Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГОУ ВО Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ГРУНТОВОМ МАССИВЕ

и принцип линейной деформируемости грунтов (задачи Буссинеска, Лява, Фламана)

Новосибирск, 2018

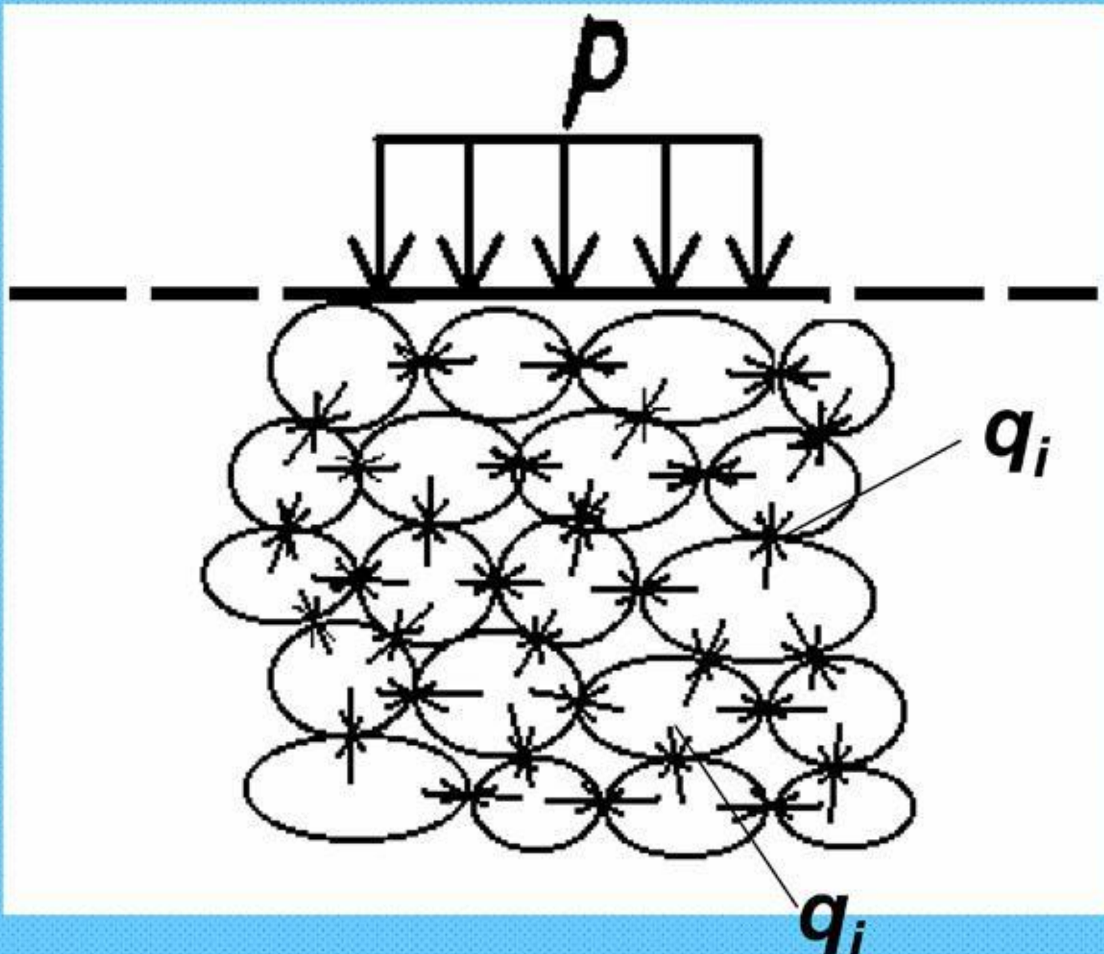
ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА НАПРЯЖЕНИЯ В ГРУНТЕ:

- инженерно-геологические и гидрогеологические условия строительной площадки;
- физико-механические свойства грунтов;
- глубина заложения подошвы фундамента;
- размеры, форма, жесткость конструкции фундамента;
- действующие нагрузки, их сочетания и характер режима нагружения фундаментов и грунтов под его подошвой;
- время действия нагрузки и пр.

ОСНОВНЫЕ РЕАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ГРУНТА:

- является неупругим материалом;
- является несплошным телом;
- является анизотропным телом (с отличающимися напряжениями по разным направлениям);
- отсутствует линейная зависимость между напряжениями и деформациями на всем периоде нагружения.

Рассеивание напряжений в массиве грунта



$\sum d\sigma_z = 0, \ \sum d\sigma_y = 0$ -условие **равновесия грунта**

Виды перемещений, происходящих в грунте

- смещение частиц и их агрегатов в сторону заполнения пор;
- выдавливание воды и воздуха из пор;
- частичная поломка частиц и связей между ними, сопровождающаяся возникновением новых контактов;
- пружинистые деформации частиц пластинчатой, чешуйчатой, игольчатой формы;
- сжатие защемленных пузырьков газа, заключенных в закрытых порах грунта;
- расплющивание гидратных оболочек пленок связной воды вокруг грунтовых частиц.

Но… действующие нормативные документы рекомендуют использовать для решения задач механики грунтов **законы теории упругости**, которые применяют к задачам о напряженно-деформированном состоянии (Н.Д.С.)

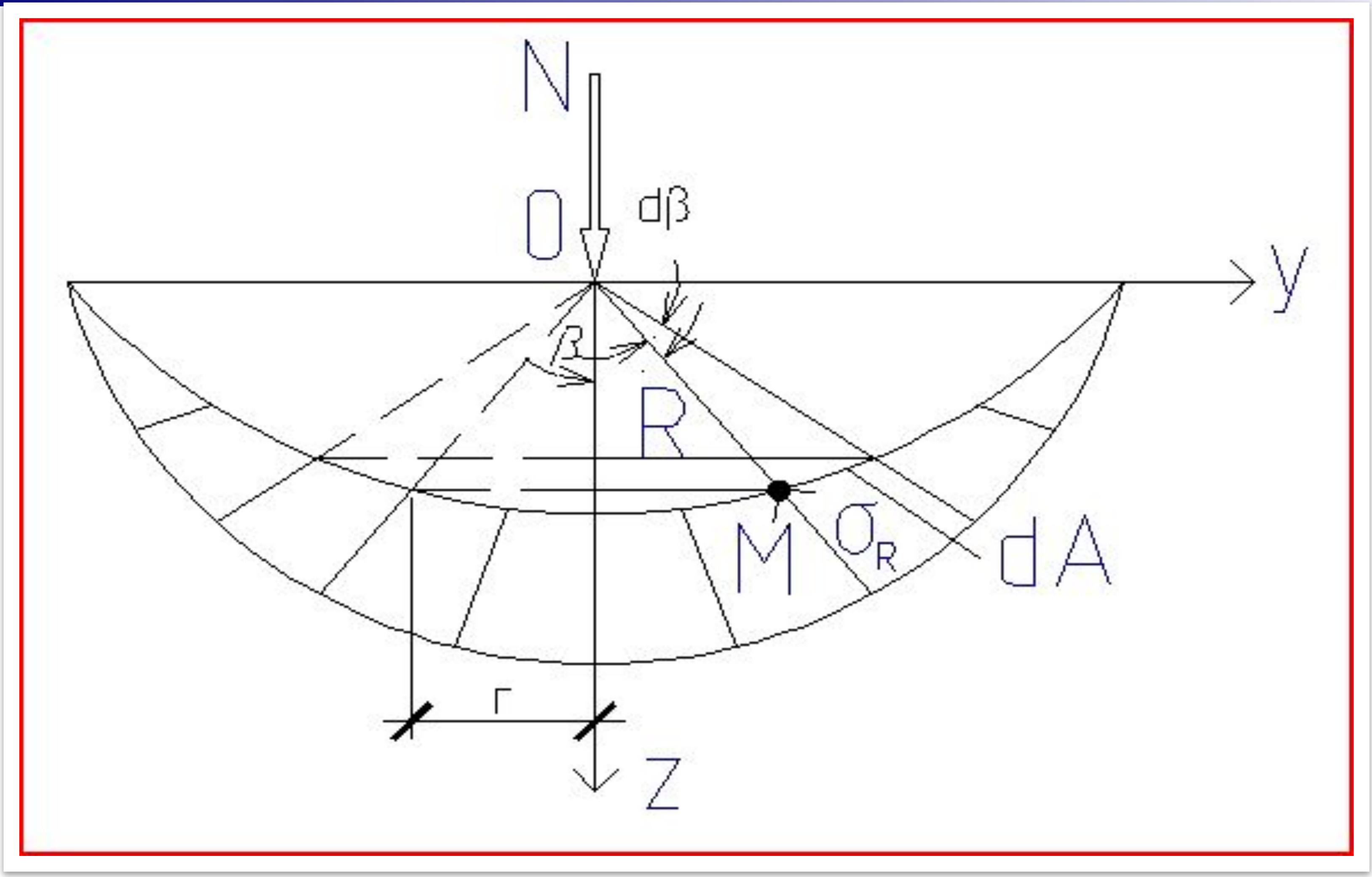
сплошных упругих изотропных тел.

