Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)

Курс физики для бакалавров технических вузов

Динамика вращательного движения

Вращательное движение — движение, при котором **все точки тела движутся по окружности относительно одной и той же прямой – оси вращения**

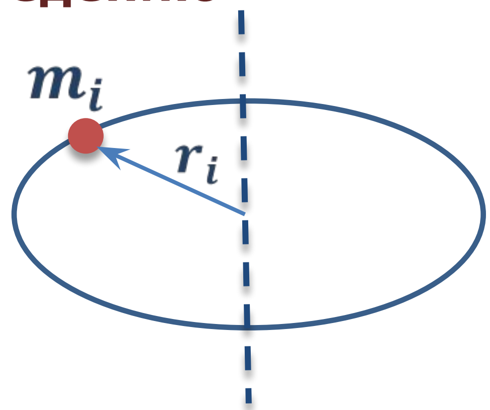
Характеристики и законы вращательного движения аналогичны законам поступательного движения

- **Момент инерции**
- **Момент импульса**
- **Момент силы**
- **Основное уравнение вращательного движения**
- **Сопоставление характеристик поступательного и вращательного движений**

Момент инерции

Момент инерции

- **динамический параметр вращательного движения**
- физическая величина, равная **произведению массы МТ на квадрат расстояния от этой точки до оси вращения**



Момент инерции **материальной точки (МТ) относительно оси**

$$J = mr^2$$

***r* – расстояние от точки до оси вращения**

Момент инерции **системы МТ относительно оси, проходящей через его центр масс**

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Случай непрерывного распределения масс:

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

$$dm = \rho dV$$

$[J]$ = кг · м^2

Свойства момента инерции

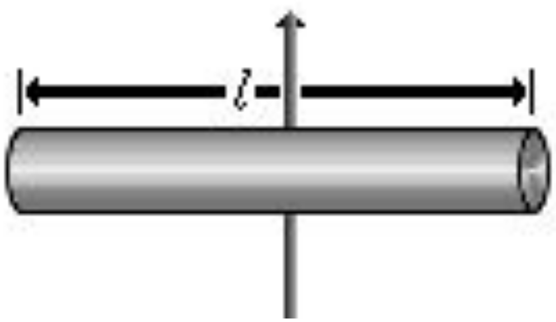
Момент инерции тела $$J = mr^2$$

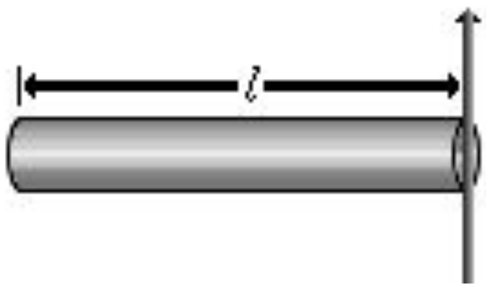
в динамике вращательного движения **играет ту же роль, что и масса** в динамике поступательного движения

Масса – внутреннее свойство данного тела, не зависящая от его движения

но момент инерции тела **зависит от того, вокруг какой оси оно вращается**

для разных осей вращения моменты инерции одного и того же тела различны





Момент инерции цилиндра

Момент инерции **однородного сплошного цилиндра (тонкого диска) относительно геометрической оси**

Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры:

- **бесконечно малая толщина** dr
- **внутренний радиус** r
- **внешний радиус** $r + dr$

