebende stimmung)

господствующий в европейской музыке с XVIII века  
темперированный музыкальный строй, в котором  
каждая октава делится на математически равные интервалы, в  
наиболее типичном случае — на двенадцать полутонов

частоты соседних полутонов относятся как  $1 : \sqrt[12]{2}$

## Зачем?

Чтобы делать музыкальные инструменты, на которых можно играть в разных тональностях (исполнять одно и то же произведение в разных тональностях, так чтобы музыкально оно прозвучало примерно одинаково)



# «Исторические» строи



## «Пифагоров» строй

«Пифагорейский» или «Пифагоров» строй — на базе чистых октав и чистых квинт. Проблема с этим строем, в том, что используя квинтовый круг, например, от ноты «До» мы не получим ноту «До», пройдя весь круг, а некую ноту, близкую к «До» и отличающуюся от нее на «пифагорову комму».

Кроме того, расстояние между нотами не равномерно и, соответственно, этот строй не темперирован, что крайне неудобно при конструировании музыкальных инструментов



# «Исторические» строи

«ЧИСТЫЙ» — построенный на базе соотношений чистой восьмой (октавы) —  $2/1$ , чистой пятой (квинты) —  $3/2$  и мажорной третьей (большой терции) —  $5/4$

«НАТУРАЛЬНЫЙ» — построенный на базе натуральных обертонов: октавы ( $2/1$ ), квинты ( $3/2$ ), кварты ( $4/3$ ), большой терции ( $5/4$ ), малой терции ( $6/5$ ), большого целого тона ( $9/8$ ), малого целого тона ( $10/9$ ), и диатонического полутона ( $16/15$ )

Таблица 3.8.3

Интервал	Равномерно темперированная шкала		Чистая шкала		Шкала Пифагора	
	Отношения частот	Центы	Отношения частот	Центы	Отношения частот	Центы
Октава	2,000	1200	$2/1 = 2,000$	1200	2,000	1200
Квинта	1,498	700	$3/2 = 1,500$	702	1,500	702
Кварта	1,335	500	$4/3 = 1,333$	498	1,333	498
Б. терция	1,260	400	$5/4 = 1,250$	386	1,265	408
М. терция	1,189	300	$6/5 = 1,200$	316	1,184	294
Б. секста	1,682	900	$5/3 = 1,667$	884	1,687	906
М. секста	1,587	800	$8/5 = 1,600$	814	1,580	792

Чистый строй:	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Натуральный звукоряд:	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	—	$\frac{3}{2}$	—	$\frac{15}{8}$	2

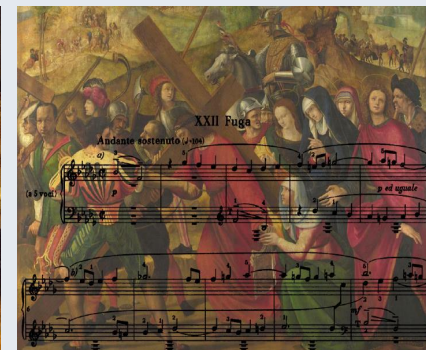
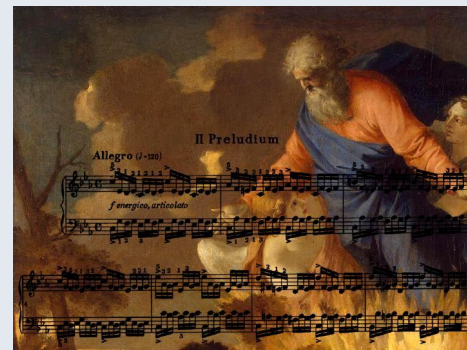
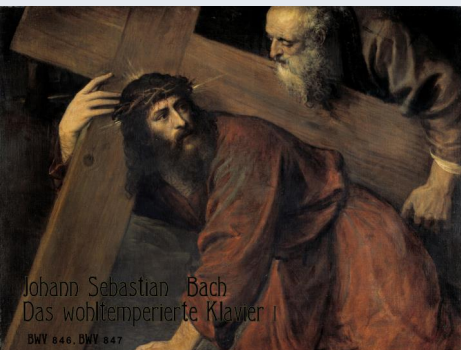
## Почему они не подошли?

И чистый, и натуральный, и "Пифагоров" строи не решали основную проблему: чистые (натуральные) соотношения, построенные от определенной ноты, не «сохранялись» при построении аналогичных соотношений от другой ноты, и не позволяли транспонировать и модулировать из одной тональности в другую, что на практике требовало постоянной перенастройки музыкальных инструментов

# РТС- «КОЛЛЕКТИВНОЕ ТВОРЧЕСТВО»

современный 12-ступенный равномерно темперированный строй

- Зародился в XVI веке как компромисс между описанными выше строями
- Свой вклад в его развитие внесли физики, акустики и математики Генрих Грамматеус, Винченцо Галилей, китайский принц Чжу Цзайюй, Симон Стевин и Андреас Веркмейстер
- На практике РТС нашел свое первое воплощение в композициях немецкого композитора и органиста Андреаса Веркмейстера и, безусловно, в сборнике Иоганна Себастьяна Баха «Хорошо темперированный клавир» (I том – 1722г. и II том - 1744г.)