Чтобы решения теории упругости можно было использовать для грунтов, приходится принимать ряд допущений, внося некоторые ограничения.

При решении задач расчета и оценки напряженно-деформированного состояния грунт рассматривают как **сплошную среду без учета промежутков между частицами.**

За величину напряжений в грунте принимают **суммарную величину реальных сил, отнесенных к единице площади сечения грунтового массива**.

Распределение напряжений рассматривают **в бесконечном, однородном, линейно-деформируемом полупространстве**, находящемся под действием внешней нагрузки и подчиняющемся закону Гука о линейной деформируемости.



Полупространство **– это** часть пространства, ограниченная плоскостью (в виде полусферы).

ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

- *грунт линейно-деформируемое тело (в пределах двух фаз);*
- ***возможность использовании теории упругости при одноразовом загружении;***
- ***условно, грунт сплошное тело;***
- ***грунт изотропное тело***

ПРИНЦИП ЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ заключается в допущении линейной связи между напряжениями и деформациями и формулируется так: **при небольших изменениях давлений можно рассматривать грунты как линейно-деформируемые тела**, т. е. с достаточной для практических целей точностью можно принимать зависимость между относительными деформациями и напряжениями для грунтов линейной. Это допущение позволяет использовать принцип внутри грунтового основания при условии: $p \leq P_1$

Определение напряжений в массиве грунта

Грунт обладает зернистостью и анизотропностью, но условно принимается, что грунт является сплошным упругим телом. При определении напряжений в массиве грунта используют законы механики для упругого сплошного тела. Насколько грунты удовлетворяют данным требованиям?

Доказательство применимости теории упругости к грунтам (*постулаты теории упругости*):

а) теория упругости считает деформации пропорциональными напряжениям; грунт с известными допущениями можно считать упругим телом;

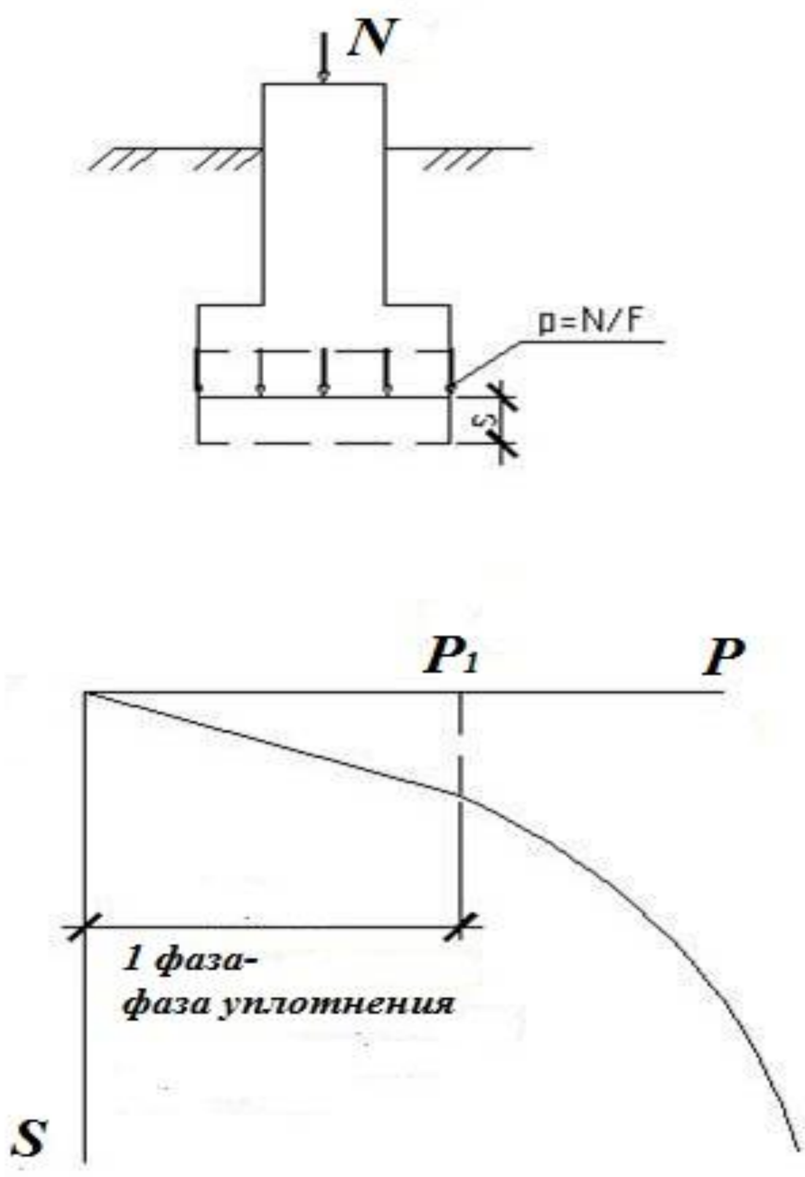
б) теория упругости рассматривает тела сплошные

в) теория упругости рассматривает тела изотропные.

С известными допущениями грунт в определенном («рабочем») диапазоне можно считать изотропным упругим телом. То есть с учетом допущений можно применять теорию упругости.

Однако, если разгрузить штамп после уплотнения грунта основания нагрузкой ***N***, еще не вызвавшей интенсивных местных сдвигов, то после полной разгрузки кривая никогда не возвратится в начало координат, т. к. грунт получает остаточные деформации, поскольку грунт не является упругим телом. Вследствие этого, решения для упругих изотропных тел можно использовать лишь при ***однократном загружении грунтового основания.***

Т. о., при определении напряжений в грунтом массиве принимают допущения, что грунт является сплошным линейно-деформируемым телом, испытывающим однократное загружение.



P_1 – 1-ая критическая нагрузка, соответствующая окончанию прямолинейного участка графика.

Предполагаем, что между осадками и нагрузкой (давлением) существует линейная связь, т. е. $p \le P_1$. Основываясь на этом, было предложено считать, что и в любой точке грунтового основания, между напряжениями и относительными деформациями существует также линейная связь (что не подтверждается опытами), т. е. величины относительной деформации ε_i определяются по формуле:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

где E – модуль общей деформации грунта; ν – коэффициент поперечной деформации.

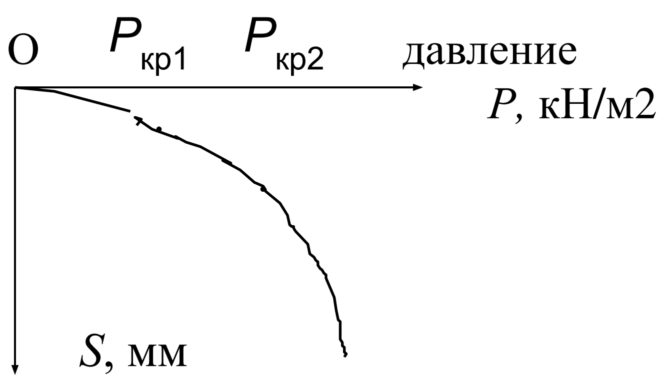


Рис. Зависимость осадок от величины давления

1. Теоретическое значение первой критической нагрузки определяется по формуле Н.П. Пузыревского – Н.М. Герсеванова:

$P_{кр1}$ = (π/ctg φ +)(h + ctg φ)+ γ h, кПа

где φ - угол внутреннего трения грунта (φ = 37°);

γ - удельный вес грунта (γ = 17,6 кН/м^3);

b – ширина подошвы штампа, м (b = 0,1 м);

h – заглубление подошвы штампа, h = 0;

c – удельная сила сцепления в грунте, c = 2 кПа.

2. Теоретическое значение второй критической (предельной) нагрузки определяется по формуле СП 22.13330-2016; при заглублении штампа h=d=0, удельном сцеплении c= 0

$P_{кр2} = N\, h\, b\, \gamma = N$

где N – безразмерный коэффициент несущей способности, зависящий от угла внутреннего трения грунта.

Задача Буссинеска - первая задача определения напряжения от действия сосредоточенной силы на линейно-деформируемое полупространство.

Модель, предложенная Буссинеском:

1. ***Линейно – деформируема*** (прослеживается линейная зависимость между величинами нагрузок и деформациями);
2. ***Однородна*** (в каждой точке свойства одинаковы);
3. ***Изотропна*** (в любом направлении свойства одинаковы).

Действие сосредоточенной силы. Задача Буссинеска.

От действия силы N во всех точках полупространства возникает сложное напряженное состояние. В каждой точке полупространства, удаленной от точки O будут действовать шесть составляющих: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}.