$$V = 2\pi r \cdot h dr$$

$$dm = \boxed{2\pi r \cdot h dr} \cdot \rho$$

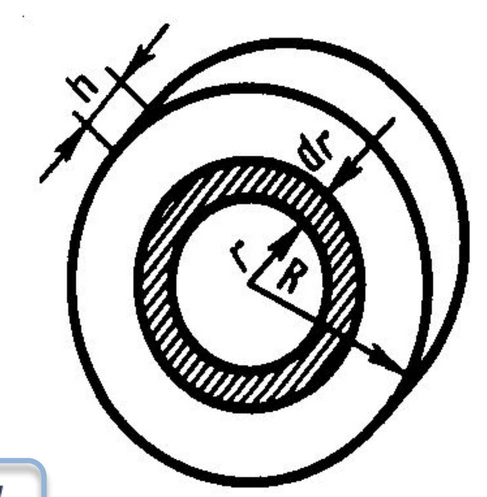


рис. диска

Рассчитаем момент инерции каждого малого полого **цилиндра**

Расстояние всех точек малого **цилиндра от оси равно** r

$$dr \ll r \Rightarrow dJ = r^2 dm$$

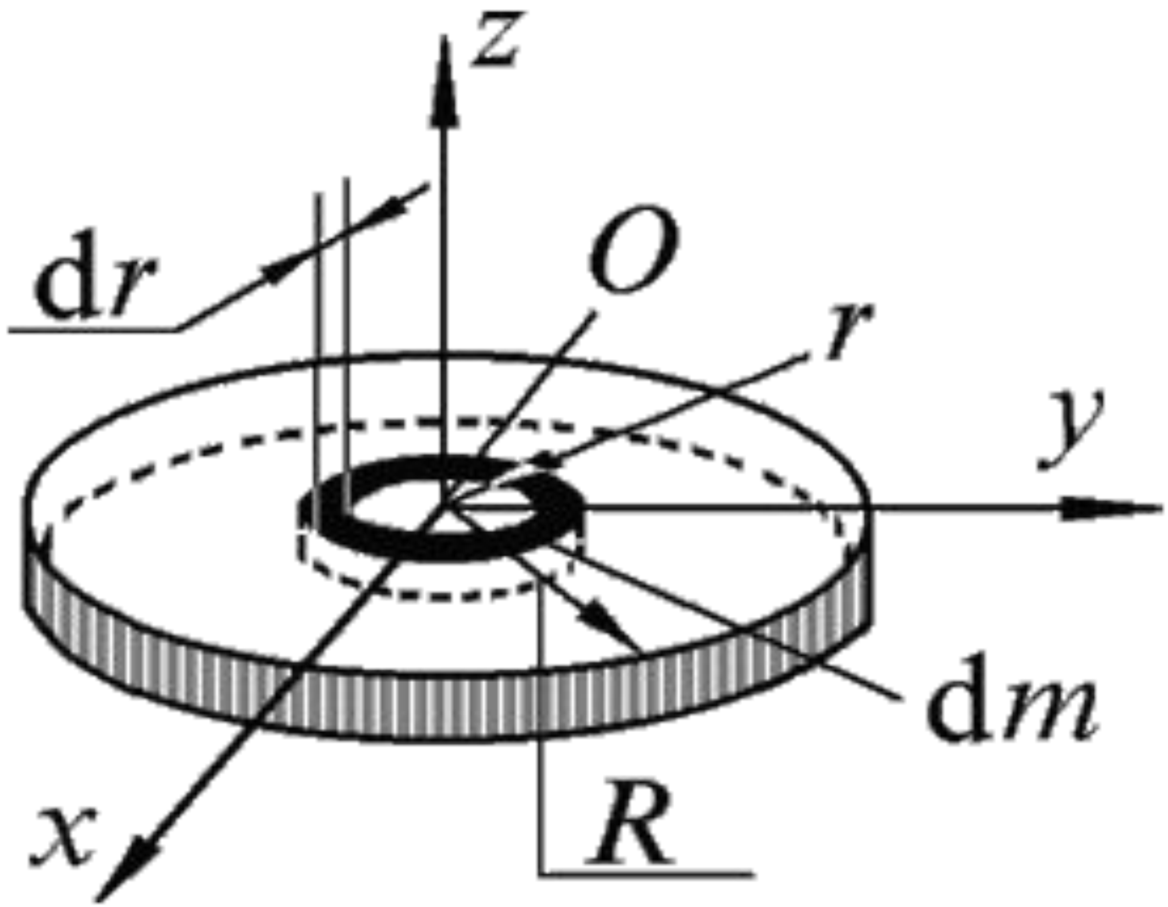
$$J = \int_0^R r^2 \cdot \boxed{2\pi r h \rho dr} =$$

масса сплошного цилиндра

$$m = \pi R^2 \cdot h \cdot \rho$$

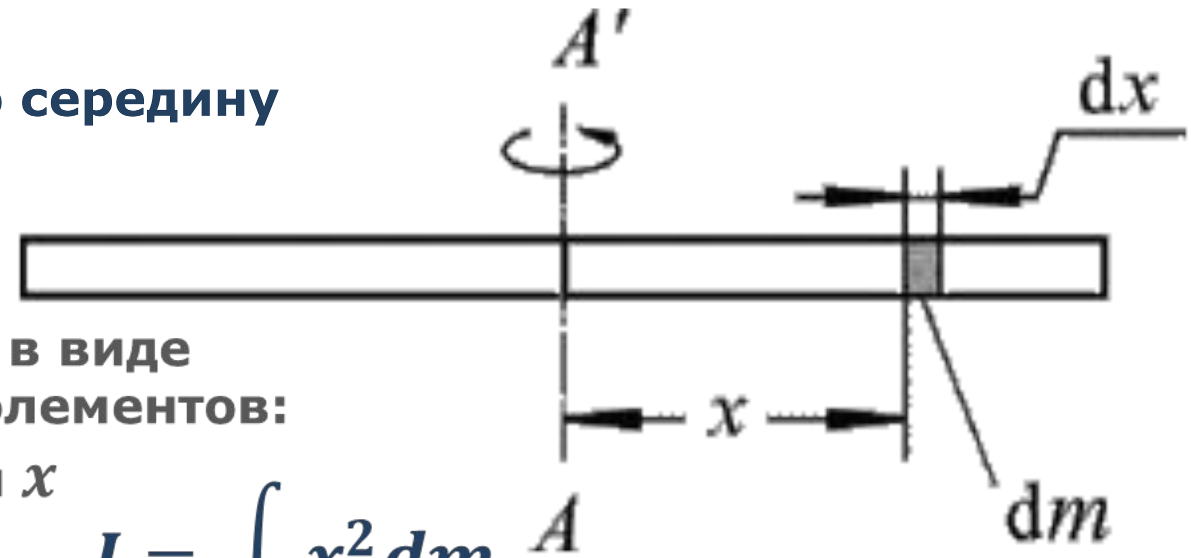
$$\boxed{J = \frac{1}{2} m R^2}$$

Представление диска в виде набора тонких колец



Момент инерции однородного стержня

Относительно оси, проходящей через его середину



Представим стержень в виде совокупности малых элементов:

