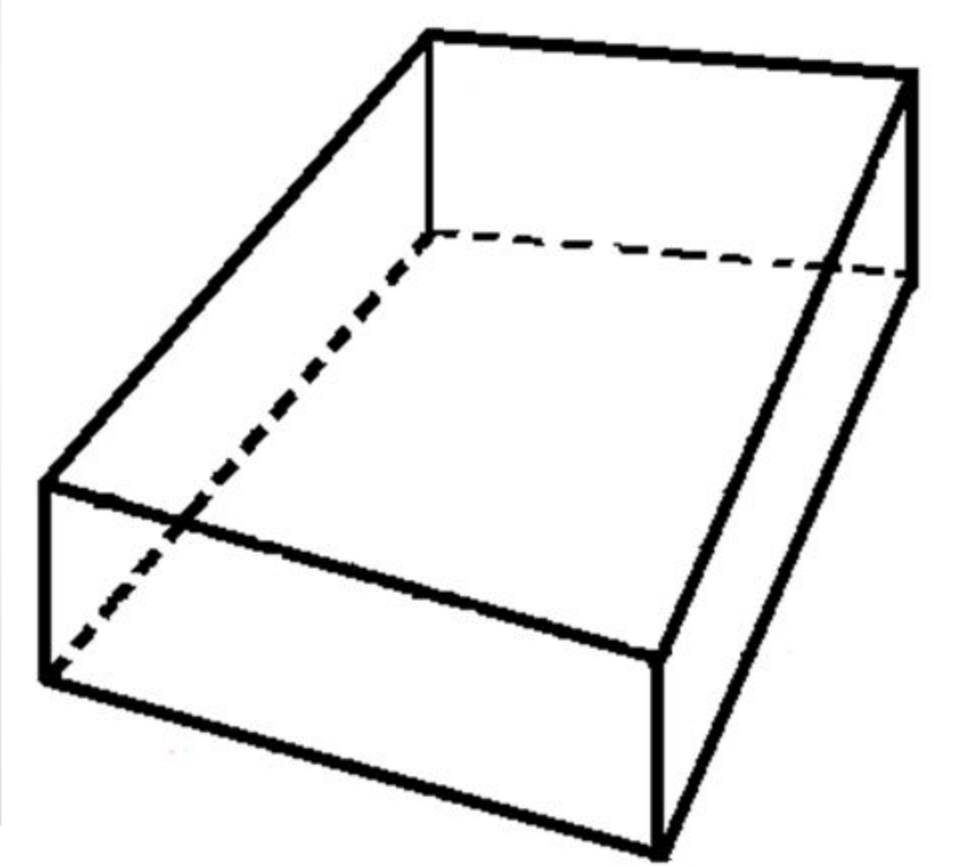
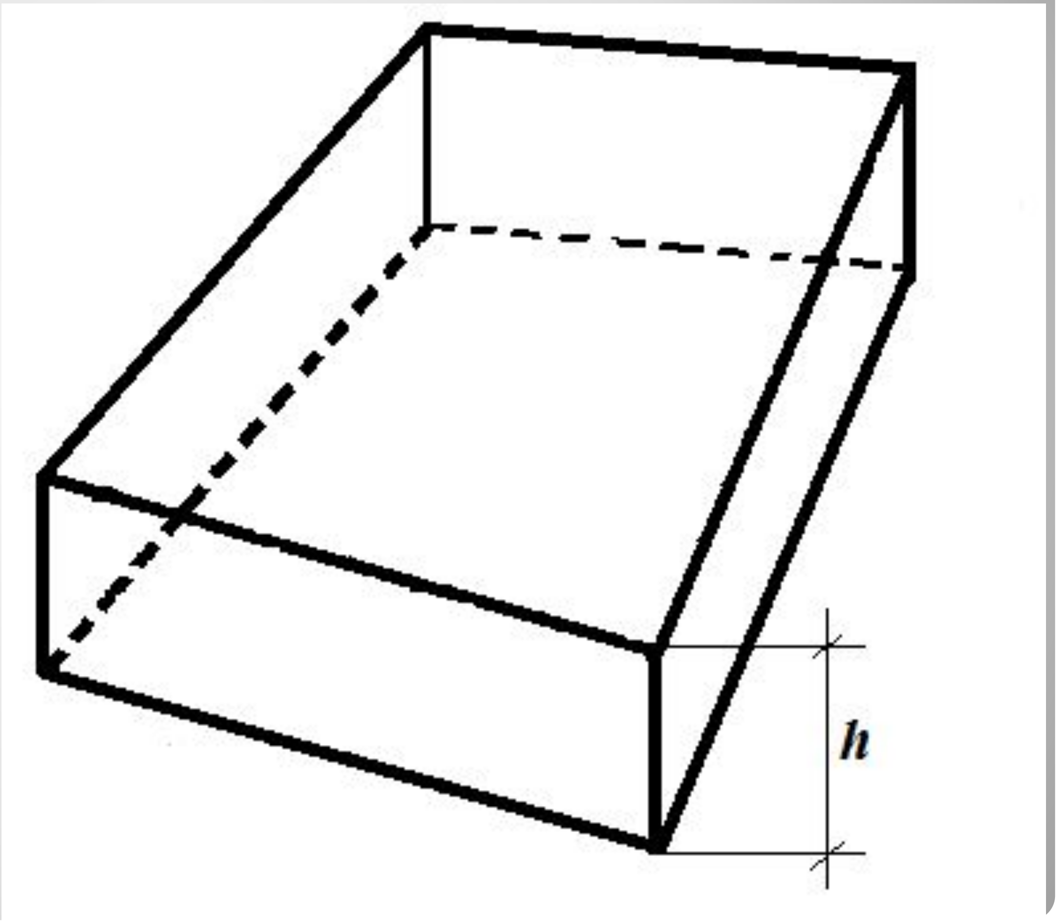
Изгиб пластин

Классификация пластин. Основные понятия и гипотезы. Выражение деформаций, напряжений, изгибающих, крутящих моментов и поперечных сил через функцию прогибов пластины. Уравнения равновесия элемента пластинки. Уравнение Софи-Жермен–Лагранжа. Формулировка граничных условий для основных случаев закрепления краев пластинки.

