

РЕШЕНИЕ

ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

9-11 КЛАССЫ

**ВЫПОЛНИЛА УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ ШКОЛЫ
№654 САНКТ-ПЕТЕРБУРГА
МАВЧУН ЕЛИЗАВЕТА МАРКОВНА**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Что такое задача?
2. Задачи на проценты, сплавы и растворы
3. Задачи на движение по замкнутой траектории
4. Задачи на движение по суше и воде
5. Задачи на совместную работу



- Задача – это описание некоторой ситуации на естественном языке, с требованиями дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между её компонентами или определить вид этого отношения.



ТИПЫ ЗАДАЧ

- на проценты, сплавы и смеси
- на движение по суше, по воде или по окружности
- на совместную работу
- на прогрессии



ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

- Анализ условия
- Выбор способа решения (арифметический, алгебраический или графический)
- Составление математической модели (уравнение, система уравнений)
- Работа с математической моделью
- Анализ полученного результата на достоверность
- Формулировка ответа к задаче



Часть 1

Задачи на проценты, сплавы и растворы



Немного теории :


- Процент от числа- это сотая доля этого числа, чтобы найти $p\%$ от числа a необходимо вычислить произведение $0,01pa$.
- При решении задач на проценты справедливы следующие утверждения:
 1. Если некоторое число a увеличить на $p\%$, то получим $a(1+ 0,01p)$
 2. Если некоторое число a уменьшить на $p\%$, то получим $a(1- 0,01p)$



3. Если некоторое число a увеличить на $p\%$, а полученный результат уменьшить на $m\%$, то получим

$$a(1+0,01p)(1-0,01m)$$

4. Положенная в банк под $p\%$ годовых начальная сумма S через n лет с учётом процента достигнет величины

$$S_n = S_0(1 + 0,01p)^n$$


ЗАДАЧА №1

Семья состоит из мужа, жены и дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

При увеличении вдвое зарплаты мужа общий доход семьи увеличивается на одну его зарплату.

Следовательно, зарплата мужа составляет 67% всего дохода семьи.

При уменьшении втрое стипендии дочери общий доход семьи сокращается на две трети её стипендии.

Следовательно, две трети её стипендии составляют 4% от общего дохода, а вся стипендия дочери составляет 6% общего дохода семьи.

Таким образом зарплата жены составляет:

$$100 - 67 - 6 = 27$$

Ответ: 27%



ЗАДАЧА №2

В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения этой задачи удобно воспользоваться приведённой в теоретической части формулой.

Примем за **a** начальную цену акций, а искомый процент за **p**. Тогда после повышения и последующего понижения цены она достигла величины $a(1 + 0,01p)(1 - 0,01p)$, что по условию составило 96% от первоначальной цены. По условию задачи составляем уравнение :

$$a(1 + 0,01p)(1 - 0,01p) = 0,96a$$

$$1 - (0,01p)^2 = 0,96$$

так как **p** число положительное, то

$$0,01p = 0,2$$

$$p = 20$$

Ответ: в понедельник акции подорожали на 20%.



ЗАДАЧА №3

Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1 раствор + 2 раствор = новый раствор

	15% вещества
--	-----------------

	19% веществ а
--	---------------------

	? веществ а в %
--	-----------------------

Примем за 1 количество вещества в первом растворе, тогда по условию задачи количество второго раствора тоже 1. Примем за X концентрацию получившегося раствора. Тогда по условию задачи составим уравнение

$$0,15 + 0,19 = 2y$$

$$y = 0,34:2$$

$$y = 0,17$$

Ответ: концентрация получившегося раствора 17%



ЗАДАЧА №4

Первый сплав содержит 10% меди, второй - 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1 сплав + 2 сплав = 3 сплав

10%
меди

40%
меди

30%
меди

Пусть x - масса первого сплава, тогда $x+3$ – масса второго сплава и масса третьего сплава $2x+3$.

$0,1x$ – масса меди в первом сплаве

$0,4(x + 3)$ – масса меди во втором сплаве

$0,3(2x + 3)$ – масса меди в третьем сплаве

По условию задачи составляем уравнение:

$$0,1x + 0,4(x + 3) = 0,3(2x + 3)$$

$$0,1x = 0,3$$

$$x = 3$$

$$2x + 3 = 9$$

Ответ: масса третьего сплава 9 кг.



Часть 2

Задачи на движение по замкнутой траектории (окружности)



НЕМНОГО ТЕОРИИ:

Пусть скорости двух тел, начинающих движение одновременно, V_1 и V_2 , тогда при движении в одном направлении по замкнутой траектории длины S при условии $V_1 > V_2$ тела, отправляющиеся из одной точки, снова встретятся через время $t = S:(V_1 - V_2)$



- При встречном движении по замкнутой траектории длины S тела, отправляющиеся из одной точки, снова встретятся через время $t = S:(v_1+v_2)$



ЗАДАЧА №1

Из одной точки круговой трассы, длина которой 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

$$40 \text{ мин} = 2/3 \text{ часа}$$

Пусть x - неизвестная скорость второго автомобиля. Так как движение происходит по кольцевой трассе в одном направлении, то по условию задачи составим уравнение

$$14:(80 - x) = 2/3$$

$$80 - x = 21$$

$$x = 59$$

Ответ: скорость второго автомобиля 59 км/ч.