- на расстоянии от оси x
- размерами dx
- массой dm

$$J = \int_m x^2 dm$$

$$dm = \rho dV =$$

$$J = 2\int_0^{l/2} x^2 \cdot \frac{m}{l} dx = \frac{2m}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx \Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{12} m l^2}$$

Главные оси инерции

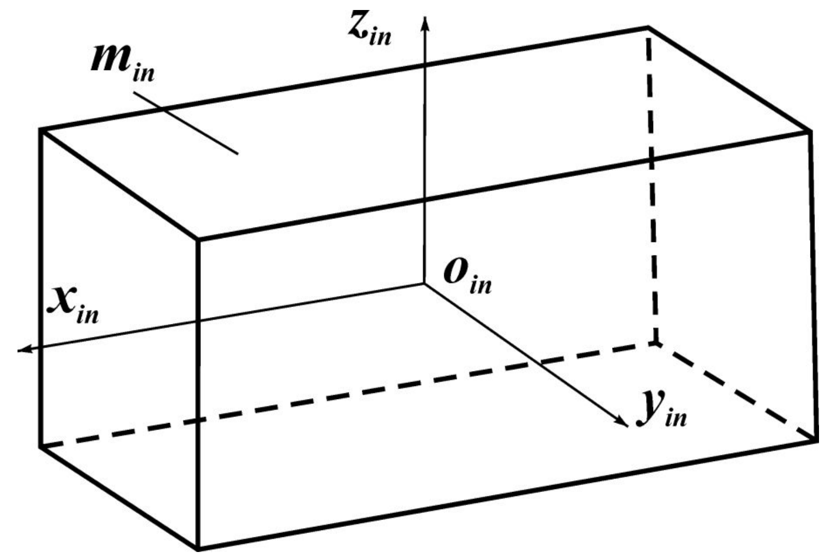
Главные (свободные) оси инерции — 3 взаимно перпендикулярные оси координат, относительно которых моменты инерции не равны нулю

Главные моменты инерции — моменты инерции тела относительно главных осей

$$J_x \qquad J_y \qquad J_z$$

Центральные главные оси инерции — главные оси инерции, проходящие через центр масс тела

В отсутствие момента внешних сил относительно центра масс **тело может неограниченно долго вращаться вокруг свободных осей,** при этом **положение осей остается неизменным** в пространстве с течением времени

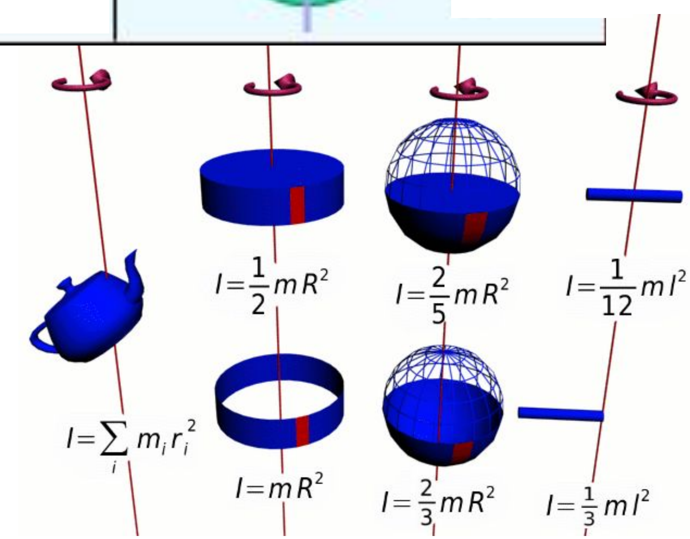


Примеры моментов инерции тел

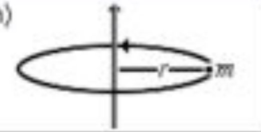
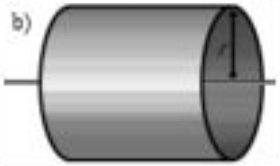
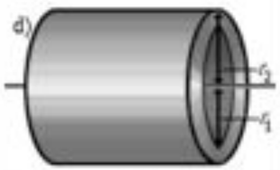
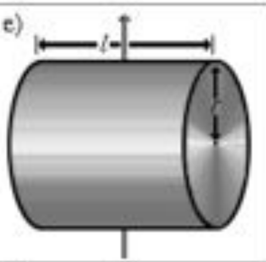
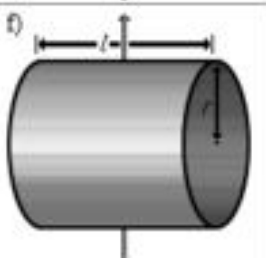
Моменты инерции симметричных однородных тел относительно оси, проходящей через центр масс

