Экстремумы функций.

«Применение производной к исследованию функций»

Цели занятия:

Образовательная:

- систематизировать знания и создать разноуровневые условия контроля (самоконтроля, взаимоконтроля) усвоения знаний и умений

Развивающая:

- способствовать формированию умений применять полученные знания в новой ситуации, развивать математическое мышление, речь

Воспитательная:

- содействовать воспитанию интереса к математике, активности, мобильности, умения общаться

Памятка.
Метод интервалов.

Основные положения:

1. Знак произведения (частного) однозначно определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).
2. Знак произведения не изменяется (изменится на противоположный), если изменить знак у четного (нечетного) числа сомножителей.
3. Знак линейной функции с ненулевым угловым коэффициентом и знак квадратичной функции справа от большего (или единственного) корня совпадают со знаком их старшего коэффициента.
4. Если строго возрастающая (убывающая) функция имеет корень, то справа от корня она положительна (отрицательна) и при переходе через корень меняет знак.

Замечания:

1. В случае отсутствия корней знак квадратичной функции совпадает со знаком ее старшего коэффициента на всей области определения этой функции.
2. Положение 3 и замечание 1 справедливы для многочлена любой степени.

Проверка домашнего задания.

Найти производную функции:

а) $3x^4 - 2x + 5$;

б) $x^2 * \sin x$.

2. Найти значения x, в которых значение функции равно 0, если:

а) $f(x)=5x^2+3x$;

б) $f(x)=x*e^2$;

в) $f(x)=2x^3-4x^2$.

3. Решить неравенство:

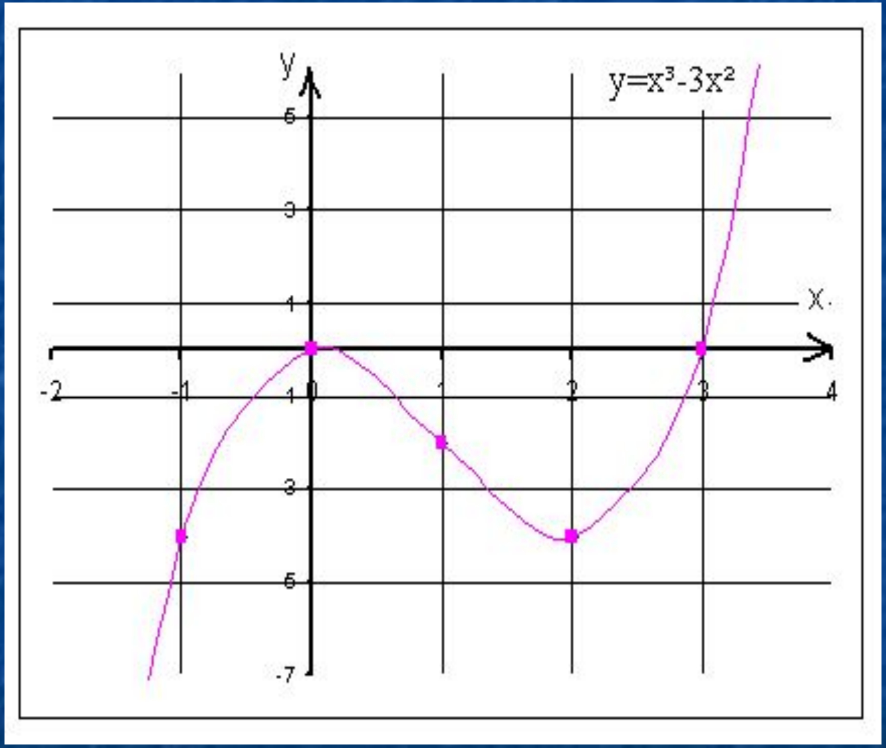
а) $15x+1 \geq 0$;

б) $x(x-3)<0$;