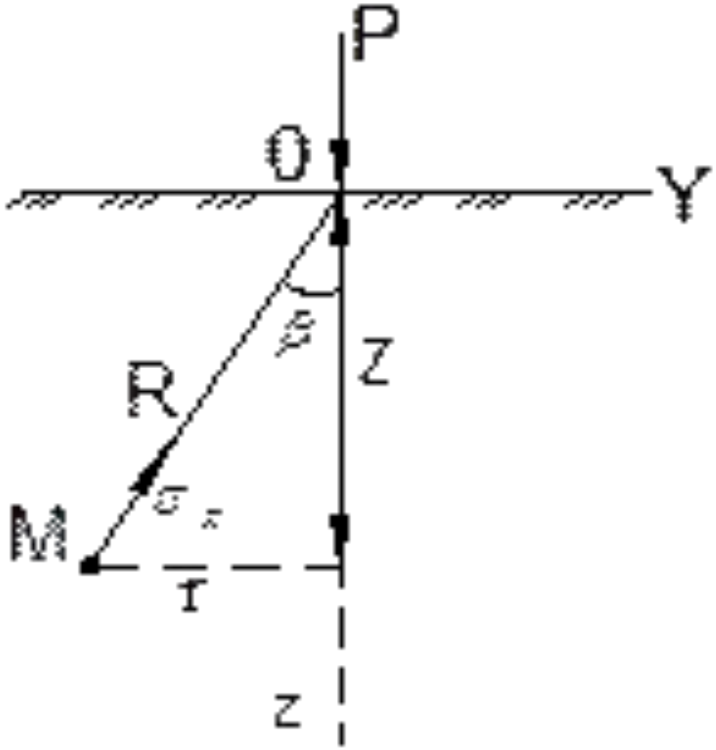


Рис.13. Схема к определению напряжений при действии сосредоточенной силы (основная задача)

1) Действие сосредоточенной силы (Задача Буссинеска) – является **основной задачей** в теории распределения напряжений в грунтах (1885 г.).

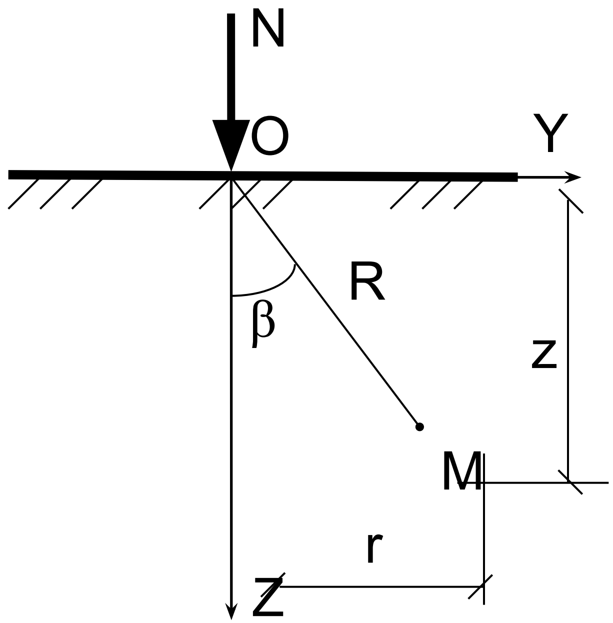


Рис. Схема к определению напряжений при действии сосредоточенной силы (основная задача)

$$\boxed{\sigma_z = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5}} \qquad (4.1)$$

$$\boxed{\sigma_z = K_\sigma \frac{N}{z^2}} \qquad (4.2)$$

где K_σ - табличный коэффициент, зависящий от соотношения r/z.

Подставляя это значение в формулу выше, получим:

$$\sigma_R = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi R^2} \cos\beta$$

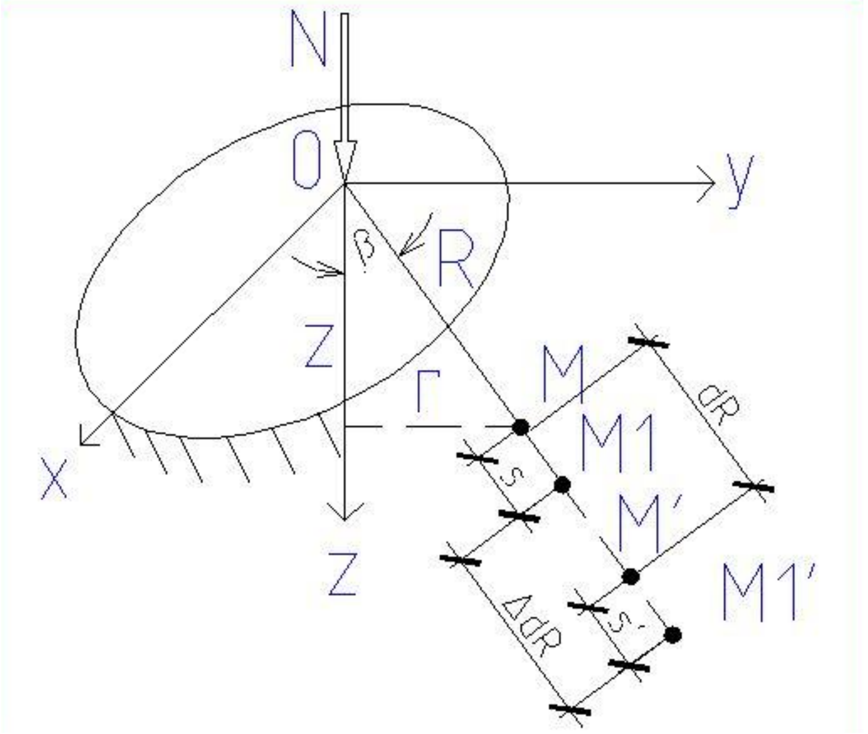
Это общая формула векторного напряжения в любой точке пространства от действия сосредоточенной нагрузки в однородных грунтах.

Отнесем величину радиальных напряжений не к площадке перпендикулярной радиусу, а к площадке, параллельной ограничивающей плоскости и составляющей с ней угол ***β***:

$$\sigma'_R = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi} \cdot \frac{z^2}{R^4}$$

Для упрощения вывода принимают как постулат, что напряжение σ_R пропорционально $\cos\beta$ и обратно пропорционально квадрату расстояния от точки приложения до сосредоточенной силы R^2. Т.о.

$$\sigma_R = A\frac{\cos\beta}{R^2}$$



где A –коэффициент, определяемый из условий равновесия:

$$A = \frac{3}{2}\cdot\frac{P}{\pi}$$

Под действием силы ***N*** точка ***M*** переместится в направлении радиуса ***R*** на величину ***S***. Чем дальше от точки ***O*** будет расположена точка ***M***, тем меньше будет ее перемещение и при ***R*** = ∞ перемещение точки ***M*** будет равно 0. Следовательно, *S* можно принять обратно пропорциональным ***R***:

$$\boxed{S = A \cdot \frac{\cos\beta}{R}}$$

где ***S*** – перемещение;

A – коэффициент пропорциональности.

Далее, не меняя направление площадки, разложим силу на три направления: одно ***z*** – перпендикулярное площадке и два ***x*** и ***y*** – лежащих в плоскости площадки.