Физический смысл момента инерции тела:

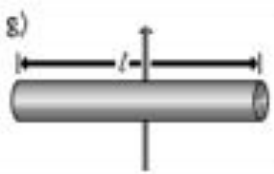
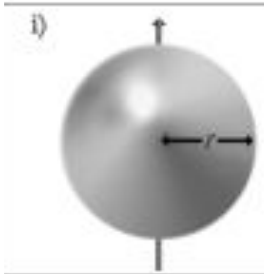
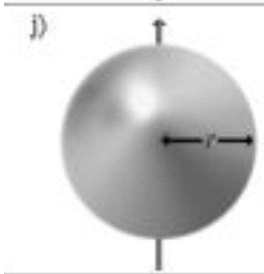
Момент инерции показывает насколько легко раскрутить и остановить тело



Моменты инерции однородных тел

Тело	Описание	Положение оси *a*	Момент инерции J_a
a) 	Материальная точка массы m	На расстоянии r от точки, неподвижная	mr^2
b) 	Полый тонкостенный цилиндр (кольцо) радиуса r и массы m	Ось цилиндра	mr^2
c) 	Сплошной цилиндр (диск) радиуса r и массы m	Ось цилиндра	$\frac{1}{2}mr^2$
d) 	Сплошной цилиндр массы m с внешним радиусом r_2 и внутренним радиусом r_1	Ось цилиндра	$m\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$
e) 	Сплошной цилиндр длины l, радиуса r и массы m	Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину	$\frac{1}{4}m \cdot r^2 + \frac{1}{12}m \cdot l^2$
f) 	Полый тонкостенный цилиндр (кольцо) длины l, радиуса r и массы m	Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину	$\frac{1}{2}m \cdot r^2 + \frac{1}{12}m \cdot l^2$

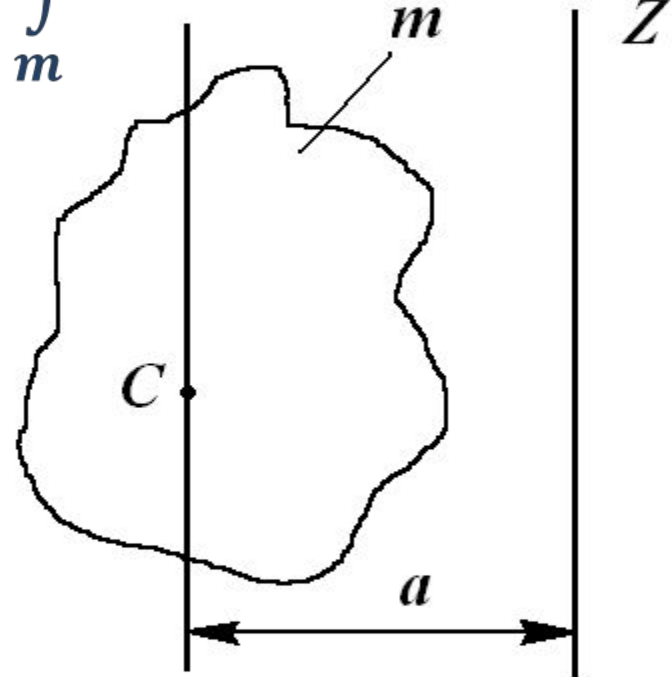
Моменты инерции однородных тел относительно некоторых осей вращения

Тело	Описание	Положение оси a	Момент инерции J_a
	**Прямой тонкий стержень длины *l* и массы *m***	**Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину**	$\frac{1}{12}ml^2$
	**Прямой тонкий стержень длины *l* и массы *m***	**Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец**	$\frac{1}{3}ml^2$
	**Тонкостенная сфера радиуса *r* и массы *m***	**Ось проходит через центр сферы**	$\frac{2}{3}mr^2$
	**Шар радиуса *r* и массы *m***	**Ось проходит через центр шара**	$\frac{2}{5}mr^2$
	**Конус радиуса *r* и массы *m***	**Ось конуса**	$\frac{3}{10}mr^2$

Теорема Штейнера

Момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс

$$J = \int_m r^2 dm$$



J зависит от:

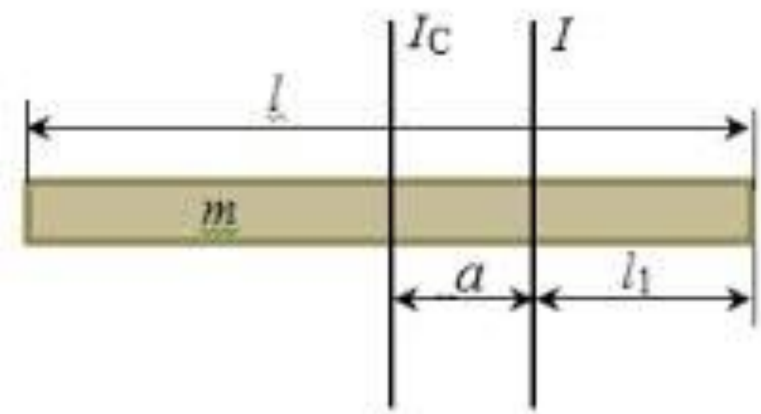
- **формы** тела
- **размеров** тела
- **распределения плотности** вещества
- **положения оси** вращения