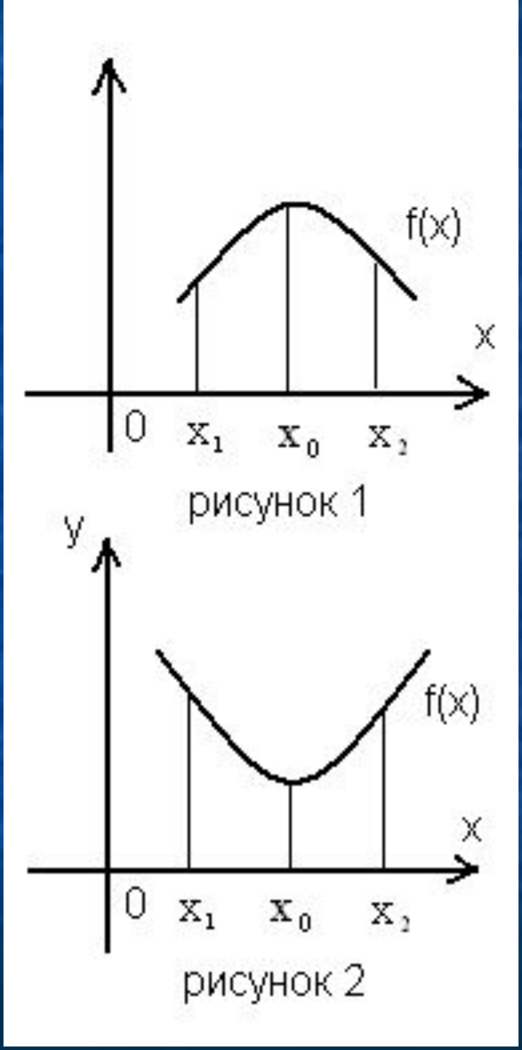
в) $(x-1)/x>0$.

Работа с графиком.

- Рассмотрим рисунок, на котором изображен график функции $y=x^3-3x^2$. Рассмотрим окрестность точки $x=0$, т.е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Из рисунка видно, что такая окрестность существует и наибольшее значение функция принимает в точке $x=0$. Эту точку называют точкой максимума. Аналогично точку $x=2$ называют точкой минимума, так как функция в этой точке принимает значение меньшее, чем в любой точке окрестности $x=2$.



Нужно запомнить:



Точка x0 называется **точкой максимума** функции f(x), если существует такая окрестность точки x0, что для всех x отличных от x0 из этой окрестности выполняется неравенство

$f(x)<f(x0)$.

(рисунок 1)

Точка x0 называется **точкой минимума** функции f(x), если существует такая окрестность точки x0, что для всех x отличных от x0 из этой окрестности выполняется неравенство

$f(x)>f(x0)$.

(рисунок 2)

Точки максимума и точки минимума называются **точками экстремума**.

Немного из истории математики:

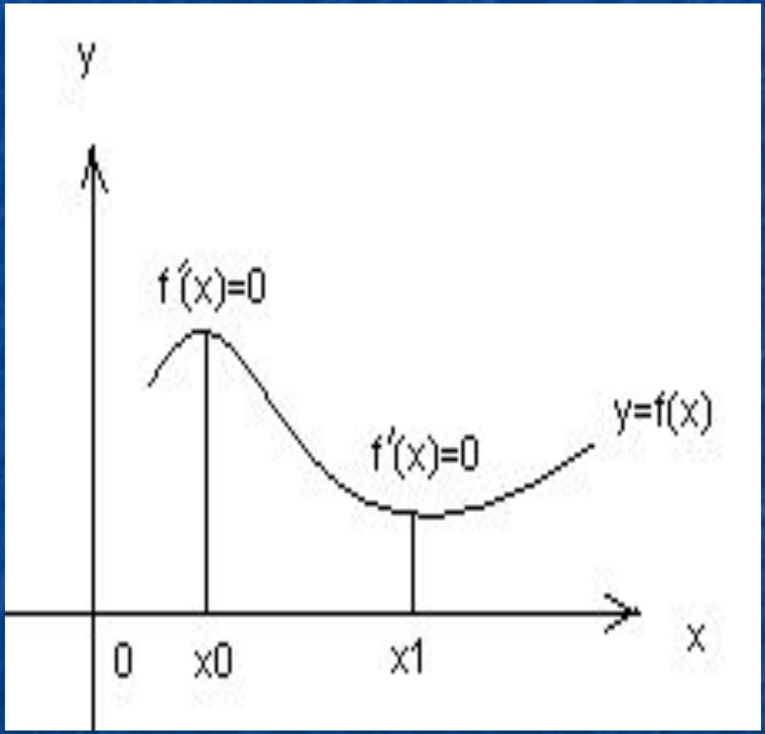
Пьер Ферма.
(1601 – 1665)

Работа советника в городском парламенте Тулузы не мешала Ферма заниматься математикой. Постепенно он приобрел славу одного из первых математиков Франции. Он соперничал с французским ученым Р. Декартом в создании аналитической геометрии, общих методов решения задач на максимум и минимум. Его приемы построения касательных к кривым, вычисления площадей криволинейных фигур, вычисления длин криволинейных прокладывали дорогу к созданию дифференциального и интегрального исчислений. С работ Ферма началась новая математическая наука - теория чисел.

Теорема Ферма.