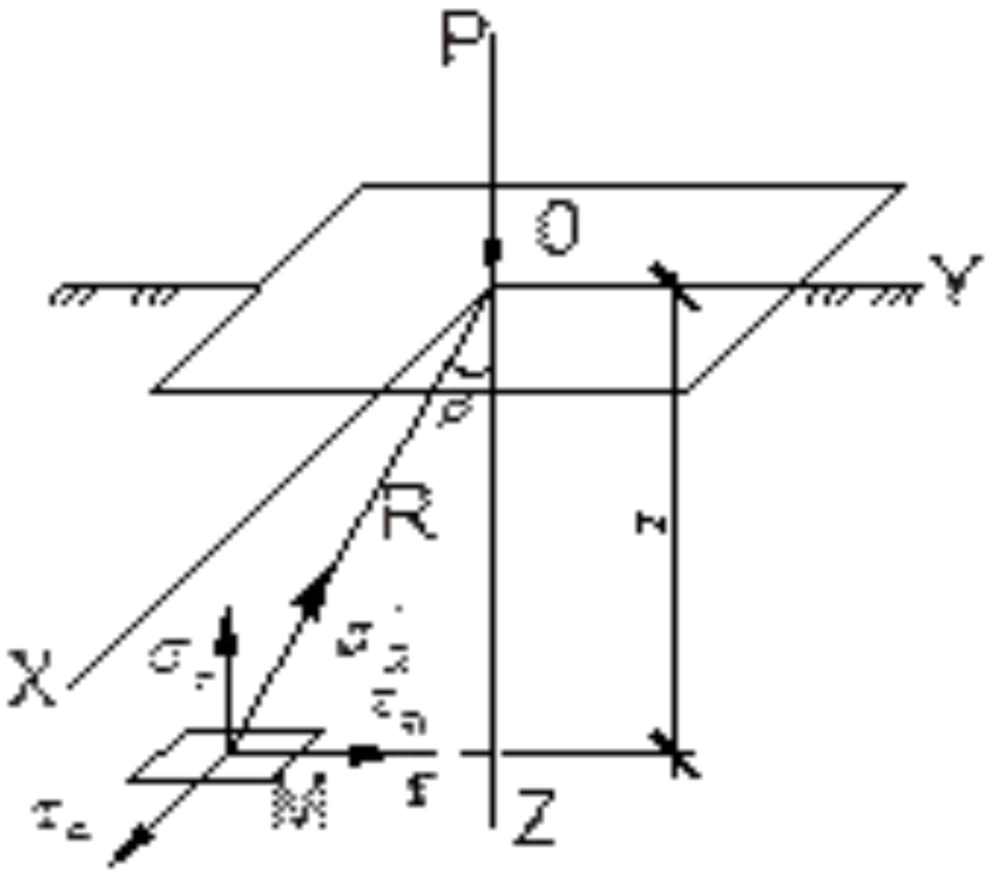


Рис.14. Определение составляющих напряжений по горизонтальной площадке

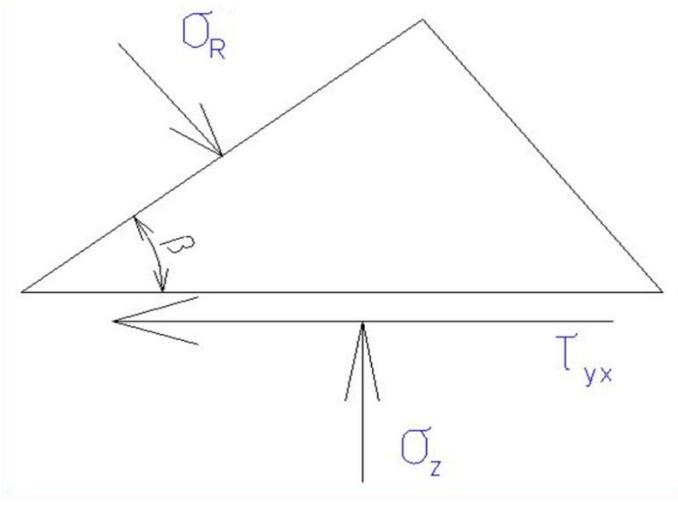
Напряженное состояние в грунтовом массиве в случае плоской задачи может также определяться через **главные напряжения** (Митчел, 1902).

Главные – это наибольшие и наименьшие нормальные напряжения.

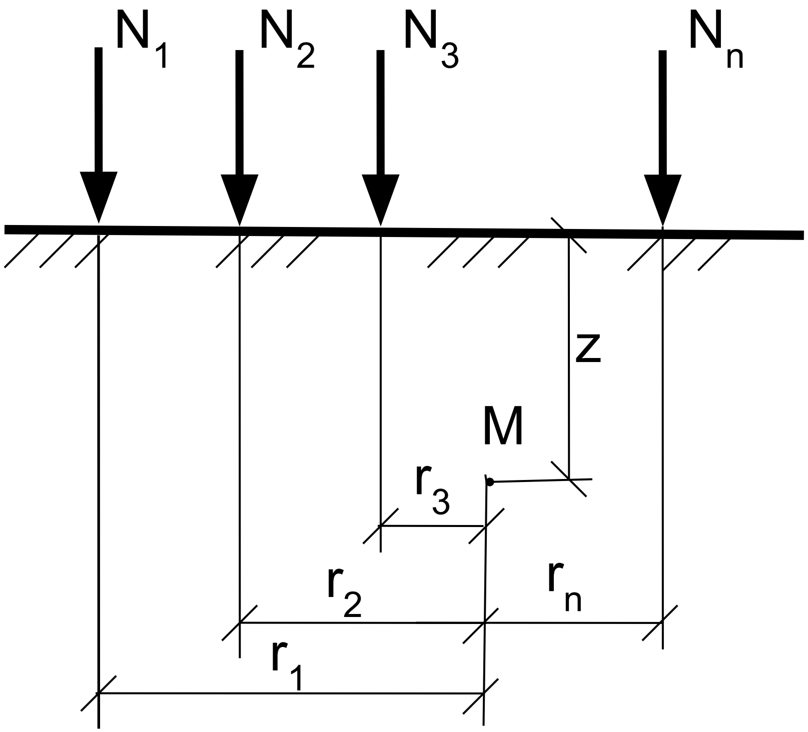
Главные напряжения будут возникать на площадках, расположенных по вертикальной оси симметрии нагрузки (при β=0), по биссектрисам углов видимости и площадках, им перпендикулярным.

Главные напряжения можно вычислить из выражений (4.14) подставляя в них угол β=0:

$$\begin{cases} \sigma_z = \dfrac{P}{\pi}(\alpha + \sin\alpha) \\ \sigma_y = \dfrac{P}{\pi}(\alpha - \sin\alpha) \\ \tau = 0 \end{cases} \qquad (4.16)$$



2) Действие нескольких сосредоточенных сил

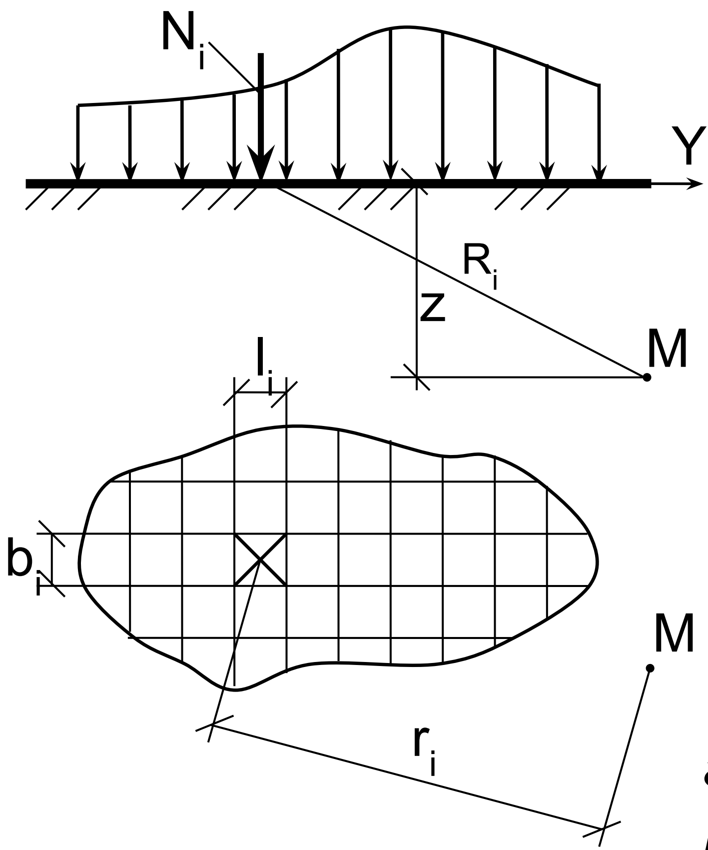


Если к поверхности однородного линейно-деформируемого полупространства приложено несколько сосредоточенных сил (N_1, N_2, $N_3 \ldots N_n$), то напряжение в любой точке грунтового массива определяется простым суммированием напряжений от действия всех сил:

$$\boxed{\sigma_z = K_{\sigma 1}\frac{N_1}{z^2} + K_{\sigma 2}\frac{N_2}{z^2} + \ldots + K_{\sigma n}\frac{N_n}{z^2}} \qquad (4.3)$$

где $K_{\sigma 1}$, $K_{\sigma 2} \ldots$ $K_{\sigma n}$ - табличные коэффициенты, зависящие от соотношений r_i / z.

3) Действие любой распределенной нагрузки



Для определения сжимающих напряжений σ_z используют **способ элементарного суммирования**: площадь загрузки делят на небольшие элементы и нагрузку прикладывают в центре тяжести каждого элемента как сосредоточенную.

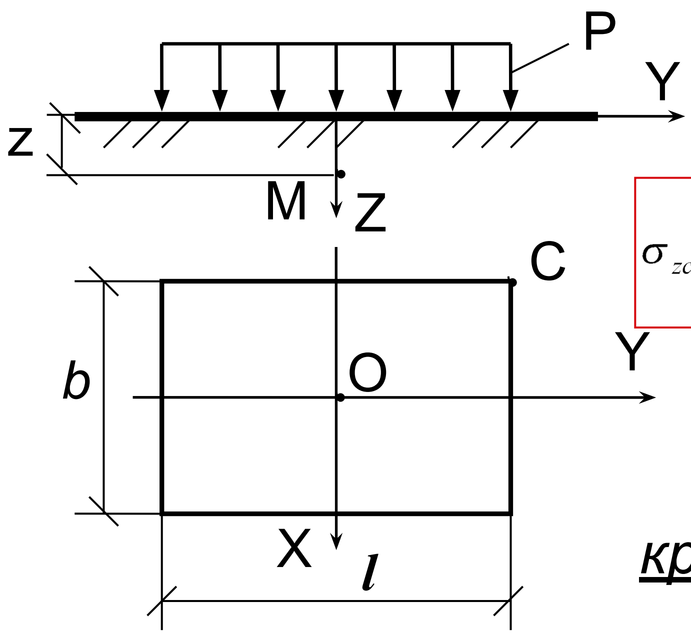
$$\sigma_z = \sum_{i=1}^{n} K_{\sigma i} \frac{N_i}{z^2} \qquad (4.4)$$

где $K_{\sigma l}$ – коэффициент, определяемый по таблице в зависимости от отношения r_i/z

При $R_i > 2l_i$ погрешность определения напряжений будет составлять около 6% (в сторону увеличения напряжений);

при $R_i > 3l_i$ – 3%; при $R_i > 4l_i$ – не более 2 %.