$$\boxed{J = J_c + ma^2}$$

J – **момент инерции относительно произвольной оси вращения**

J_c – **момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс и параллельной данной**

a – **расстояние между осями**



Момент силы

Момент силы относительно неподвижной **точки**

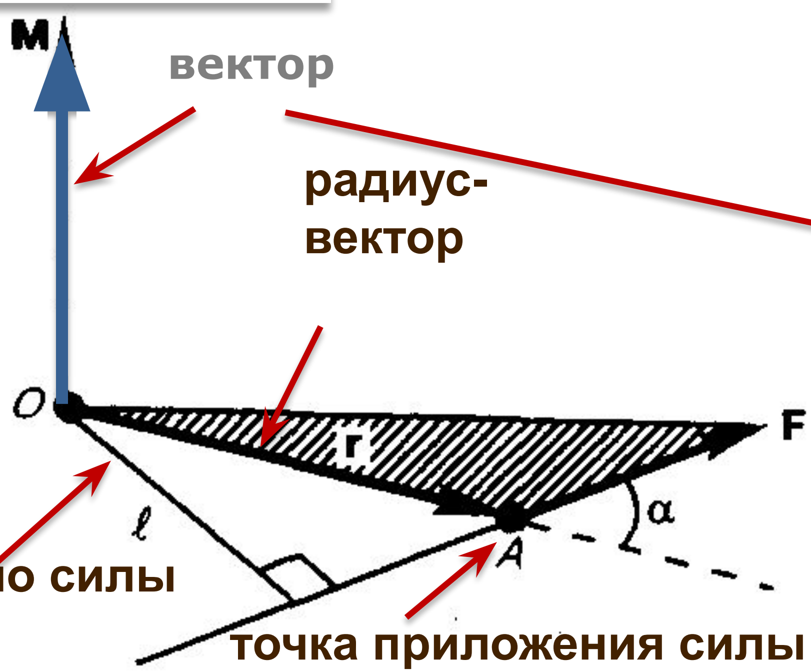
$$\overrightarrow{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$M_Z = [\vec{r}, \vec{F}]_Z$$

Момент силы относительно неподвижной **оси**

вектор

радиус-вектор

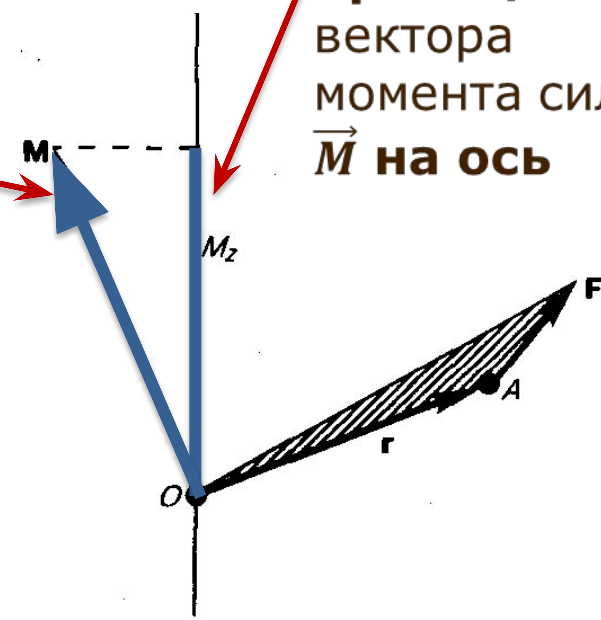


плечо силы

точка приложения силы

скаляр

проекция вектора момента силы $\overrightarrow{M}$ **на ось**



$$l = r\sin\alpha$$

$$M = F\boxed{r\sin\alpha} = Fl$$

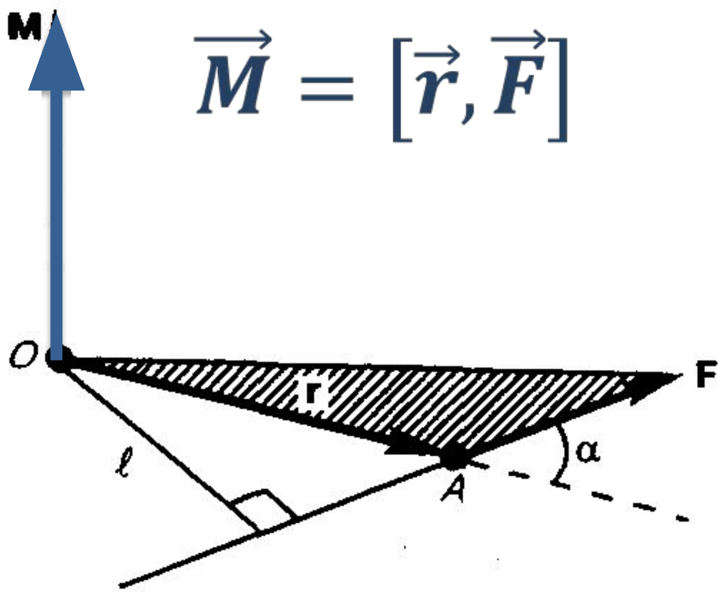
M_z ≠ f(от выбора положения т. *O* на оси z)