Если x_0 – точка экстремума дифференцируемой функции f(x), то f □ (x)=0.

Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции y =f(x) в точке (x_0; f(x_0)), где x_0 – точка экстремума функции y =f(x), параллельна оси абсцисс, и поэтому ее угловой коэффициент f □ (x) равен нулю.



Стационарные и критические точки

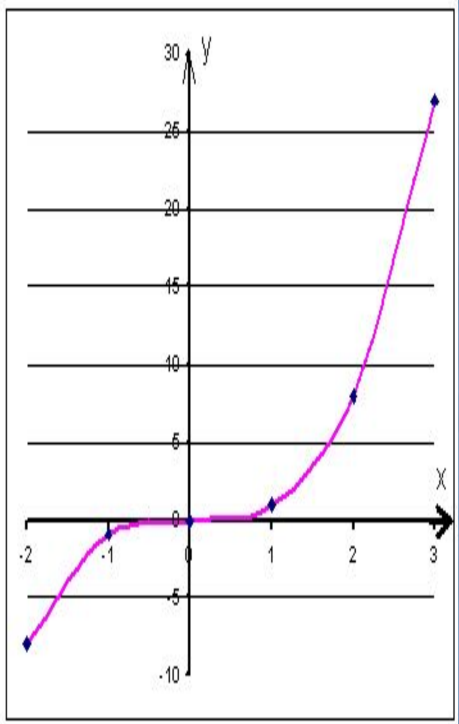


рисунок 1

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными,** т.е. если f □ (x)=0, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x - точка экстремума.

Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называются **критическими точками** этой функции.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^3$. Ее производная $f'(x)=3x^2$, f □ (x)=0. Однако x=0 не является точкой экстремума, так как функция возрастает на всей числовой оси (рисунок 1).

Сформулируйте достаточное условие того, что стационарная точка является точкой экстремума.

Теорема: Пусть функция f(x) дифференцируема на интервале (a; b), x_0 є (a; b), и f □ (□x)=0.

Тогда:

1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. f □(x)>0 слева от точки x_0 и f □(x)<0 справа от точки x_0, то x_0 точка максимума функции f(x) (рисунок 1).
2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции f(x) ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 точка минимума функции f(x) (рисунок 2).

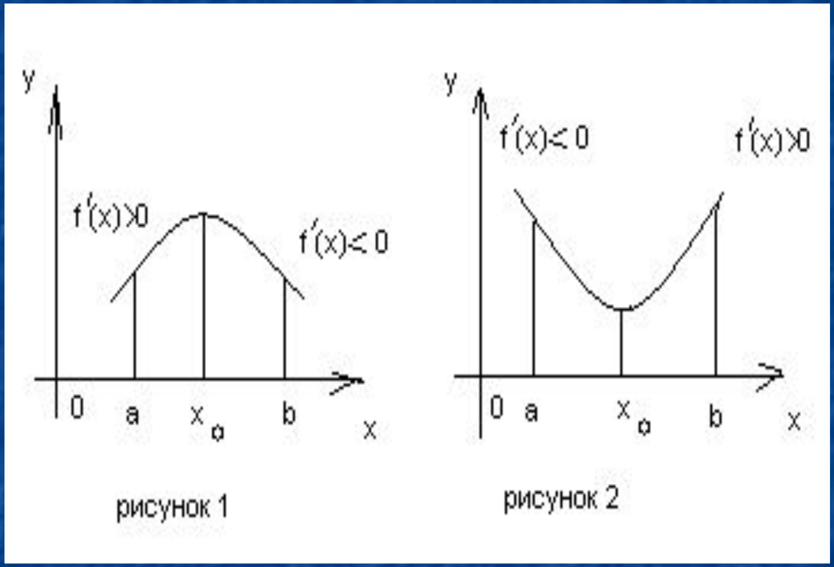


рисунок 1

рисунок 2

План нахождения экстремум функции.

1. Найти производную функции.
2. Найти стационарные точки функции, т.е. производную приравнять к нулю.
3. Используя метод интервалов выяснить, как меняются знаки производной.
4. По знакам перехода функции определить точки минимума или максимума.

Рассмотрим задание 1:

Найти точки экстремума функции f(x)=9x-3.

Решение:

1) Найдем производную функции:

$f'(x)=9$

2) Найдем стационарные точки:

Стационарных точек нет.

3) Данная функция линейная и возрастает на всей числовой оси, поэтому точек экстремума функция не имеет.

Ответ: функция f(x)=9x-3 не имеет точек экстремума.

Рассмотрим задание 2:

Найти точки экстремума функции $f(x)=x^2-2x$.