4) Действие равномерно распределенной нагрузки по круглым и прямоугольным площадкам



Впервые решение этой задачи в 1935 году получил профессор **А. Ляв:**

$$\sigma_{zc} = \frac{P}{\pi}\left[\frac{l \cdot b \cdot z}{D} \cdot \frac{l^2 + b^2 + 2z^2}{l^2 \cdot b^2 + D^2 \cdot z^2} + \arcsin\left(\frac{l \cdot b}{\sqrt{l^2 + z^2} \cdot \sqrt{b^2 + z^2}}\right)\right] \quad (4.5)$$

где D – детерминант; $\left(\frac{D}{2}\right)^2 = l^2 + b^2 + z^2$

Под центром прямоугольной или круглой площадки загружения:

$$\sigma_{zo} = \alpha_0 \cdot P \quad (4.6)$$

Под углом прямоугольной или краем круглой площади загружения:

$$\sigma_{zc} = 0{,}25\alpha_c \cdot P \quad (4.7)$$

где α_{z0} и α_{zc} – табличные коэффициенты (СНиП 2.02.01-83):*

$$\alpha_0 = f\left(\frac{2z}{b}; \frac{l}{b}\right) \quad (4.8) \qquad \alpha_c = f\left(\frac{z}{b}; \frac{l}{b}\right) \quad (4.9)$$

Определение напряжений по методу угловых точек (задача Лява)

Для точек, которые не лежат ни на центральной, ни на угловой вертикалях, применяют **метод угловых точек**. Метод угловых точек для определения сжимающих напряжений $\boldsymbol{\sigma}_z$ применяют в тех случаях, когда грузовая площадь может быть разбита на такие прямоугольники, чтобы рассматриваемая точка оказалась **угловой**. Тогда сжимающее напряжение в этой точке (для горизонтальных площадок, параллельных плоской границе полупространства) будет равно алгебраической сумме напряжений от прямоугольных площадей загрузки, для которых эта точка является угловой.

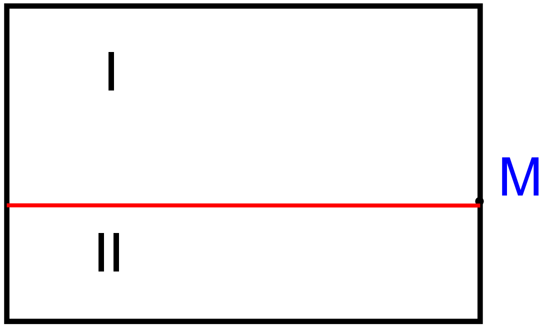
4.5 Метод угловых точек

Сущность метода заключается в том, что грузовая площадь разбивается на такие прямоугольники, в которых рассматриваемая точка оказалась бы угловой.

Сжимающее напряжение σ_z в этой точке будет равно сумме напряжений от прямоугольных площадей загрузки, для которых эта точка является угловой.

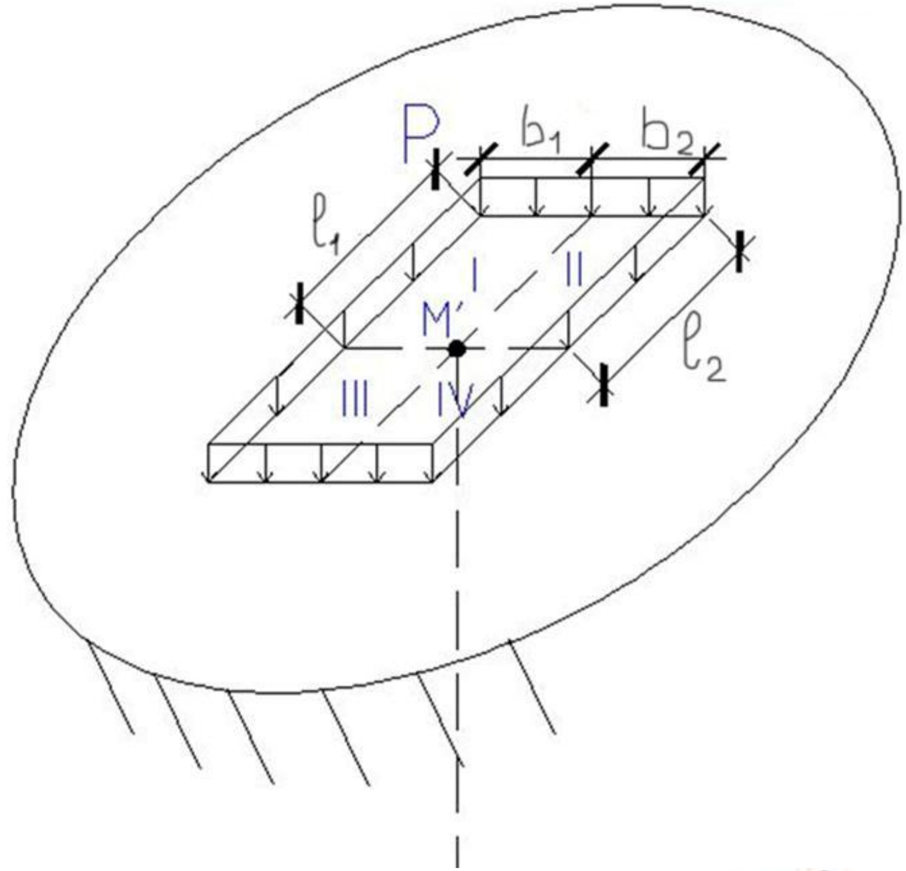
Рассмотрим три основных случая:

I Точка *M* находится на контуре загруженного прямоугольника:



$$\sigma_z = \sigma_{zI} + \sigma_{zII} = 0{,}25(\alpha_I + \alpha_{II})P \quad (4.10)$$

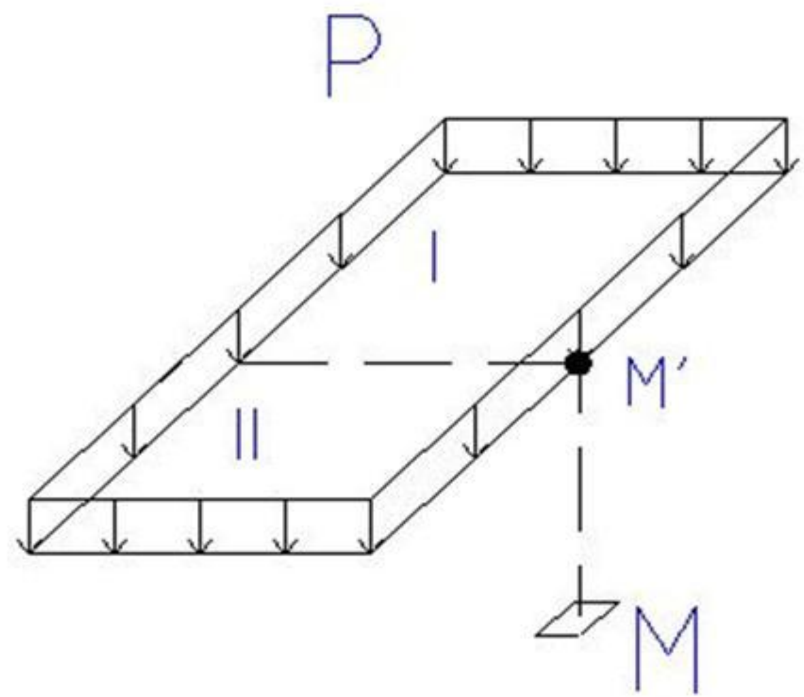
Первый случай: Проекция точки ***М*** на горизонтальную поверхность полупространства ***М’*** располагается в пределах площади загружения.



$$\sigma_z = \sum_{i=1}^{4} \sigma_{zi} = 0{,}25(\alpha_I p + \alpha_{II} p + \alpha_{III} p + \alpha_{IV} p) = 0{,}25p \sum_{i=1}^{4} \alpha_i$$