ЧАСТЬ 3

Решение задач на движение по воде и по суше



НЕМНОГО ТЕОРИИ:

Пусть скорости двух тел, начинающих движение одновременно, V_1 и V_2 а расстояние между ними S . Тогда:

- при движении навстречу друг другу они встретятся через время $t = S:(V_1 + V_2)$

- при движении в одну сторону, если $V_1 > V_2$, то первое тело догонит второе через время $t = S:(V_1 - V_2)$

- при движении в противоположные стороны V_1 и V_2 через время t будут находиться на расстоянии

$$S = t(V_1 + V_2) \text{ друг от друга}$$

- при движении тела V_1 его собственная скорость увеличивается на скорость течения при движении по течению, и уменьшается на скорость течения при движении против течения



Задача №1

Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть X – скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. По смыслу задачи $X > 1$. Составим таблицу по условию задачи.

	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Первый велосипедист	240	X	$240 / X$
Второй велосипедист	240	$X - 1$	$240 / (X - 1)$

Поскольку первый велосипедист прибыл к финишу на 1 час раньше второго, составляем уравнение: $240 / (X - 1) - 240 / X = 1$

В результате решения дробно-рационального уравнения получаем единственный положительный корень $X = 16$

Ответ: искомая скорость 16 км/ч.



ЗАДАЧА №2

Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 12 часов раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 2 часа 30 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть X - время, которое затратил на путь из В в А велосипедист, тогда $X - 1$ время, которое затратил на путь из А в В мотоциклист. По условию задачи составим таблицу, приняв весь путь за единицу.

	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Мотоциклист	1	$1 : (X - 12)$	$X - 12$
Велосипедист	1	$1 : X$	X



По смыслу задачи $X > 12$. По условию задачи составляем уравнение:

$$1 : (X - 12) + 1 : X = 2/5$$

В результате решения получаем два корня

$X = 2$ – посторонний корень

$$X = 15$$

Ответ: велосипедист затратил на путь из В в А 15 часов



ЗАДАЧА № 3

Из города А в город В, расстояние между которыми 30 км, выехал грузовик. Через 10 мин вслед за ним отправился легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости грузовика. Найдите скорость легкового автомобиля, если известно, что он приехал в город В на 5 мин раньше, чем грузовик.



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть X – скорость грузовика, тогда $X+20$ – искомая скорость легкового автомобиля. По смыслу задачи $X > 0$. По условию задачи составим таблицу с учётом того, что легковой автомобиль был в пути на 15 мин меньше, чем грузовик.

$$15 \text{ мин} = 1/4 \text{ часа}$$

	Расстояние	Скорость	Время
Грузовик	30	X	$30 : X$
Автомобиль	30	$X + 20$	$30 : (X + 20)$



По условию задачи составляем уравнение:

$$30 : X - 30 : (X + 20) = 1/4$$

$$X > 0$$

В результате решения получаем с учётом ОДЗ один корень $X = 40$

$$X + 20 = 60$$

Ответ: скорость автомобиля 60 км/ч



ЧАСТЬ 4

Решение задач на совместную работу



Немного теории

Большинство задач на совместную работу могут быть решены при помощи следующего алгоритма:

- ввести в задачу переменную X , найти её область определения
- составляем таблицу со столбцами «работа», «производительность» и «время»
- заполнить два столбца таблицы по данным задачи, если не задано численное значение объёма работы, то принимаем его за единицу
- заполняем оставшийся «ключевой столбец» с использованием формулы $A=nt$
- по данным ключевого столбца составляем уравнение и решаем его на области определения



ЗАДАЧА №1

Две бригады, работая вместе, могут закончить уборку урожая за 8 дней. Если первая бригада будет работать 3 дня, а вторая 12 дней, то они выполнят 75% всей работы. За сколько дней может закончить уборку урожая каждая бригада, работая отдельно?



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть X – производительность первой бригады, тогда $1/8 - X$ – производительность второй бригады. По смыслу задачи X – число положительное, меньше $1/8$. $A = nt$

По условию задачи составляем таблицу:

	Работа, A	Производительность, n	Время, t
Общая производительность	1	$1/8$	8
Производительность 1 бригады	$12X$	X	12
Производительность 2 бригады	$3(1/8 - X)$	$1/8 - X$	3



По ключевому столбцу составляем уравнение, учитывая, что 75% - это $\frac{3}{4}$ всей работы:

$$12X + 3\left(\frac{1}{8} - X\right) = \frac{3}{4}$$

$$12X + \frac{3}{8} - 3X = \frac{3}{4}$$

$$9X = \frac{3}{8}$$

$$X = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{8} - X = \frac{1}{12}$$

Воспользуемся формулой $A = nt$ для нахождения времени, которое потребуется каждой бригаде для выполнения всей работы.

Ответ: первой бригаде потребуется 24 дня, а второй 12 дней.



ЗАДАЧА №2

Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня - на 9.

Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?



ХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Примем за X количество вопросов в тесте. По смыслу задачи $X > 0$. По данным задачи составим таблицу:

	Работа, количество вопросов в тесте)	Производительность, вопросов в минуту	Затраченное время, в минутах
Ваня	X	8	$X / 8$
Петя	X	9	$X / 9$



Петя прошёл тест на 20 мин = $\frac{1}{3}$ часа
позже Вани. Отсюда имеем: $X / 8 - X / 9 =$
 $\frac{1}{3}$

$$X / 72 = \frac{1}{3}$$

$$X = 24$$

Ответ: тест содержит 24 вопроса.



Спасибо за внимание!