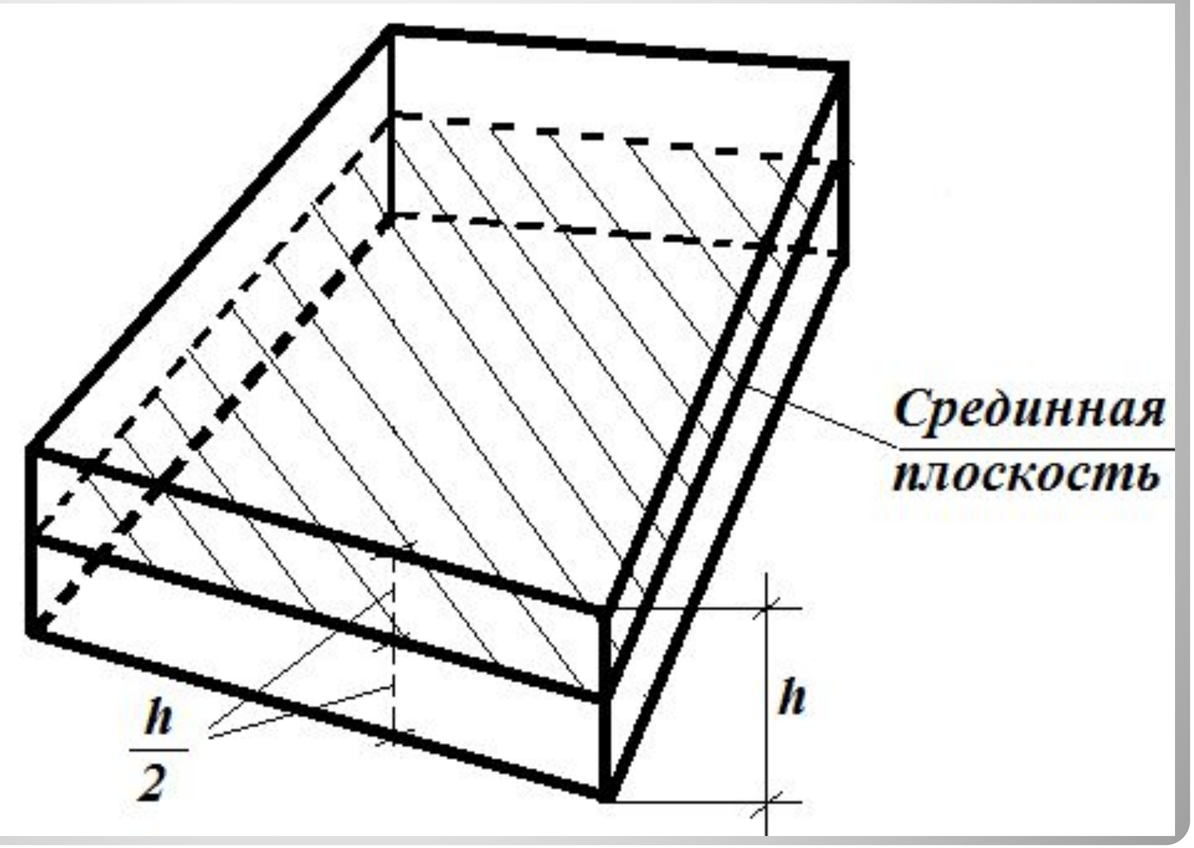
Пластинкой называется призматическое или цилиндрическое тело, высота которого мала по сравнению с размерами в плане.



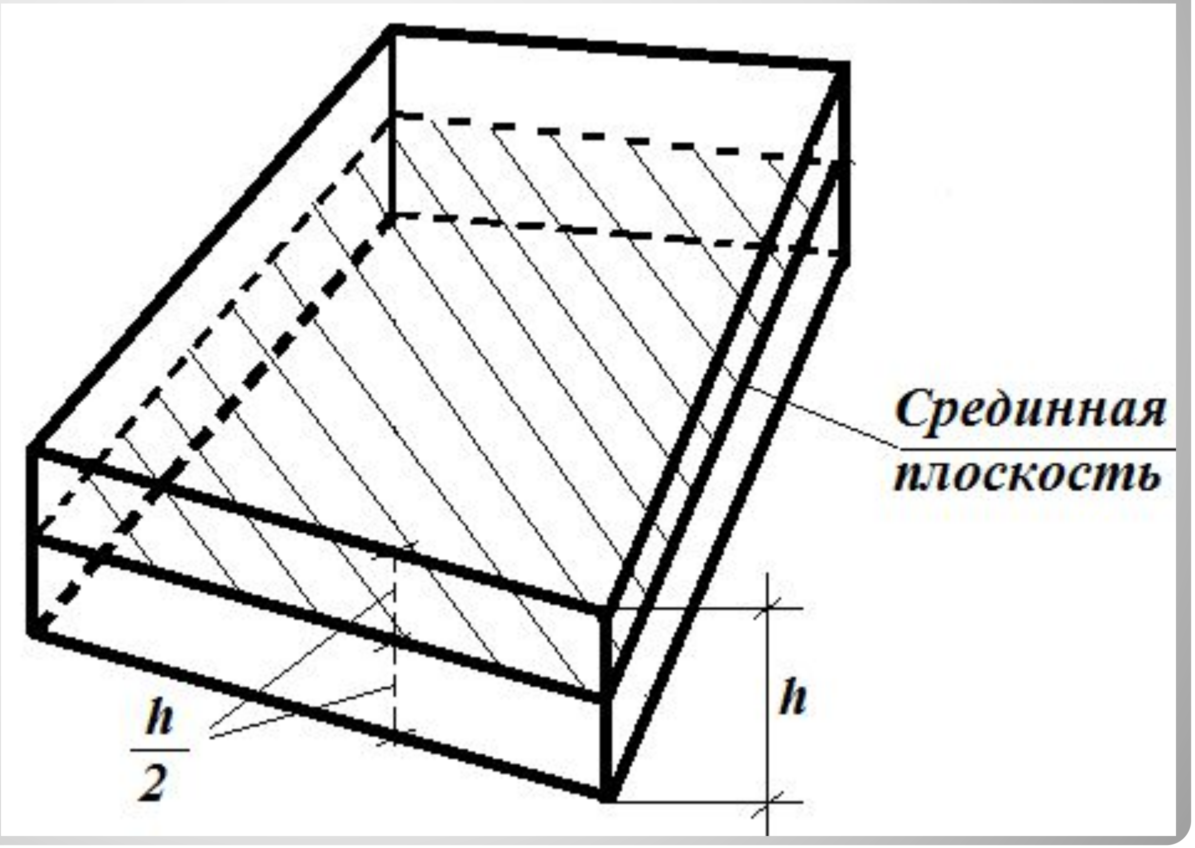
Высота называется толщиной пластинки и обозначается h.



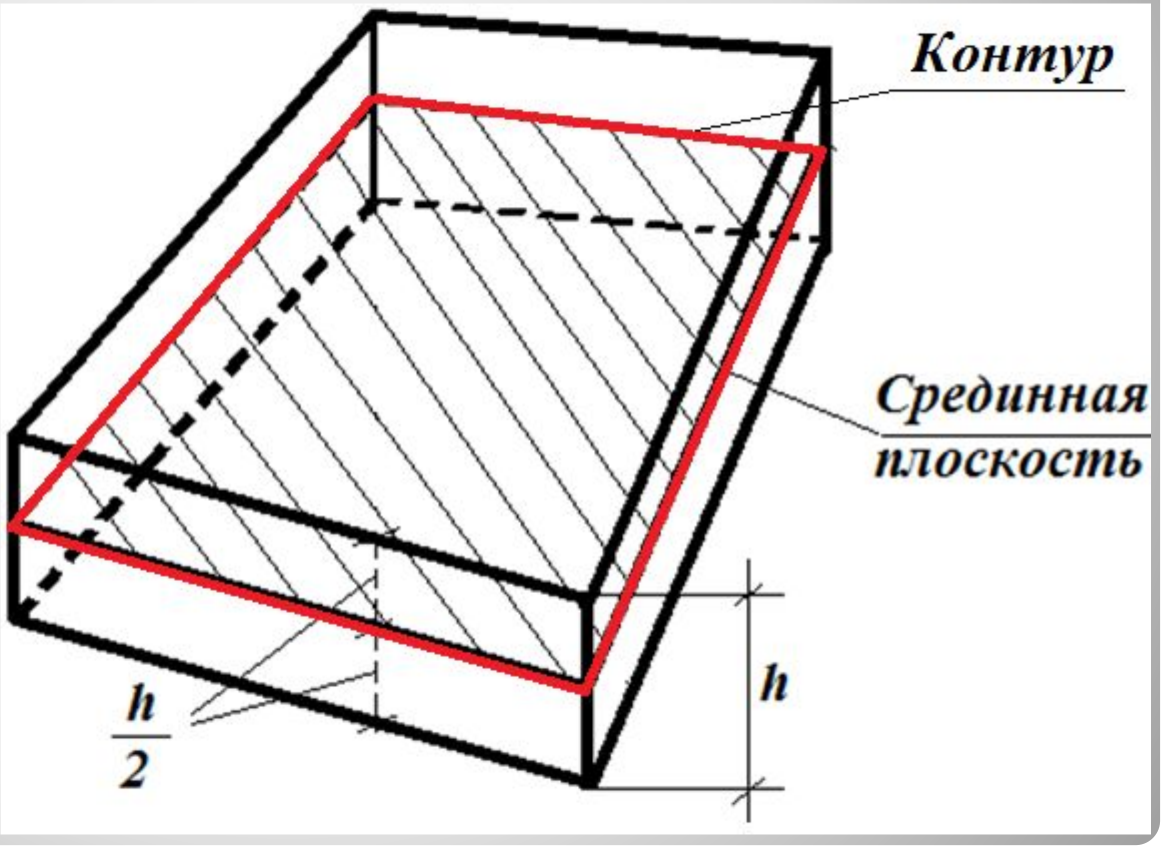
Плоскость, делящая пластинку пополам по толщине, называется *срединной*.