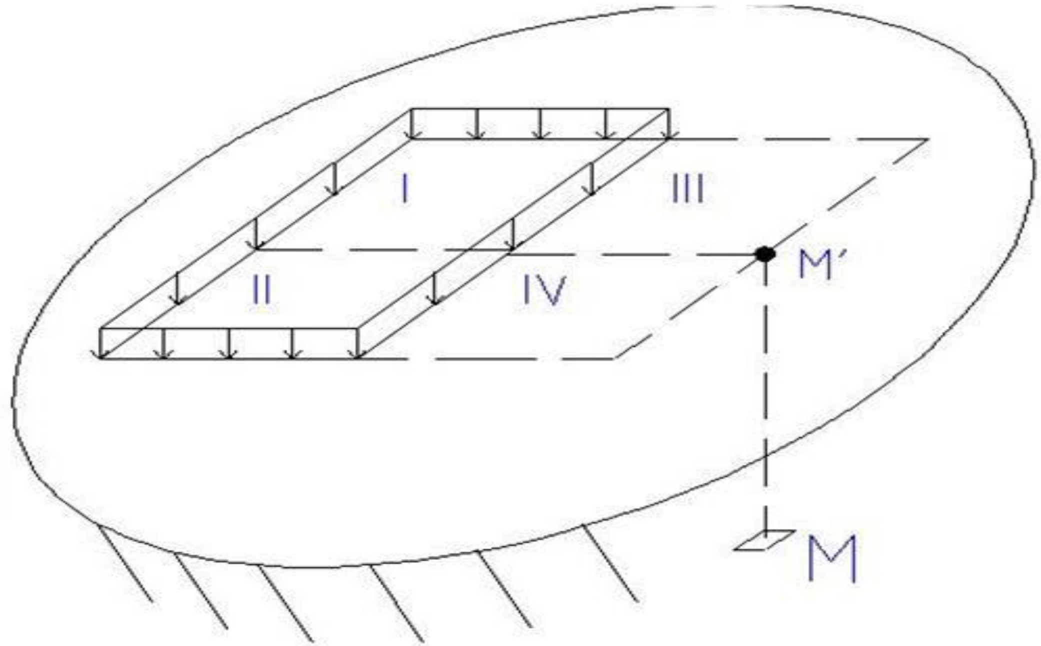
где $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ – табличные коэффициенты, принимаемые в зависимости от ζ, η.

Второй случай: Точка ***M*** проецируется на грань или контур загруженного участка:



$$\sigma_z = 0{,}25p\sum_{i=1}^{2}\alpha_i$$

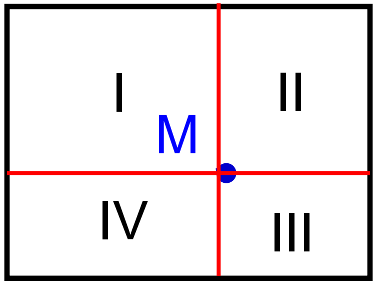
Третий случай:
Точка *M* расположена вне загруженного участка.



В этом случае загруженный участок дополняют фиктивными прямоугольниками так, чтобы проекция точки *M (M')* оказалась угловой. Точку *M'* можно представить как угловую точку фиктивных площадей загружения.

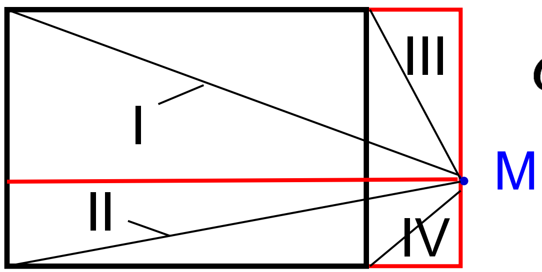
$$\sigma_z = 0{,}25(\alpha_I p + \alpha_{II} p - \alpha_{III} p - \alpha_{IV} p) = 0{,}25p(\alpha_I + \alpha_{II} - \alpha_{III} - \alpha_{IV})$$

II Точка *M* находится внутри прямоугольника:

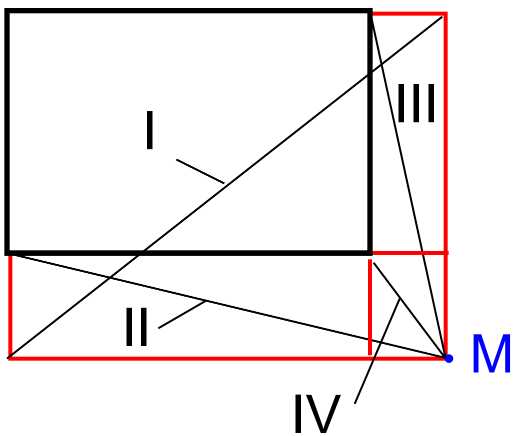


$$\sigma_z = \sigma_{zI} + \sigma_{zII} + \sigma_{zIII} + \sigma_{zIV} = \\ = 0{,}25(\alpha_I + \alpha_{II} + \alpha_{III} + \alpha_{IV})P \qquad (4.11)$$

III Точка *M* находится за пределами прямоугольника:



$$\sigma_z = 0{,}25(\alpha_I + \alpha_{II} - \alpha_{III} - \alpha_{IV})P \qquad (4.12)$$

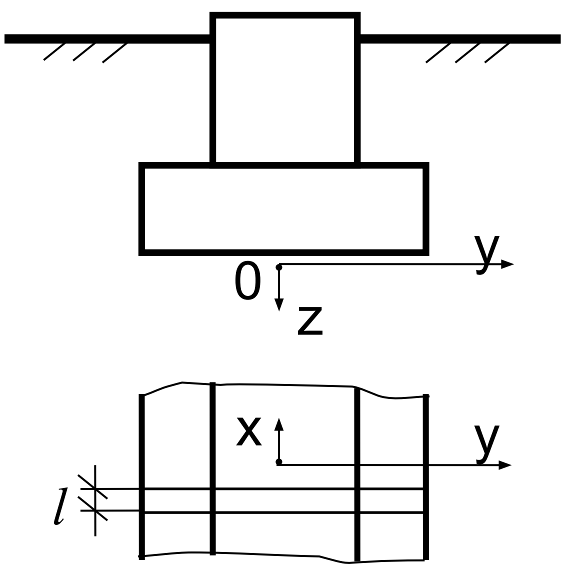


$$\sigma_z = 0{,}25(\alpha_I - \alpha_{II} - \alpha_{III} + \alpha_{IV})P \qquad (4.13)$$

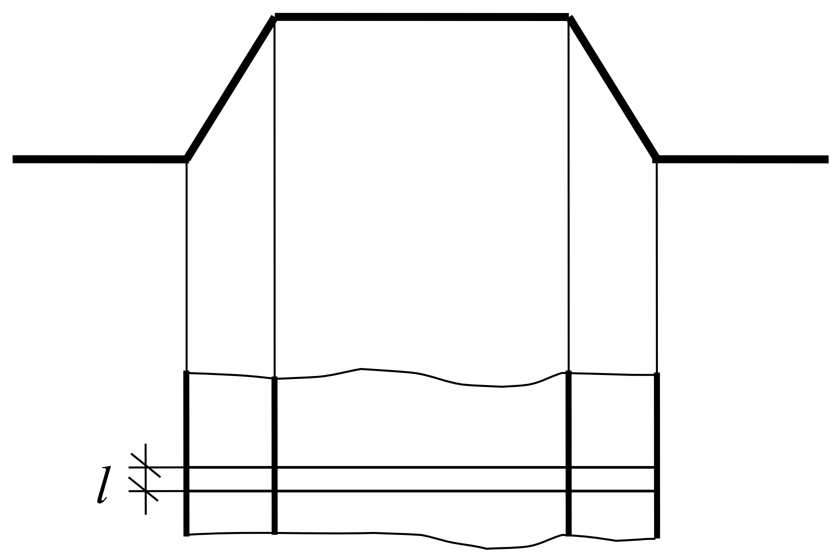
4.6 Действие равномерно распределенной полосовой нагрузки (плоская задача)

<u>Условия плоской задачи</u> будут иметь место в том случае, когда напряжения распределяются в одной плоскости, а в перпендикулярном направлении они либо постоянные, либо равны нулю.

<u>Ленточный фундамент</u>

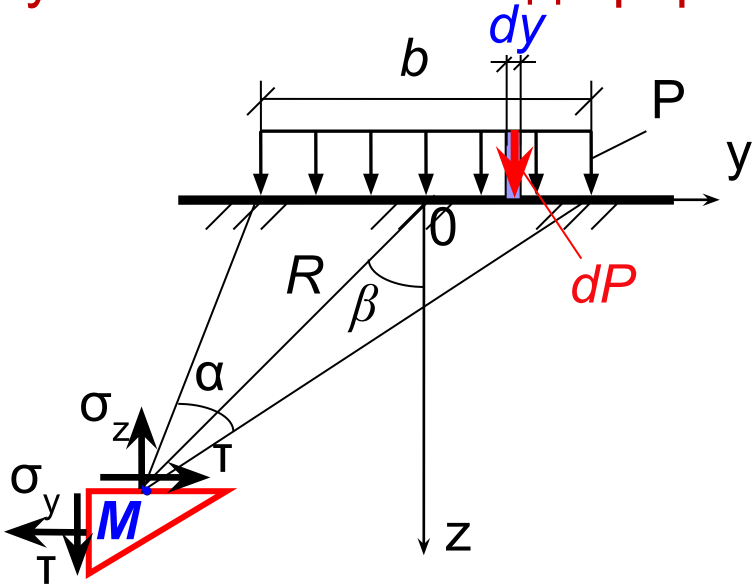


<u>Дорожная насыпь</u>



Напряженное состояние в массиве будет определяться тремя составляющими: нормальными напряжениями $\boldsymbol{\sigma_z}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$ и касательными напряжениями $\boldsymbol{\tau}$.