# МАТЕМАТИКА

- Корень 12-й степени из 2

$$\sqrt[12]{2} = 1.0594630943593$$

VSEKORNI.RU

**= 100 Cent**

$$\sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2} \sqrt[12]{2}$$

**= 2**

если умножить это число 12 раз (число полутонов в октаве) само на себя, то получится **2**

именно в два раз относятся (по частоте) колебания одинаковых нот из соседних октав



# МАТЕМАТИКА

- Корень n-й степени

$$\sqrt[n]{a} = b$$
$$b^n = a$$

$$\sqrt[n]{a}$$

$$1) \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$2) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

$$3) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$4) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$5) \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$6) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

# МАТЕМАТИКА

- Степень с рациональным показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

## Определение

Степенью числа  $a > 0$  с рациональным показателем  $r = m/n$ , где  $m$ -целое число, а  $n$ -натуральное число ( $n > 1$ ), называется число

$$\sqrt[n]{a^m}$$

Итак, по определению

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

При  $a < 0$  рациональная степень числа  $a$  не определяется!!!



# МАТЕМАТИКА

- Возведение в отрицательную степень

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

# МАТЕМАТИКА

Пример:

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

# МАТЕМАТИКА

Формула РТС.

Вычисление частот разных звуков (нот)

$$f(i) = f_0 \cdot 2^{i/12}$$

где  $f_0$  — частота камертона (например Ля 440 Гц), а  $i$  — количество полутонов в интервале от искомого звука к эталону  $f_0$ .

$i > 0$  (искомая нота **выше** ноты-камертона)

$i < 0$  (искомая нота **ниже** ноты-камертона)

# Пример 1: МАТЕМАТИКА

- Можно вычислить частоту звука на тон (2 полутона) ниже от камертона Ля (первая октава, 440 Гц) — ноты соль:

$$f(i) = f_0 \cdot 2^{i/12}$$

$$i = -2$$

$$f(-2) = 440 \text{ Hz} \cdot 2^{-2/12} \approx 391,995 \text{ Hz}$$

# МАТЕМАТИКА

Пример 2:

Вычислить ноту Соль, но из следующей (второй) октавы:

$$i = 12 - 2 = 10$$

$$f(10) = 440 \text{ Hz} \cdot 2^{10/12} \approx 783,991 \text{ Hz}$$

# ТАБЛИЦА ИНТЕРВАЛОВ

Показывает отличия интервалов равномерно-темперированного ряда с натуральным

Интервал	Равномерно темперированные интервалы	Натуральные интервалы	Разница в центах
Прима	$\sqrt[12]{2^0} = 1 = 0 \text{ Cent}$	$\frac{1}{1} = 1 = 0 \text{ Cent}$	0
Малая секунда	$\sqrt[12]{2^1} = \sqrt[12]{2} \approx 1,059463 = 100 \text{ Cent}$	$\frac{16}{15} \approx 1,066667 \approx 111,73 \text{ Cent}$	-11,73
Большая секунда	$\sqrt[12]{2^2} = \sqrt[6]{2} \approx 1,122462 = 200 \text{ Cent}$	$\frac{9}{8} = 1,125 \approx 203,91 \text{ Cent}$	-3,91
Малая терция	$\sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2} \approx 1,189207 = 300 \text{ Cent}$	$\frac{6}{5} = 1,2 \approx 315,64 \text{ Cent}$	-15,64
Большая терция	$\sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2} \approx 1,259921 = 400 \text{ Cent}$	$\frac{5}{4} = 1,25 \approx 386,31 \text{ Cent}$	13,69
Кварта	$\sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{32} \approx 1,334840 = 500 \text{ Cent}$	$\frac{4}{3} \approx 1,333333 \approx 498,04 \text{ Cent}$	1,96
Тритон	$\sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} \approx 1,414214 = 600 \text{ Cent}$	$\frac{45}{32} \approx 1,406250 \approx 590,22 \text{ Cent}$	9,78
Квинта	$\sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128} \approx 1,498307 = 700 \text{ Cent}$	$\frac{3}{2} = 1,5 \approx 701,96 \text{ Cent}$	-1,96
Малая секста	$\sqrt[12]{2^8} = \sqrt[3]{4} \approx 1,587401 = 800 \text{ Cent}$	$\frac{8}{5} = 1,6 \approx 813,69 \text{ Cent}$	-13,69
Большая секста	$\sqrt[12]{2^9} = \sqrt[4]{8} \approx 1,681793 = 900 \text{ Cent}$	$\frac{5}{3} \approx 1,666667 \approx 884,36 \text{ Cent}$	15,64
Малая септима	$\sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[6]{32} \approx 1,781797 = 1000 \text{ Cent}$	$\frac{16}{9} \approx 1,777778 \approx 996,09 \text{ Cent}$	3,91
Большая септима	$\sqrt[12]{2^{11}} = \sqrt[12]{2048} \approx 1,887749 = 1100 \text{ Cent}$	$\frac{15}{8} = 1,875 \approx 1088,27 \text{ Cent}$	11,73
Октава	$\sqrt[12]{2^{12}} = 2 = 1200 \text{ Cent}$	$\frac{16}{8} = 2 = 1200 \text{ Cent}$	0



# АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ «СИСТЕМЫ КООРДИНАТ»

## микротоновая музыка

Музыка с привлечением  
выразительности микротонов  
интервалов, не совпадающих с  
полутоном;  
может также считаться музыкой  
с интервалами,  
не находимыми в обычном  
12-тоновом равномерно  
темперированном строе