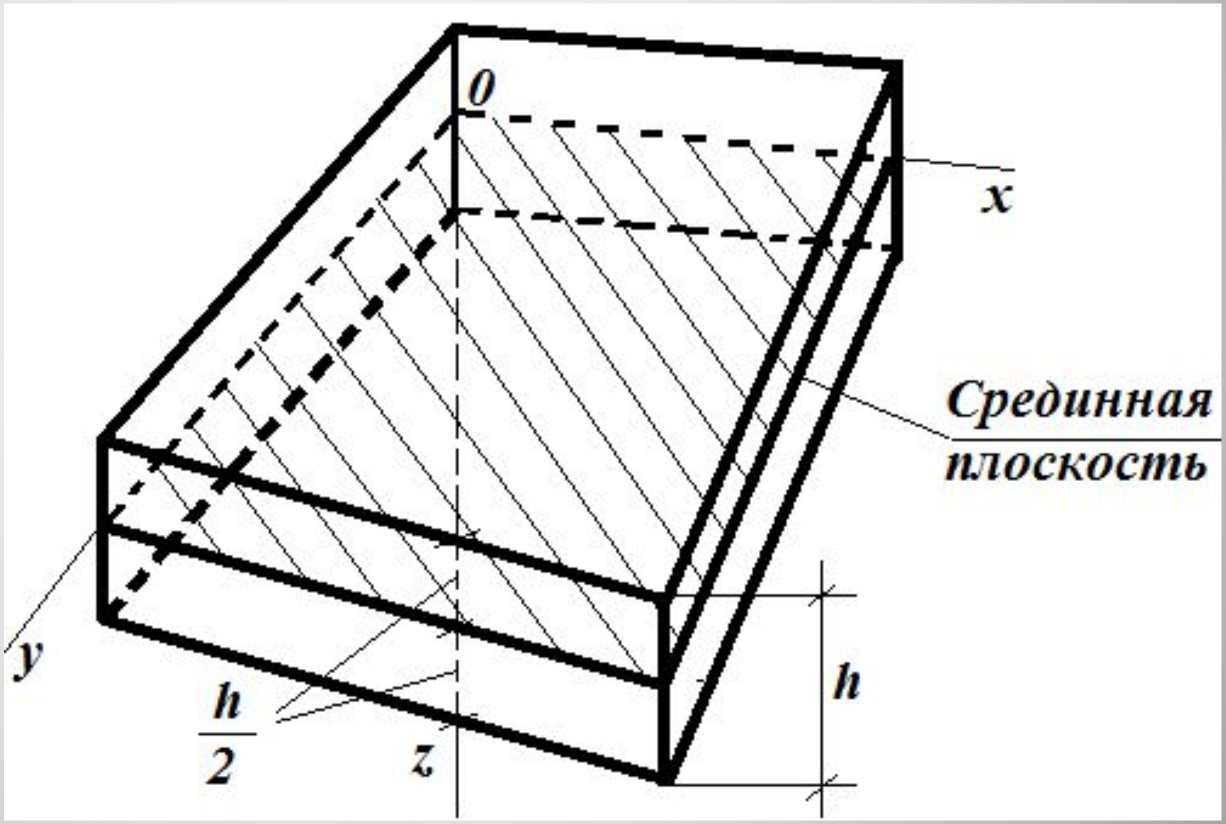
При изгибе пластинки срединная плоскость превращается в изогнутую поверхность.



Линия пересечения боковой поверхности пластинки со срединной плоскостью называется *контуром пластинки*.



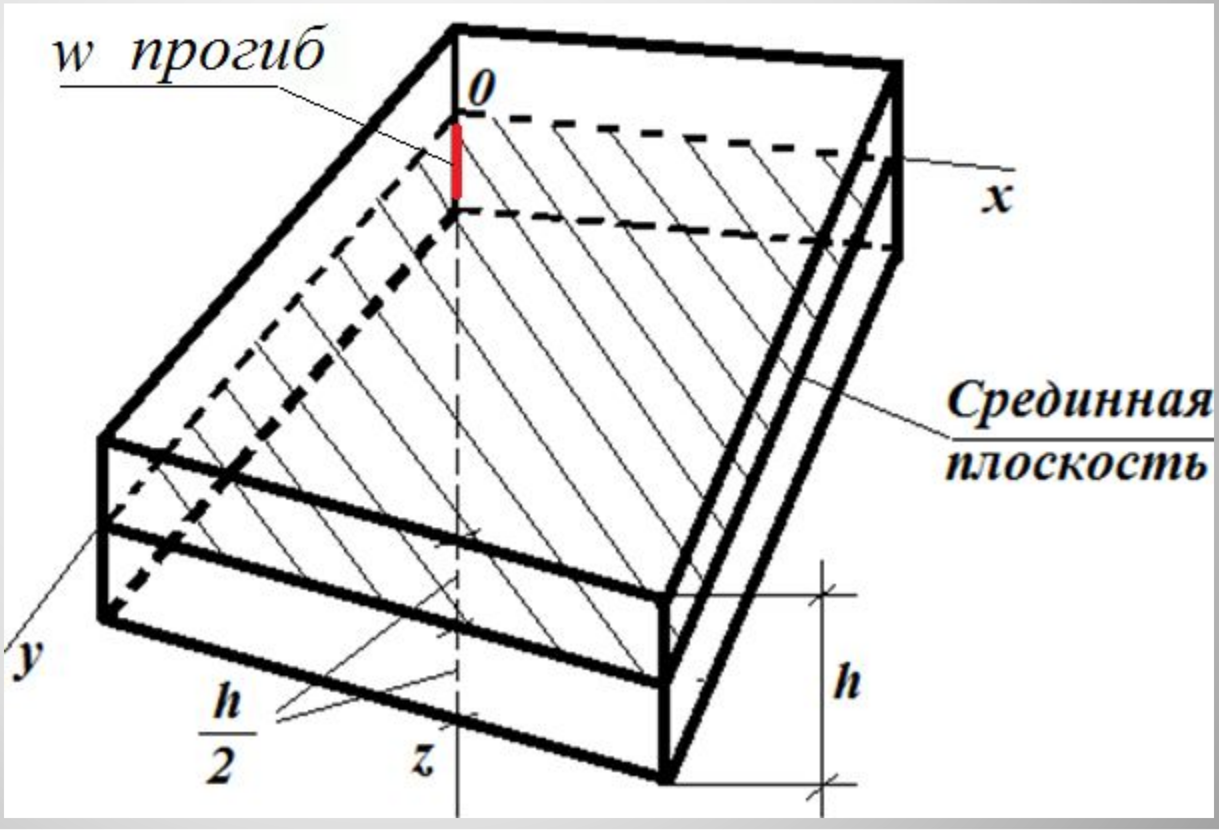
Координатная плоскость $x0y$ совпадает со срединной поверхностью, а ось z направлена вниз.



