КУРСОВАЯ РАБОТА

Расчет свободной энергии ферромагнетика методом Гиббса

студентка физического факультета
группы 205
Улькина Н.С.

Постановка задачи

Вычислить свободную энергию F

ферромагнитной пластинки толщиной δ

Решение

определением свободной энергии

$$F = -T \ln Z \qquad Z = \sum_n e^{-E_n/T}$$

Для ферромагнетика характерны собственные малые колебания намагниченности относительно равновесного значения M_0, которые порождают специфический тип частиц (в твердом кристаллическом теле их принято называть квазичастицами или магнонами). Энергия магнонов в ферромагнетике дается следующим законом дисперсии:

$$\varepsilon_k = J_{ex}(ak)^2 + \mu_e H$$

Собственная энергия

$$E_n = n\sum_k \varepsilon_k$$

В результате для свободной энергии получаем

$$F = -T\ln\sum_n \exp\left(-n\frac{\sum_{ki}\varepsilon_k}{T}\right) = -T\ln\prod_k\sum_n \exp\left(-n\frac{\varepsilon_k}{T}\right) =$$

$$= -T\sum_k \ln\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-n\frac{\varepsilon_k}{T}\right) = T\sum_k \ln\left[1-\exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right)\right]$$

Перейдем от суммирования по $\vec{k}$ к интегрированию, речь идет о двумерном случае, и поэтому вместо объема V следует писать площадь пластины S

$$\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\sum_k(\ldots) = \int\frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2}(\ldots).$$

Волновой вектор $\vec{k}$

$$d^2\vec{k} = dk_x dk_y, \qquad k^2 = k_x^2 + k_y^2. \qquad k_x = k\sin\varphi, \qquad k_y = k\cos\varphi. \qquad d^2\vec{k} = dk_x dk_y = kdkd\varphi.$$

$$F = \frac{TS}{(2\pi)^2}\int_0^\infty kdk\ln\left(1-e^{-\varepsilon_k/T}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{TS}{2\pi}\int_0^\infty k\ln\left(1-e^{-\varepsilon_k/T}\right)dk.$$

Преобразуем интеграл

$$J = \int_0^\infty k\ln\left(1-e^{-\varepsilon_k/T}\right)dk = \frac{k^2}{2}\ln\left(1-e^{-\varepsilon_k/T}\right)\Big|_0^\infty - \frac{1}{2}\int_0^\infty k^2\frac{\partial}{\partial k}\left[\ln\left(1-e^{-\varepsilon_k/T}\right)\right]dk.$$

Закона дисперсии магнона

$$\hbar v_k = \frac{\partial\varepsilon_k}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}\left[J_{ex}(ak)^2 + \mu_e H\right] = 2J_{ex}a^2k.$$

Значи

$$\frac{\partial}{\partial k}\left[\ln\left(1-e^{-\varepsilon_k/T}\right)\right] = \frac{1}{T}\cdot\frac{2J_{ex}a^2k}{e^{\varepsilon_k/T}-1}$$

т

Следовательно $J = -\frac{J_{ex} a^2}{T} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{e^{-\varepsilon_k/T} - 1}.$

Введем подстановку $x = \frac{\varepsilon_k}{T}$ отсюда $k^2 = \frac{Tx - \mu_e H}{a^2 J_{ex}}.$

Обозначим $b = \frac{\mu_e H}{T}$

$$J = -\frac{T}{2a^2 J_{ex}} \int_b^\infty \frac{x-b}{e^x - 1} dx = \frac{\mu_e H}{2a^2 J_{ex}} \int_b^\infty \frac{dx}{e^x - 1} - \frac{T}{2a^2 J_{ex}} \int_b^\infty \frac{x dx}{e^x - 1},$$

Пусть $y = e^x$ $J_1 = \int_b^\infty \frac{dx}{e^x - 1} = \int_{e^b}^\infty \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{y} \right) dy =$

$$= \ln\left(\frac{y-1}{y}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{y}\right)\Bigg|_{e^b}^\infty = -\ln\left(1 - e^{-b}\right).$$

$$J_2 = \int_b^\infty \frac{xdx}{e^x - 1} \approx \int_b^\infty e^{-x} x dx = -xe^{-x}\Big|_b^\infty + \int_b^\infty e^{-x} dx = be^{-b} - e^{-x}\Big|_b^\infty = (b+1)e^{-b}, \qquad b \gg 1$$

$$J_2 = \int_b^\infty \frac{xdx}{e^x - 1} \approx \int_0^\infty \frac{xdx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad b \ll 1$$

Собирая все воедино, получаем свободную энергию ферромагнитной пластины

$$F = \frac{TS}{2\pi} \int_0^\infty k \ln\left(1 - e^{-\varepsilon_k / T}\right) dk =$$

$$= -\frac{T^2 S}{4\pi a^2 J_{ex}} \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{6} + \dfrac{\mu_e H}{T} \ln\left(\dfrac{\mu_e H}{T}\right), & \text{если} \quad T \gg \mu_e H, \\ e^{-\mu_e H / T}, & \text{если} \quad T \ll \mu_e H, \end{cases}$$

Презентация завершена!

Спасибо за внимание!!!