Момент силы

- направлен по правилу правового винта
- не изменяется, если силу переносить вдоль линии ее действия
- играет роль силы, сообщая телу угловое ускорение

Момент силы

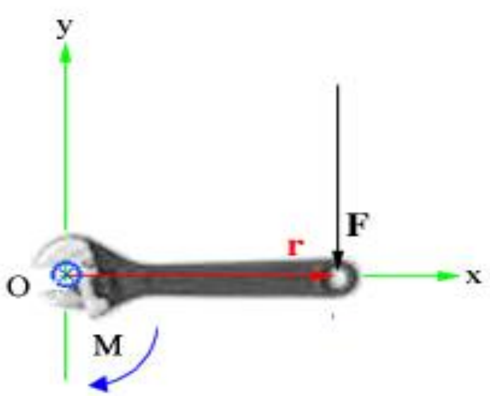
Принцип суперпозиции для момента силы



$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Если $$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

то $$\vec{M} = \sum \vec{M}_i$$



Физический смысл момента силы:

Момент силы характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он берется

Момент силы относительно оси характеризует способность силы вращать тело вокруг этой оси

Момент импульса

Момент импульса МТ
относительно неподвижной **т.О**

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]}$$

$$L = rp \cdot \sin\alpha$$

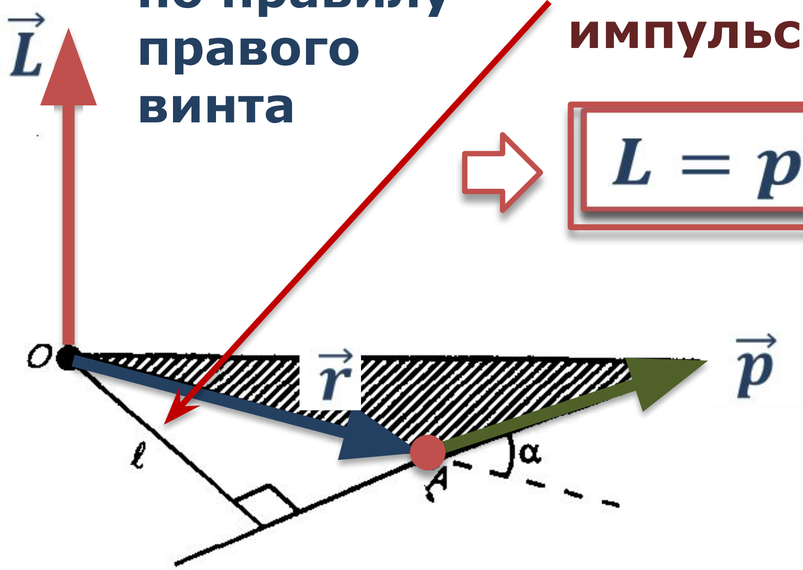
вектор

$$l = r\sin\alpha$$

по правилу правого винта

плечо импульса

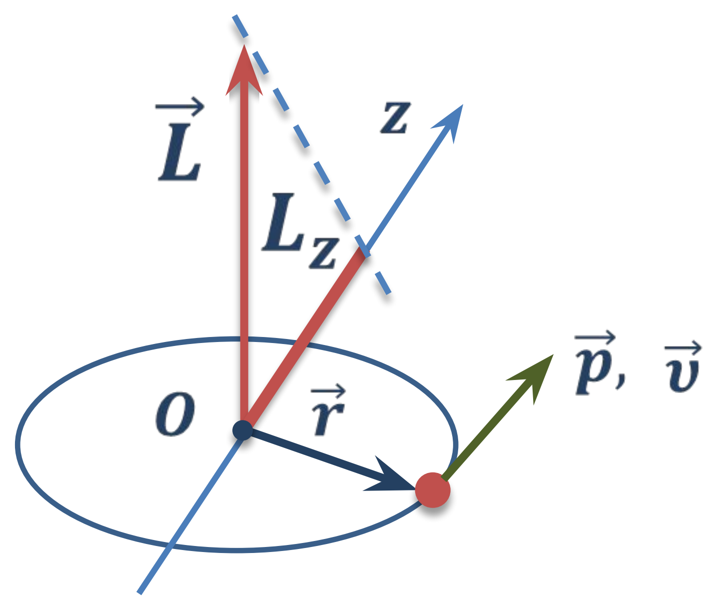
$$\Rightarrow \boxed{L = pl}$$



Момент импульса МТ
относительно неподвижной **оси**

проекция на ось вектора момента импульса

скаляр



Точка вращается по окружности:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