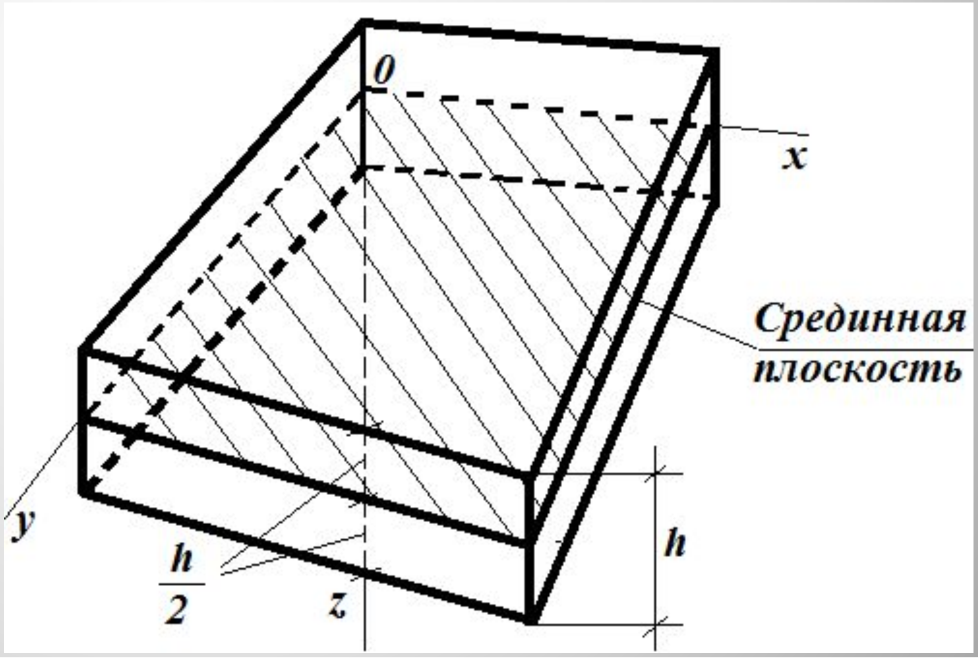
При таком выборе системы координат составляющая перемещения *w* в направлении оси *z* будет представлять собой

прогиб

пластинки.



Положение начала координат в срединной плоскости будем выбирать в каждом рассматриваемом случае в зависимости от очертания контура пластинки и характера закрепления её краёв.



Пластинки находят широкое применение в строительстве в виде настилов и панелей, железобетонных плит для покрытия производственных зданий, плит фундаментов массивных зданий и т. д. Расчетной схемой плит, применяемых в строительных конструкциях, является тонкая пластинка.

Тонкими называются пластинки, имеющие отношение характерного размера в плане к толщине примерно в пределах $a/h \geq 80...100$

Толстыми называются пластинки, имеющие отношение характерного размера в плане к толщине примерно в пределах $a/h \le 8...10$

Мембранами называются пластинки, имеющие отношение характерного размеру в плане к толщине примерно в пределах

$$8\ldots10 \le a/h \le 80\ldots100$$

Тонкие пластинки обычно рассчитывают по приближенной теории — *технической теории изгиба пластинок*, которая основана на следующих гипотезах, предложенных немецким физиком Г. Кирхгофом.

1. *Гипотеза прямых нормалей*: любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформирования пластинки, и длина его не изменяется. Эта гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений в теории изгиба балок.

Любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости, направлен вдоль оси z, и, следовательно, первая часть гипотезы предполагает, что прямые углы между этим элементом и осями x, y остаются прямыми, т.е. сдвиги в указанных плоскостях отсутствуют

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0; \\ \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Гипотеза о сохранении длины прямоугольного элемента предполагает, что линейная деформация в направлении оси z (по толщине пластинки) отсутствует:

$$\varepsilon_z = 0 \qquad (2)$$

.

2. *Гипотеза о недеформируемости срединной плоскости*: в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига, т. е. она является нейтральной и ее перемещения

$$u_0 = \upsilon_0 = 0 \quad (3)$$

3. *Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости*. Гипотеза позволяет пренебрегать напряжением σ_z ввиду малости по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y. Аналогичная гипотеза принималась в теории изгиба балок.

Перемещения и деформации в пластинке

Изучение изгиба пластинки начнем с определения перемещений и деформаций. Исследуем пластинку, несущую поперечную нагрузку, т. е. нагрузку, нормальную к срединной плоскости пластинки. Под действием этой нагрузки пластинка получит перемещения. Для их определения обратимся к принятым гипотезам.

Следуя первой гипотезе и подставляя условие (2) в геометрические соотношения Коши, получаем

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

откуда следует, что прогибы пластинки w не зависят от координаты z, т. е

$$w = w(x, y)$$

$$w = w(x, y)$$

Это означает, что все точки пластинки, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые перемещения w. Следовательно, достаточно определить прогибы срединной плоскости пластинки, чтобы знать вертикальные перемещения всех ее точек.

Рассматривая условия для сдвигов (1), из геометрических соотношений Коши получаем

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

отсюда находим производные составляющих перемещения u и v:

отсюда находим производные составляющих перемещения u и υ :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Интегрируя эти выражения по *z*, получаем

$$\left.\begin{aligned} u &= -z\frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y); \\ \upsilon &= -z\frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Для вычисления функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, появившихся при интегрировании уравнений в частных производных, воспользуемся гипотезой о недеформируемости срединной плоскости. Подставляя условия (3) в формулы (5) при z=0, получаем:

$$u_0 = -z\frac{\partial w}{\partial x};$$

(6)

$$v_0 = -z\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Таким образом, составляющие перемещения точек пластинки в направлениях осей x и y выражены через функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Составляющие деформации пластинки, отличные от нуля, находим с помощью формул Коши, подставляя в них значения составляющих перемещения (6).

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}\right\}$$

Здесь составляющие деформации, так же как и составляющие перемещения в соотношениях (6), выражены через одну функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Напряжения в пластинке

Для вычисления нормальных напряжений σ_x и σ_y воспользуемся двумя первыми формулами закона Гука и на основании третьей гипотезы отбросим напряжение σ_z. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)/E; \\ \varepsilon_y &= \left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)/E; \end{aligned} \qquad (8)$$

Из (8) с учетом зависимостей (7) находим

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ \sigma_y = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \end{cases} \qquad (9)$$

Четвертая формула закона Гука после подстановки угловой деформации из формул (7) принимает следующий вид:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10)$$

Касательные напряжения в двух других плоскостях, согласно равенствам (1), обращаются в нуль:

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = 0; \qquad (11)$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx} = 0.$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = 0;$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx} = 0. \qquad (11)$$

Однако такой результат получен только вследствие принятых ранее гипотез. В действительности эти касательные напряжения не равны нулю, поскольку это противоречит условиям равновесия.