Решение:

1) Найдем производную функции:

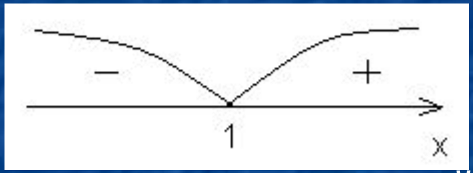
$f'(x)=2x-2$

2) Найдем стационарные точки:

$2x-2=0$

$X=1$.

3) Используя метод интервалов, найдем, как меняется знак производной (см. рисунок):



4) При переходе через точку $x=1$ знак производной меняется со знака с «-» на «+», поэтому $x=1$ – является точкой минимума.

Ответ: точка $x=1$ является точкой минимума функции $f(x)= x^2-2x$.

Рассмотрим задание 3:

Найти точки экстремума функции $f(x)=x^4-4x^3$.

Решение:

1) Найдем производную функции:

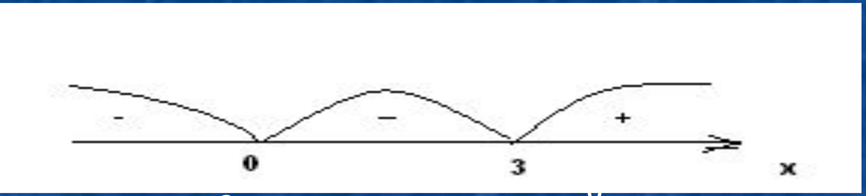
$f'(x)=4x^3-12x^2$

2) Найдем стационарные точки:

$4x^3-12x^2=0$

$X1=0$, $x2=3$.

3) Используя метод интервалов, найдем, как меняется знак производной (см. рисунок):

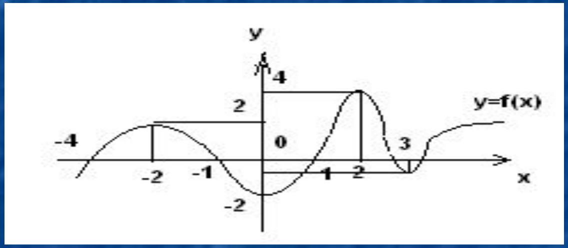


4) При переходе через точку $x=0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума, а при переходе через точку $x_1=3$ производная меняет знак с «-» на «+», поэтому $x_2=3$ – является точкой минимума.

Ответ: точка $x=3$ является точкой минимума функции $f(x)= x^4 -4x^3$.

Самостоятельно выполнить следующие задания:

1) По данному рисунку определить точки максимума и минимума функции $y=f(x)$.



2) Найти стационарные точки:

а) $y=e^2 -2e$;

б) $y=2x^3-15x^2+36x$;

в) $y=\sin x-\cos x$;

г) $y=(2+x^2)/x$.

3) Найти экстремумы функции:

а) $f(x)=x^3-x$;

б) $f(x)=x^4-8x^2+3$;

в) $f(x)=x+\sin x$;

г) $f(x)=x-\cos 2x$.

Физкультминутка.
Для учащихся предлагается выполнить несколько физических упражнений, чтобы снять усталость и напряжение за длительную работу на компьютере.

1. Сидя на стуле:
- руки за голову;
- локти развести пошире, голову наклонить назад;
- локти вперед, голову вперед;
- руки расслабленно вниз;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.
2. Сидя на стуле:
- голову плавно отвести назад;
- наклонить плавно голову вперед;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.
3. Упражнение для глаз:
- быстро поморгать;
- закрыть глаза и посидеть спокойно;
- медленно сосчитать до пяти;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.
4. Упражнение для глаз:
- крепко зажмурить глаза;
- медленно сосчитать до пяти;
- открыть глаза и посмотреть вдаль;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.
5. Упражнение для глаз:
- посмотреть на указательный палец вытянутой руки;
- посмотреть вдаль;
- упражнение повторить 4 – 5 раз.

Тестирование:

Для выполнения теста необходимо открыть файл, который находится в папке «Экстремумы функции» на диске С: под названием «Тест № 1». В результате выполнения работы вы получаете оценку за свои знания. Также для систематизации знании вы можете выполнить следующие тесты на повторение изученного ранее материала («Тест №2», «Тест №3», «Тест №4», «Тест №5»).

Домашнее задание:

1. Найти экстремумы функции:

а) $y=x^3-4x^2$;

б) $y=3x^4-4x^3$;

2. Найти стационарные точки:

а) $y=x^4-4x^3-8x^2+1$;

б) $y=\cos 2x+2\cos x$.

Спасибо за внимание!