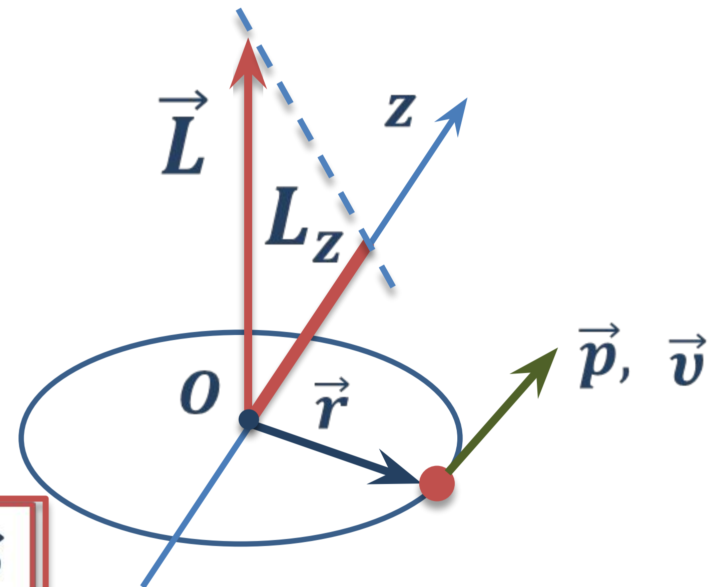
для МТ:

$$\Rightarrow \boxed{L_z = mvr}$$

$$\boxed{L_z = m\omega r^2}$$

Момент импульса системы МТ

Каждая точка системы МТ (тела) вращается по окружности:



Момент инерции относительно **точки:**

$\vec{L}$ **– величина аддитивная**

$$\boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]}$$

$$\boxed{\vec{L} = J\vec{\omega}}$$

Момент инерции относительно **оси:**

Угловые скорости всех точек равны

момент импульса ТТ относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость

$$L_i = m_i \omega r_i^2 = J_i \omega$$

$$\boxed{L = m\omega r^2 = J\omega}$$

$$L_z = L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \omega \sum_{i=1}^{n} J_i = J\omega$$

$[L]$ = кг·м²/с

$$\boxed{L = J\omega}$$

Уравнение вращательного движения

Момент импульса системы МТ относительно **точки**

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

Момент импульса каждой точки системы МТ

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

Возьмет производную по времени

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} =$$

$$= 0$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \boxed{[\vec{v}_i \times \vec{p}_i]} + [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\,\text{внеш}}$$

Уравнение вращательного движения

Для тела, вращающегося относительно оси z

$$\boxed{L_z = m\omega r^2 = J_z\omega}$$

Возьмем производную по времени

$$\frac{dL_z}{dt} =$$

$$\Rightarrow \boxed{M_z = J_z\varepsilon}$$

Момент внешних сил относительно оси равен произведению момента инерции относительно этой оси **и углового ускорения**

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$\Rightarrow$

Необходимые и достаточные **условие равновесия твердого тела**

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$

тело остается в состоянии покоя, если **нет причин, приводящих к возникновению** поступательного или вращательного **движения**