Действительно, рассмотрим дифференциальные уравнения равновесия. Пренебрегая объемными силами, из первого уравнения находим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \qquad (12)$$

Подставим сюда напряжения из формул (9) и (10):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) + \frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}.$$

После упрощения получаем

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

или $$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

Интегрируя по z, находим

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\frac{Ez^2}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + f_3\left(x, y\right) \quad (13)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\frac{Ez^2}{(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + f_3(x,y)$$

Для определения произвольной функции f3(x,y) имеем следующие граничные условия: на верхней и нижней поверхностях пластинки нет касательных нагрузок, т. е. при $z = \pm h/2, \quad \tau_{zx} = 0$. Подставляя эти условия в формулу (13), получаем

$$0 = \frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + f_3(x,y)$$

$$0=\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+f_3(x,y)$$

Отсюда искомая функция

$$f_3(x,y)=-\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

Подставив её в (13), получаем

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=-\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \qquad (14)$$

Решая таким же путем второе уравнение равновесия, находим

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \quad (15)$$

Итак, согласно формулам (9), (10), (14) и (15), в сечениях пластинки, перпендикулярных ее срединной плоскости, возникают следующие напряжения:

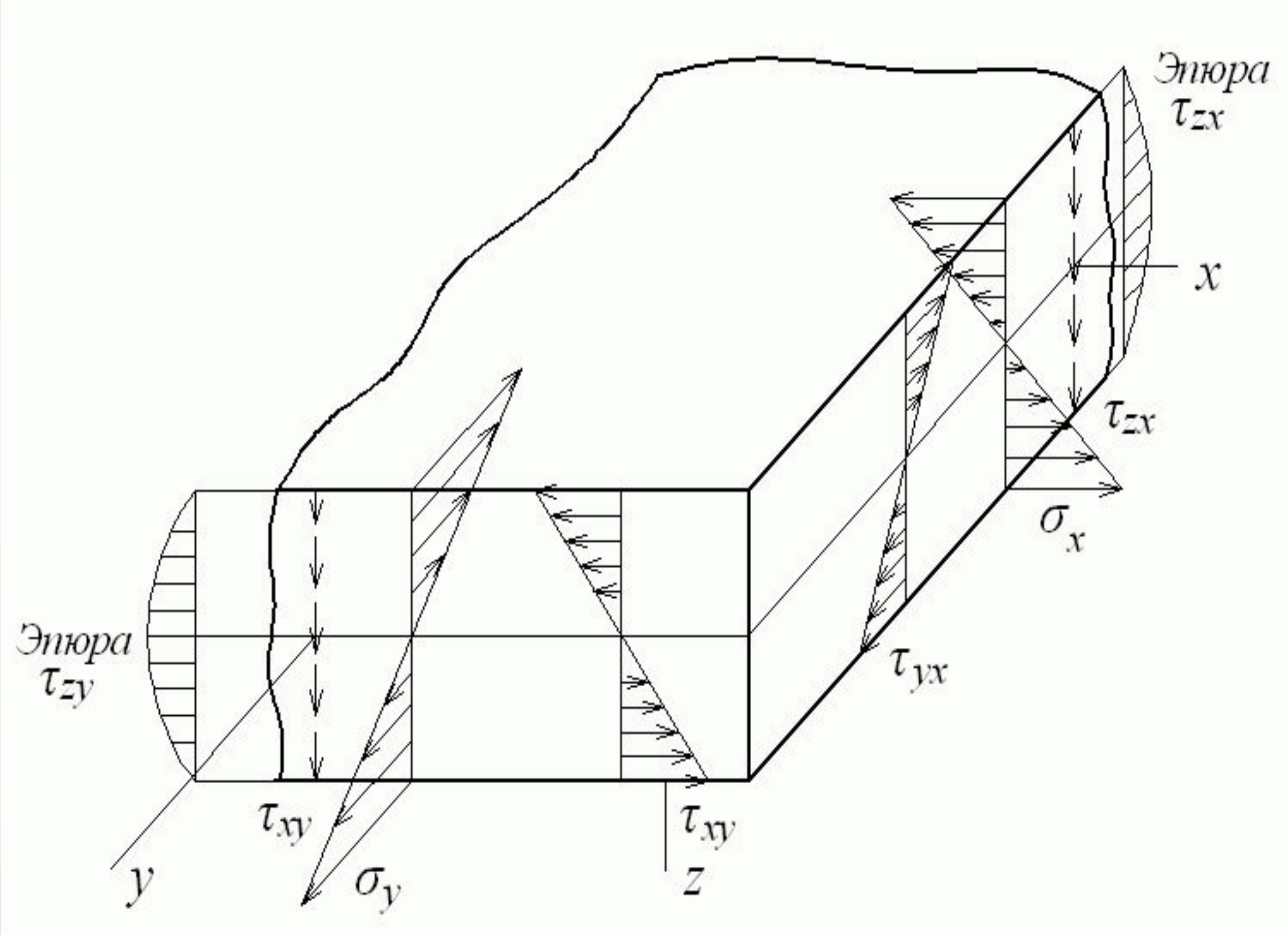
$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ \sigma_y = -\dfrac{Ez}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \end{cases} \qquad (16)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w$$