Выражения для этих напряжений получены на основе ***решения Фламана*** (1892 г.) для сосредоточенной силы в условиях плоской деформации.



$$\begin{cases} \sigma_z = \dfrac{P}{\pi}\left(\alpha + \sin\alpha \cdot \cos 2\beta\right) \\ \sigma_y = \dfrac{P}{\pi}\left(\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 2\beta\right) \\ \tau = \dfrac{P}{\pi} \cdot \sin\alpha \cdot \sin 2\beta \end{cases} \qquad (4.14)$$

$$\begin{cases} \sigma_z = K_z P \\ \sigma_y = K_y P \\ \tau = K_{yz} P \end{cases} \qquad (4.15)$$

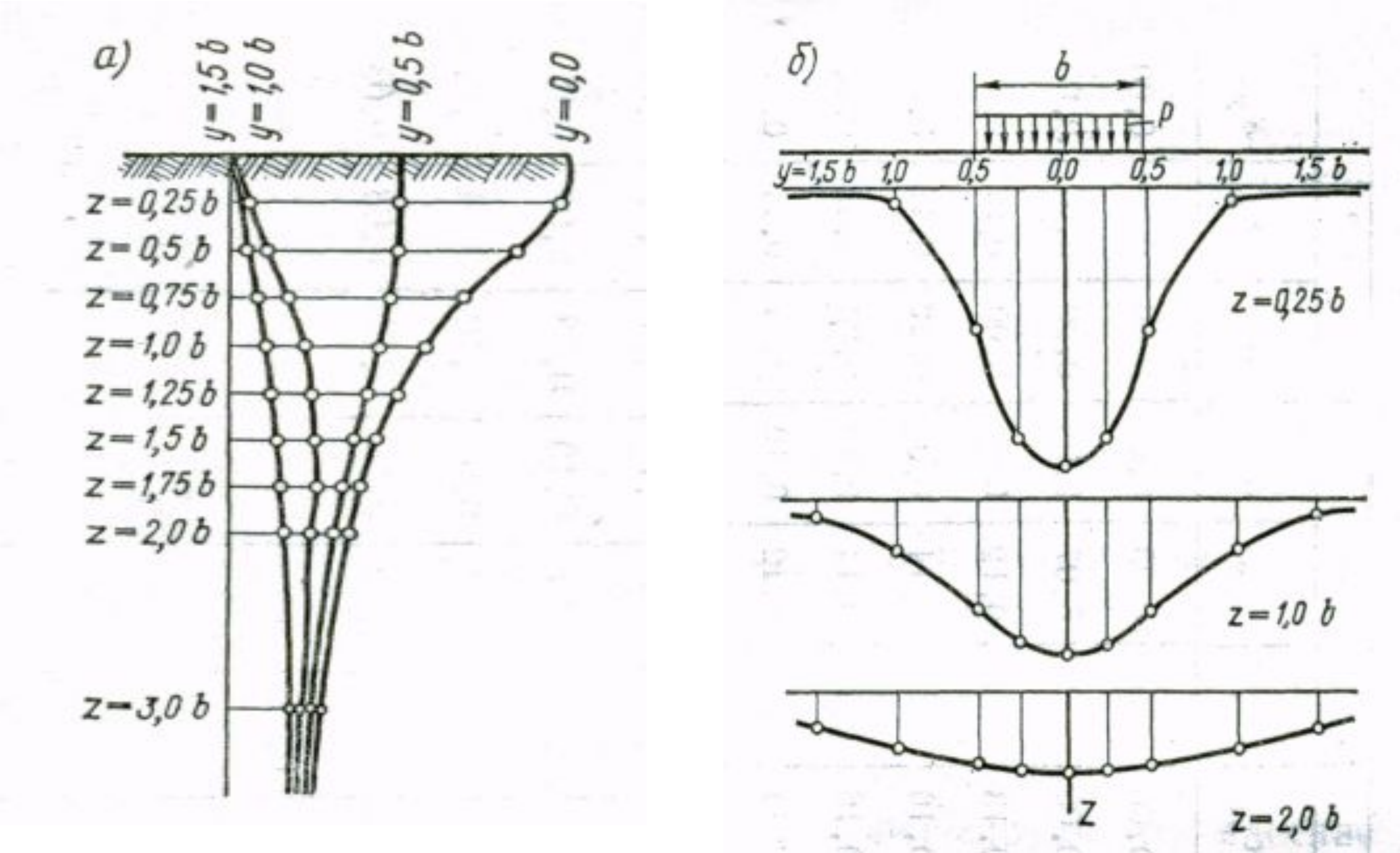
α - угол видимости;

R – расстояние от начала координат до рассматриваемой точки;

β – угол между радиусом и осью z.

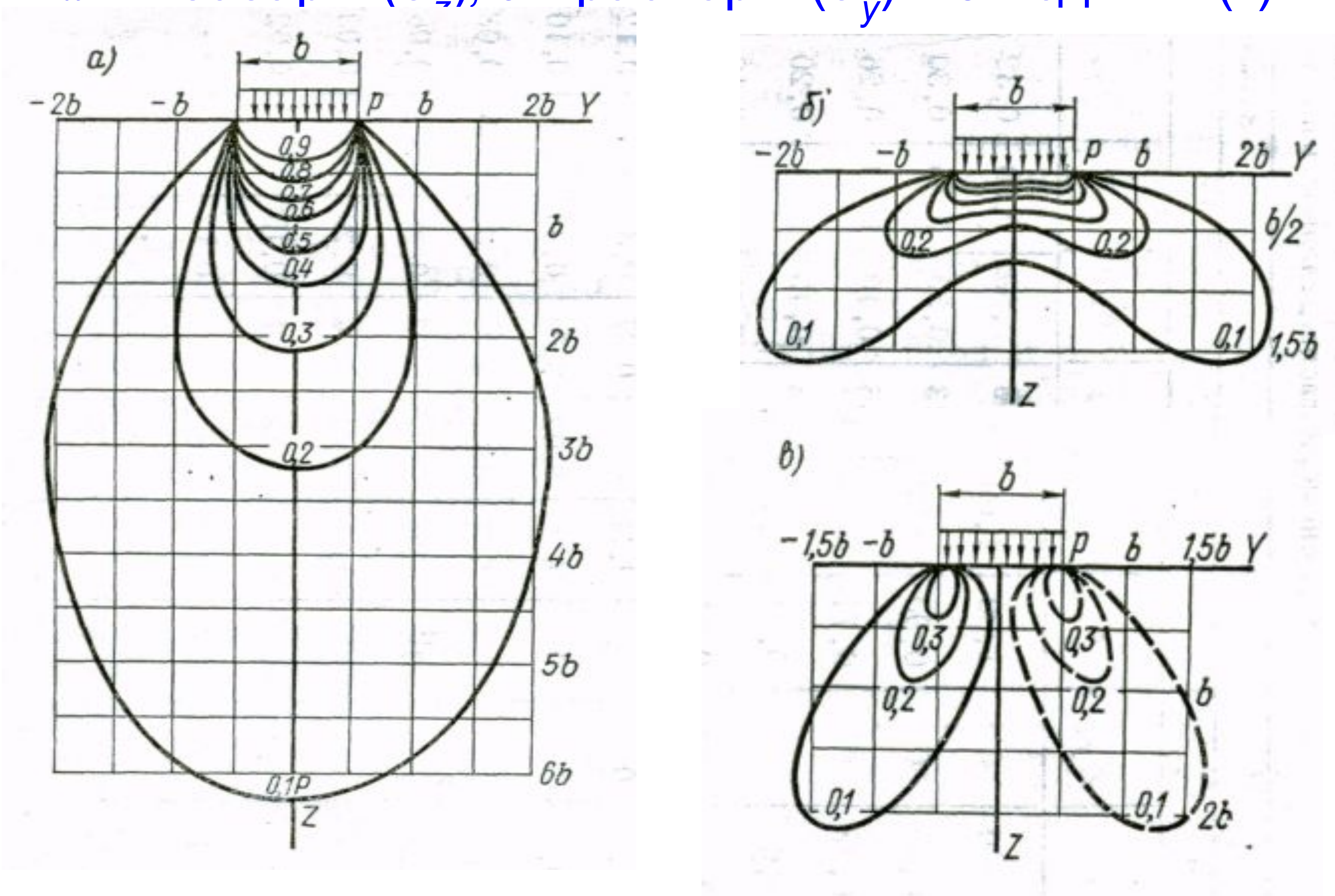
где ***K_z, K_y, K_{yz}*** *– коэффициенты влияния, определяемые по таблице в зависимости от относительных координат z/b и y/b.*