$$\vec{F} = 0$$

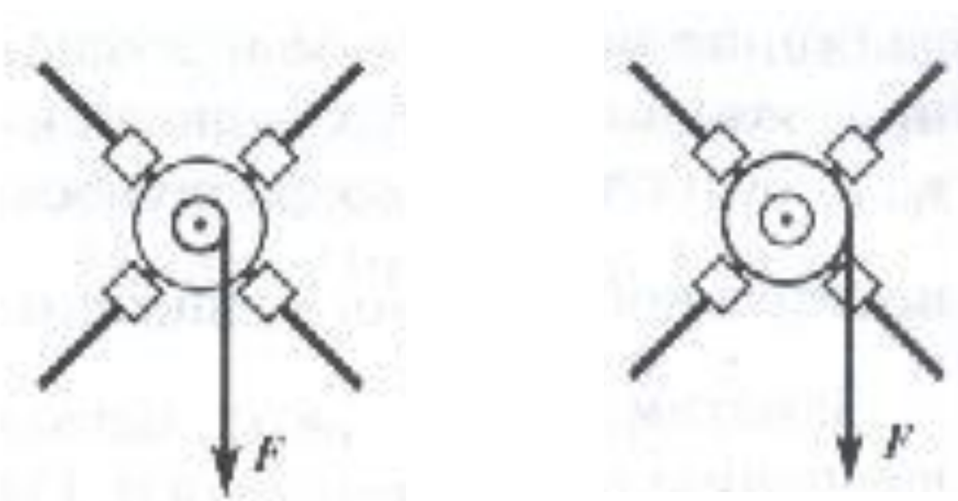
$$\vec{M} = 0$$

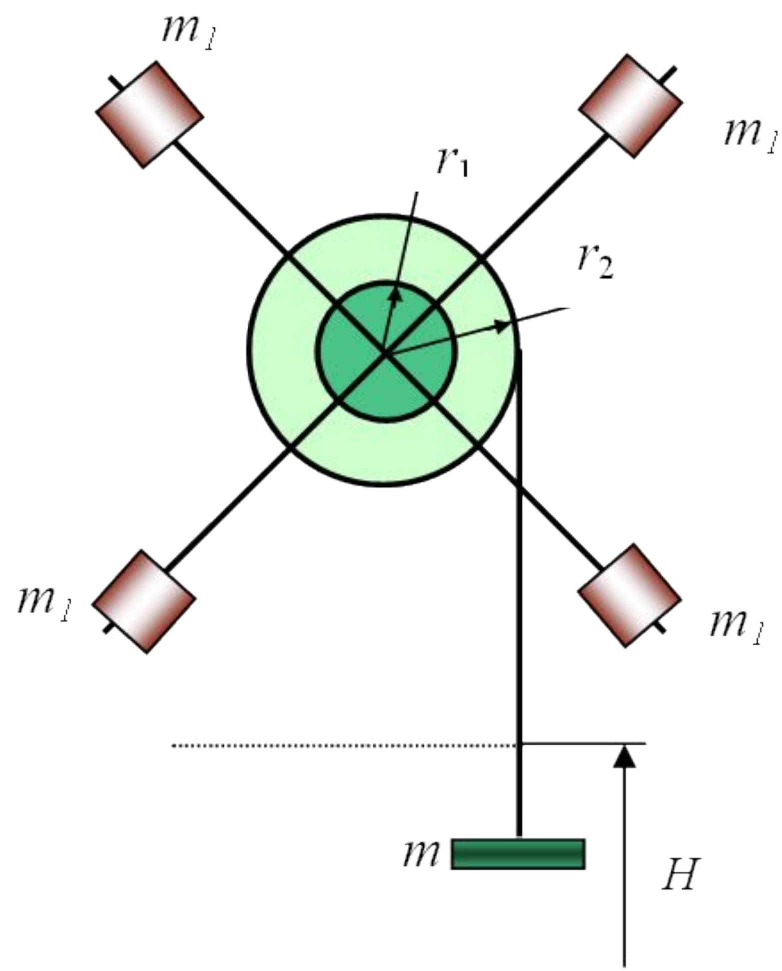
От чего зависит угловое ускорение тела?

Угловое ускорение маятника Обербека зависит от:

- **положения цилиндров на его стержнях (от момента инерции маятника)**

- **плеча вращающей силы (от момента силы)**





Сопоставление вращательного и поступательного движения

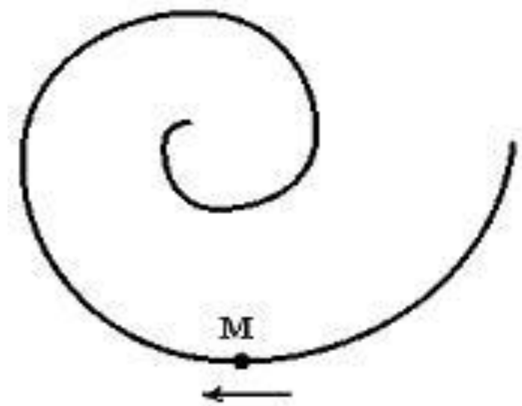
Поступательное движение	Вращательное движение
$d\vec{r}$	$d\vec{\varphi}$
$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$
m	J
$\vec{p} = m\vec{v}$	$[\vec{r}, \vec{p}],\ L_z = J_z\omega$
$\vec{F}$	$[\vec{r}, \vec{F}]$ M_z
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$

Сопоставление вращательного и поступательного движения

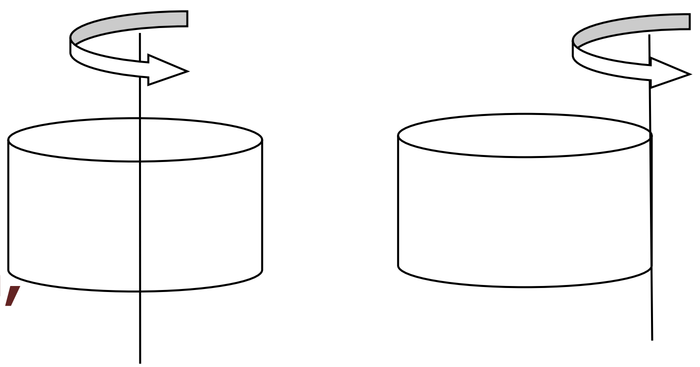
Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	$\vec{M},\ M_z$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$L_z = J_z\omega$
Основное уравнение движения	$\vec{F} = m\vec{a}$	Основное уравнение движения	$M_z = J_z\varepsilon$
Работа	$dA = F_S dS$	Работа	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия	$E_k = \frac{J_z\omega^2}{2}$

Контрольные вопросы

1. Точка М движется по спирали с равномерно возрастающей скоростью в направлении, указанном стрелкой. При этом величина полного ускорения точки …
   - увеличивается
   - уменьшается
   - не изменяется



2. Полый цилиндр вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс. Если ось вращения будет совпадать с образующей цилиндра, то его момент инерции…



3. Диск начинает вращаться вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением. Зависимость момента импульса диска от времени представлена на рисунке линией …