На рис. показаны эпюры этих напряжений по толщине пластинки

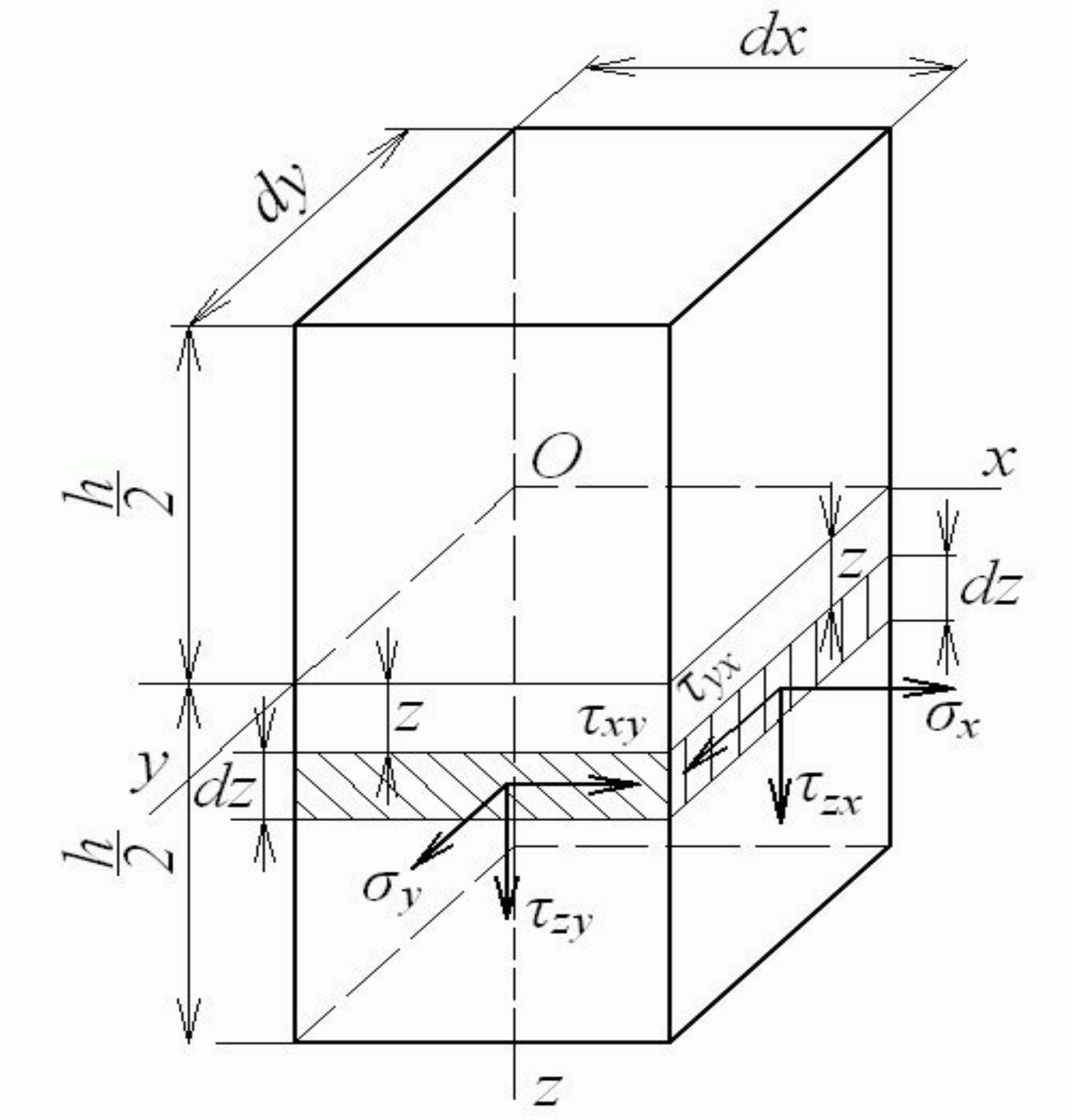


Напряжения σ_x, σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и распределяются по линейному закону, обращаясь в нуль в точках срединной плоскости; напряжения τ_{zy} и τ_{zx} распределяются по параболе, достигая в точках срединной плоскости максимального значения. Так же распределяются касательные напряжения и при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения.

В формулах (16) все напряжения выражены через одну функцию двух переменных *w(x,y)*, следовательно, функция прогибов играет здесь ту же роль, что и функция напряжений в плоской задаче.

Усилия в пластинке

Рассмотрим, какие усилия соответствуют напряжениям (16) в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости. На рис. изображен бесконечно малый элемент пластинки, вырезанный такими сечениями.



dx
dy
h/2
O
x
z
dz
τyx
τxy
σx
y
dz
τzx
h/2
σy
τzy
z

Рассмотрим вначале площадку с нормалью, параллельной оси x. По ней действуют составляющие напряжений σ_x τ_{xy}, и τ_{zx}. На рисунке показаны положительные напряжения: нормальное напряжение направлено по внешней нормали к сечению, а касательные — в направлении соответствующих положительных координатных осей, так как внешняя нормаль к сечению совпадает с положительным направлением оси x.

Обозначим через N_x нормальную силу, приходящуюся на единицу ширины рассматриваемого сечения. Она равна проекции на ось x равнодействующей внутренних сил в сечении с нормалью, параллельной оси x. На эту ось проецируется только нормальное напряжение σ_x. Соответствующая ему внутренняя сила на бесконечно малой площадке $dydz$ равна $\sigma_x dydz$, а на единицу ширины сечения приходится сила $\sigma_x dz$. Суммируя эти элементарные силы по толщине пластинки, получаем выражение нормальной силы

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

Под действием поперечной нагрузки в сечениях пластинки, перпендикулярных ее срединной плоскости, возникают следующие усилия:

Изгибающие моменты:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$

Крутящий момент:

$$H = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w;$$

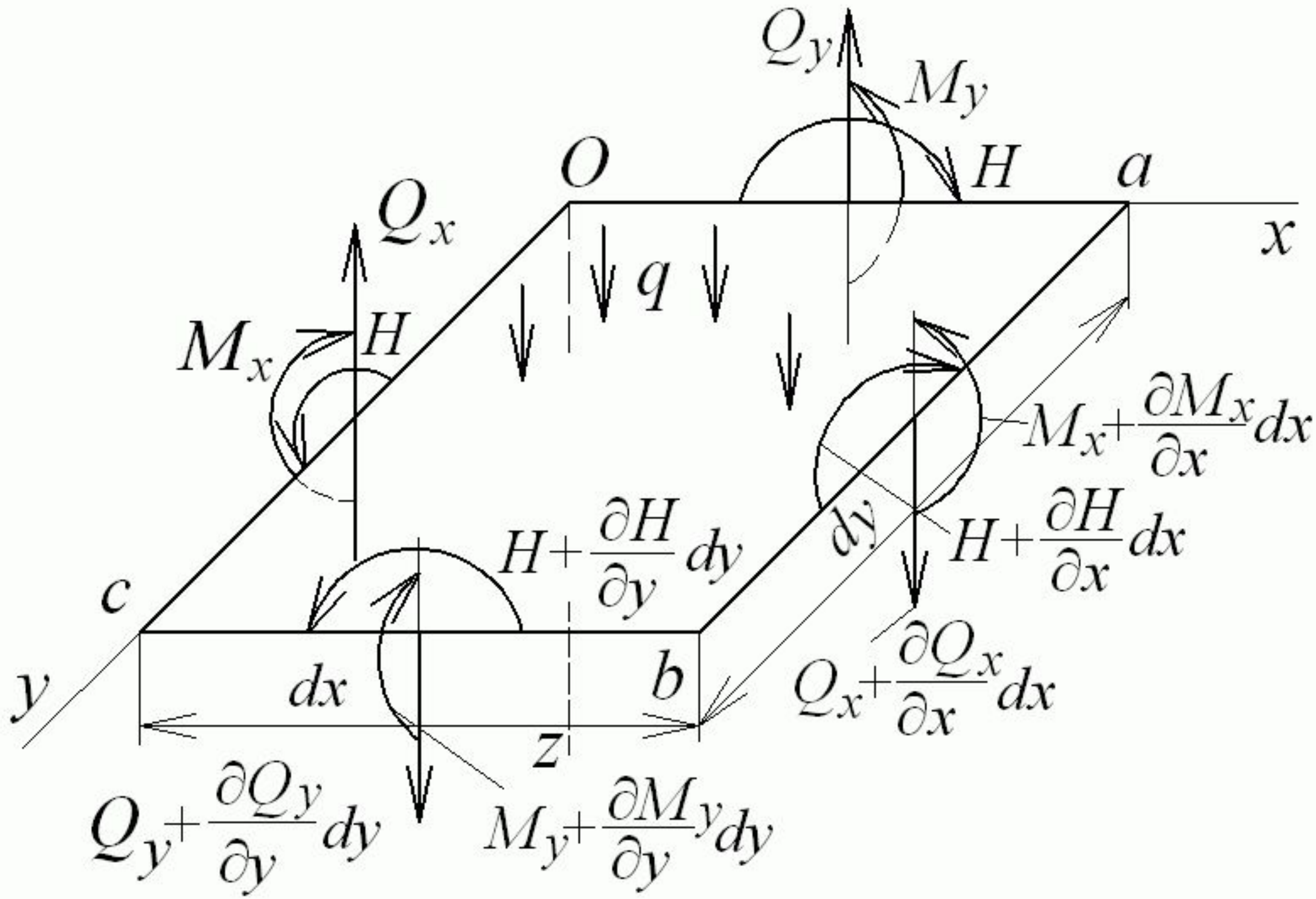
Поперечные силы:

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w;$$

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

Напряжения и усилия в пластинке выражены через прогибы ее срединной плоскости. Следовательно, для определения напряжений и усилий необходимо знать функцию прогибов $w(x,y)$.