Эпюры распределения сжимающих напряжений σ_z по вертикальным (*а*) и горизонтальным (*б*) сечениям массива грунта

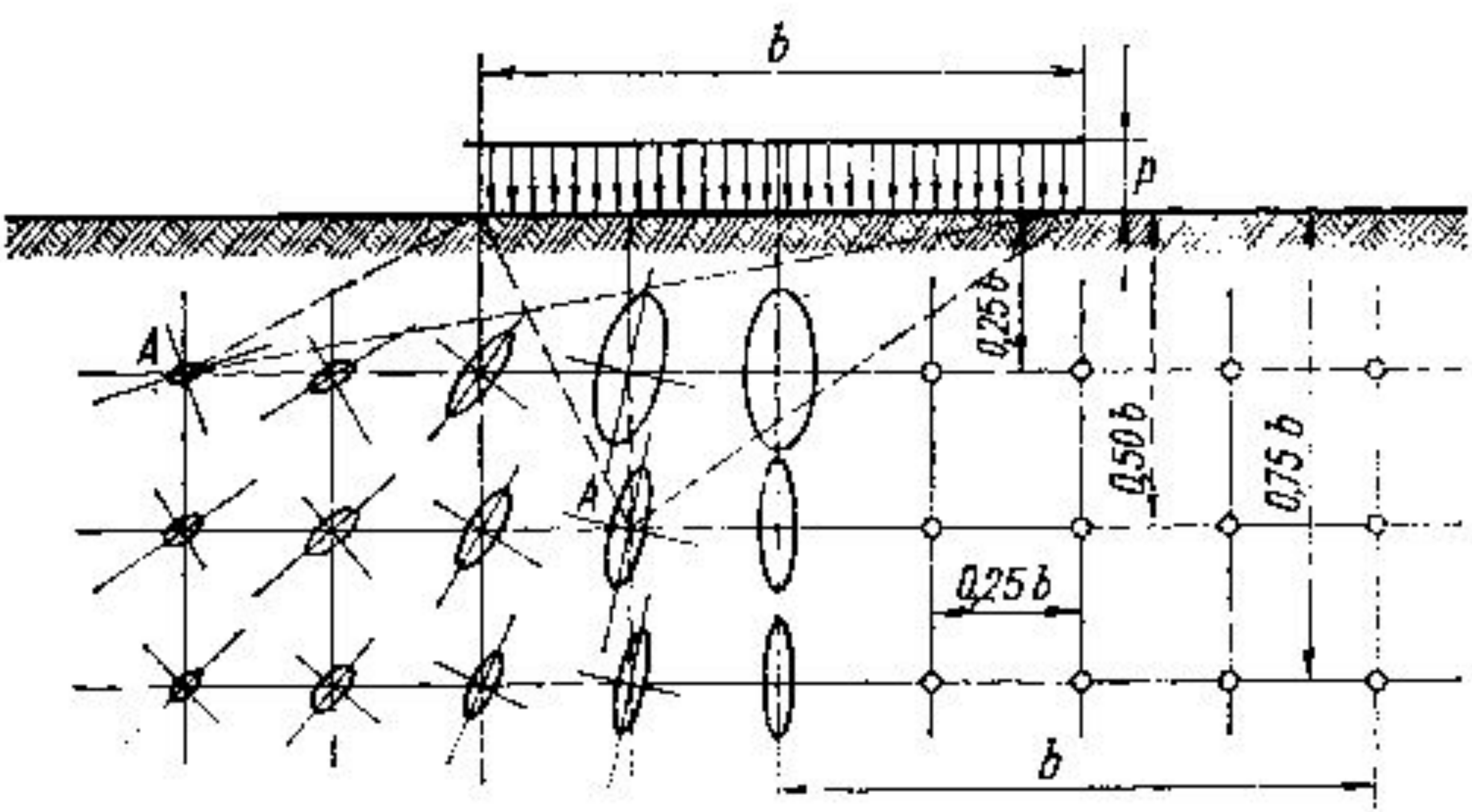


Линии равных напряжений в линейно-деформируемом массиве при действии равномерно распределенной полосовой нагрузки:

а – изобары (σ_z), ***б*** - распоры (σ_y) и ***в*** - сдвиги (т).



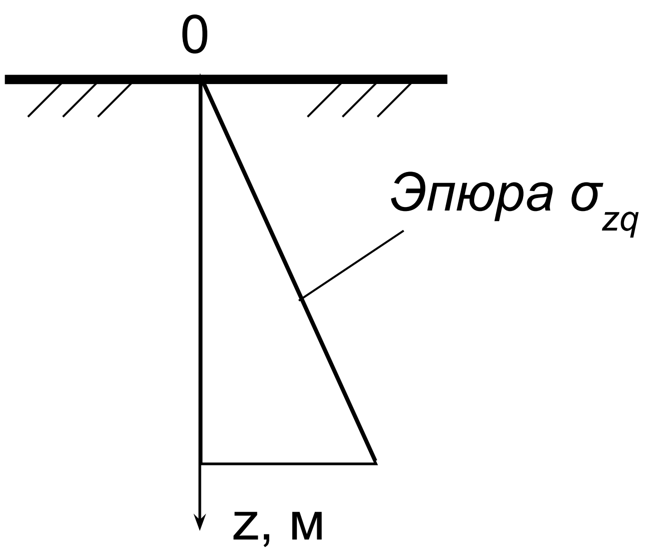
Эллипсы напряжений при действии равномерно распределенной нагрузки в условиях плоской задачи



4.7 Распределение напряжений от действия собственного веса грунта

Напряжения от собственного веса грунта увеличиваются с глубиной.

1) При однородном грунтовом основании (при постоянном удельном весе грунта):

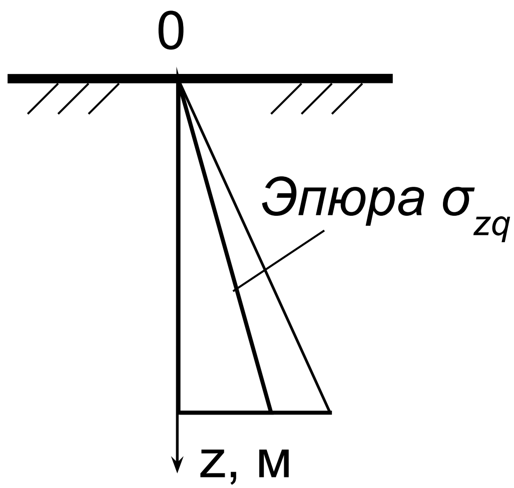


$$\boxed{\sigma_{zq} = \gamma \cdot z} \qquad (4.17)$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{g}$ *– удельный вес грунта;*

z – глубина заложения рассматриваемой точки.

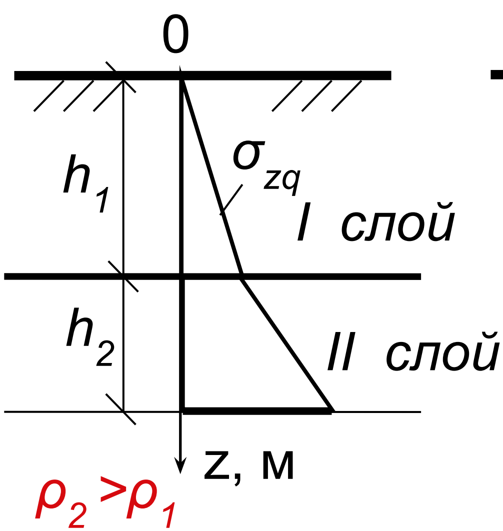
2) Для грунтовой массы (полностью водонасыщенного грунта):

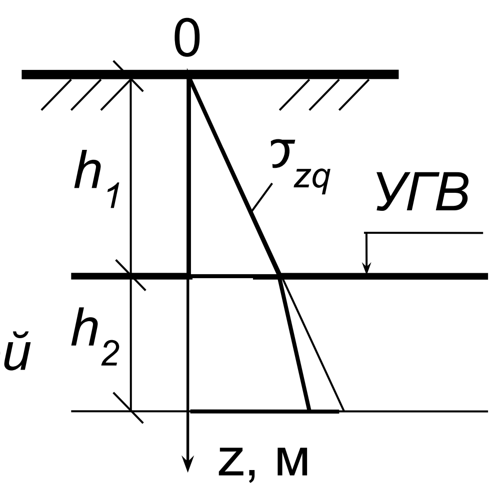


$$\boxed{\sigma_{zq} = \gamma' \cdot z} \qquad (4.18)$$

где ***γ' = ρ'·g*** *– удельный вес грунта с учетом взвешивающего действия воды (плотность с учетом взвешивающего действия воды определяется по формуле (2.16) -* $\rho' = \dfrac{\rho_s - \rho_w}{1+e}$).

3) При неоднородной грунтовой толщи:





$$\boxed{\sigma_{zq} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot h_i} \qquad (4.19)$$

где ***γ***