Вырежем из срединной плоскости пластинки бесконечно малый элемент 0cba размерами dx, dy и покажем приложенные к нему усилия



Усилия в бесконечно малом элементе

На грани Ос действует поперечная сила . На грани ab, отстоящей от грани Ос на бесконечно малом расстоянии dx, поперечная сила получит бесконечно малое приращение и равна

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$$

Аналогично, на гранях оа и bc действуют соответственно поперечные силы и .

$$Q_y \qquad Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$$

Нормально к срединной плоскости действует поверхностная нагрузка интенсивность q.

Для того чтобы рассматриваемый элемент срединной плоскости находился в равновесии, должны удовлетворяться шесть условий равновесия: 3 уравнения проекций сил на координатные оси и 3 уравнения моментов относительно этих осей. При этом все усилия следует умножать на длину грани, по которой они действуют.

Спроецируем все силы, изображенные на рис. На ось Z:

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_y dx + q dx dy = 0$$

После упрощения получаем

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q \quad (1)$$

Уравнение моментов всех сил относительно оси y имеет вид

$$\left(M_x+\frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right)dy-M_x dy+\left(H+\frac{\partial H}{\partial y}dy\right)dx-$$

$$-Hdx-\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)dydx+Q_y dx\frac{dx}{2}-$$

$$-\left(Q_y+\frac{\partial Q_y}{dy}dy\right)dx\frac{dx}{2}-qdxdy\frac{dx}{2}=0.$$

После упрощения получаем

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}=Q_x \qquad (2)$$

Аналогично, из уравнения моментов всех сил относительно оси x следует

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=Q_y \qquad (3)$$

Исключим их уравнений (1)-(3) поперечные силы. В результате получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-q$$

Подставим в это уравнение выражения моментов

$$-D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\nu\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+2(1-\nu)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\nu\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right]=-q$$

Откуда после упрощения

$$-D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]=-q$$

В сокращенной форме записи

$$D\nabla^4 w - q = 0$$

или

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}$$

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}$$

Получили основное уравнение изгиба пластинки, обычно называемое уравнением Софи Жермен-Лагранжа. При его интегрировании появятся произвольные постоянные, которые должны быть определены их условий на контуре пластинки, зависящих от характера закрепления её краёв.

Условия на контуре пластинки

В зависимости от характера закрепления краев на контуре пластинки могут быть заданы прогибы и углы поворота срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы.

Условия на контуре пластинки

Условия, при которых на контуре задаются перемещения, т. е. прогибы или углы; поворота срединной плоскости, называются *геометрическими*.

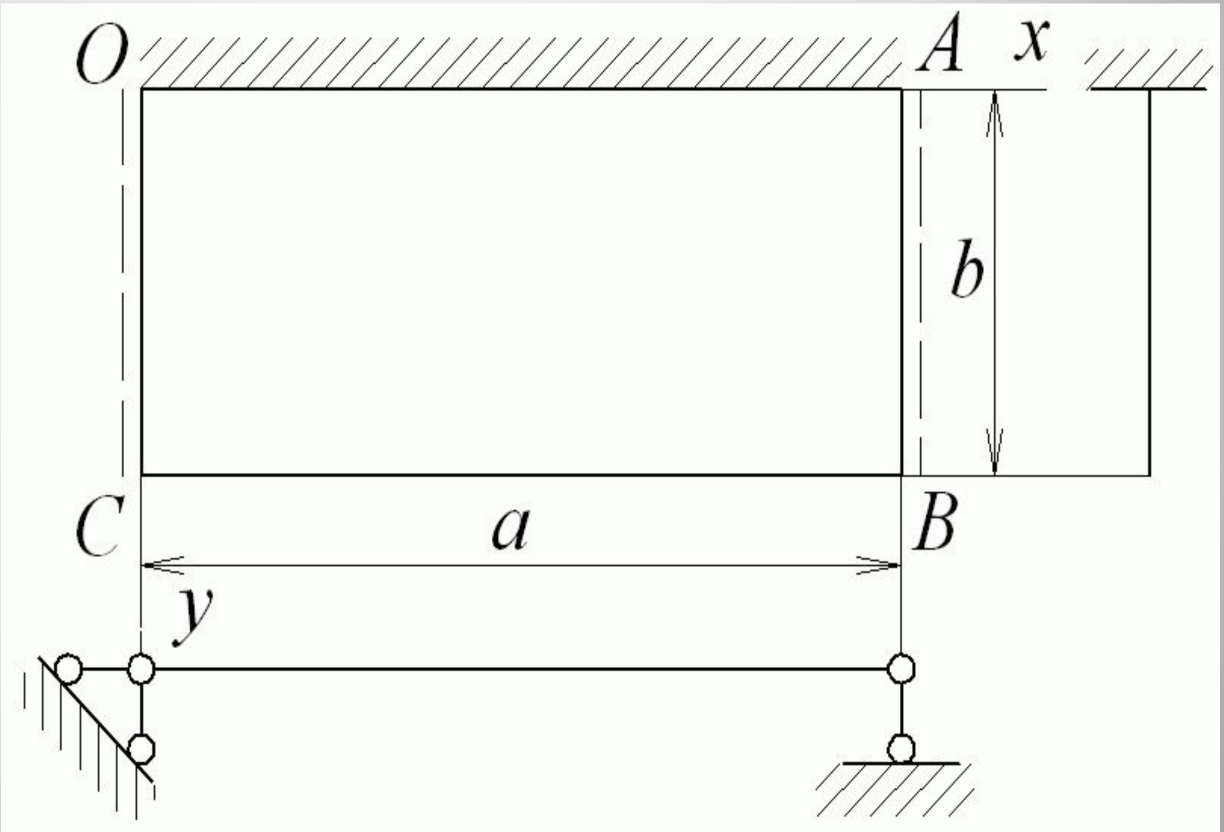
Условия на контуре пластинки

Условия, при которых на контуре задаются усилия, т. е. изгибающие или крутящие моменты и поперечные силы, называются *статическими.*

Условия на контуре пластинки

Если же заданы одновременно и перемещения, и усилия, то условия называются *смешанными.* На каждом крае следует задать два граничных условия.

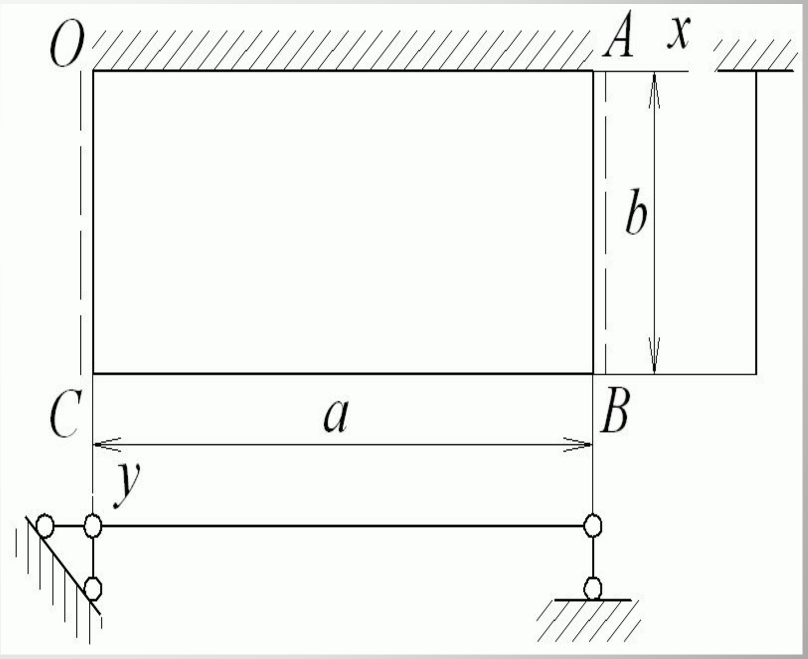
Сформулируем граничные условия для различных случаев закрепления краев прямоугольной пластинки представ-ленной на рис.



Защемленный край ОА. В защемлении отсутствуют прогибы и невозможен поворот краевого сечения относительно оси x. В связи с этим имеем следующие условия:

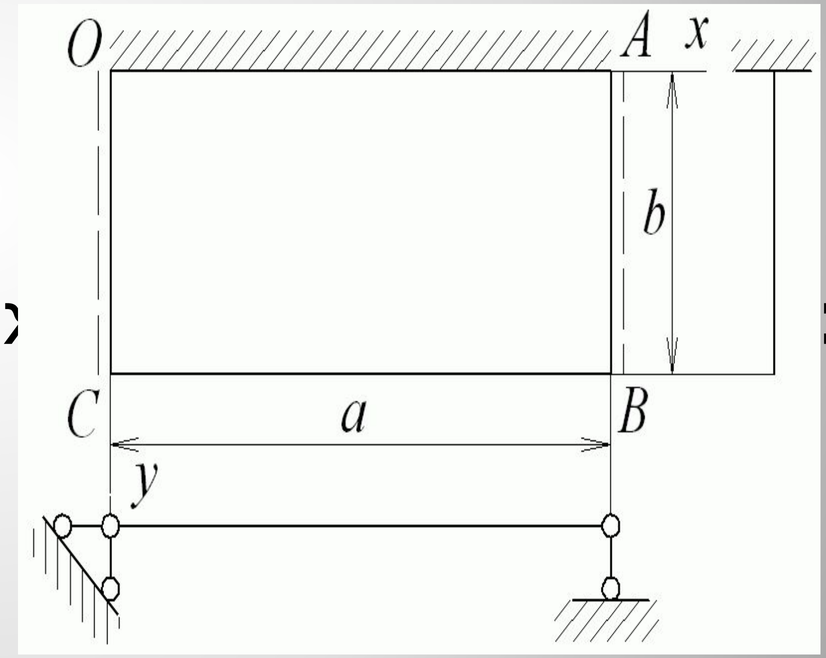
при

$$y = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$



Шарнирно опертые края ОС и АВ. На них равны нулю прогибы и изгибающие моменты, т.е. $w = 0$ и $M_x = 0$. Выражая изгибающий момент через прогибы

Выражая изгибаю-
щий момент через
прогибы пластинки,
последнее условие мож :



$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

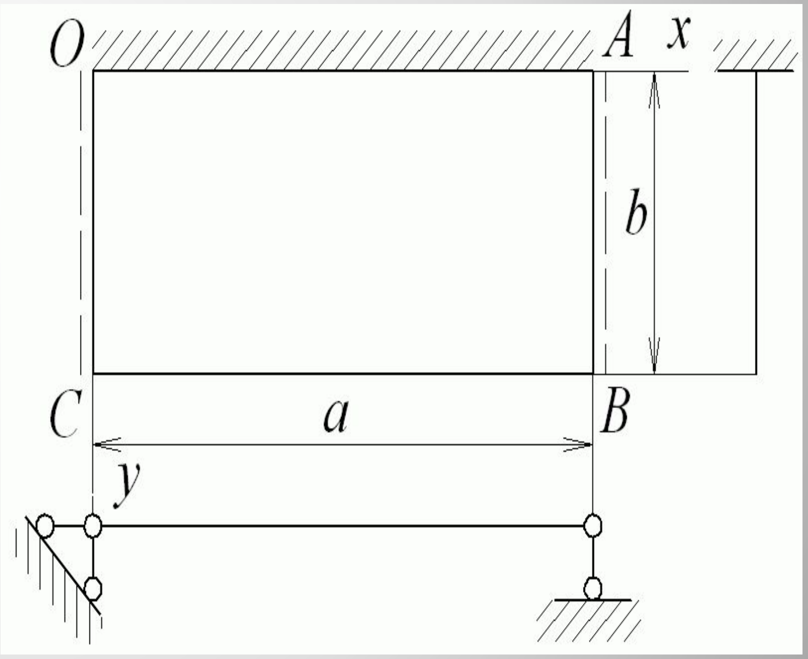
Однако при $x = const$ и $w = 0$ вторая производная $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

Поэтому граничные условия на шарнирно опертых краях и принимают вид:

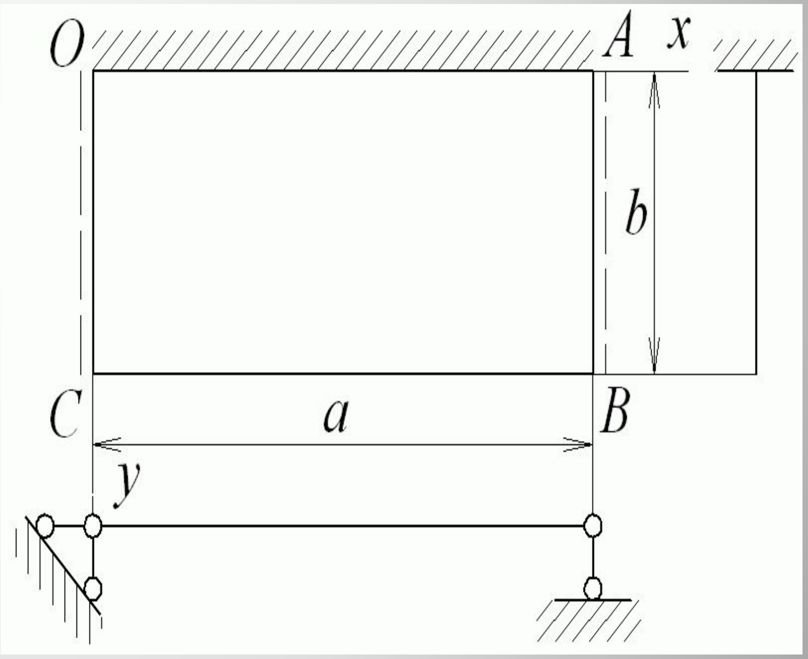
при $x = 0$ и

$x = a$ $w = 0$,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$



Свободный край СВ. Здесь должны обращаться в нуль изгибающий момент M_y, поперечная сила Q_y и крутящий момент $M_{кр}$, т. е. вместо необходимых двух условий появляются три.



Свободный край СВ. Здесь должны обращаться в нуль изгибающий момент M_y, поперечная сила Q_y и крутящий момент $M_{кр}$, т. е. вместо необходимых двух условий появляются три. Такое противоречие связано с тем, что задача решается приближенно и поэтому всем граничным условиям точно удовлетворить нельзя. Однако противоречие можно устранить, объединив два последних условия.

На свободной грани *CB* ,т.е. при y=b,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$