

Решение задач С2.

Нахождение расстояния между
двумя скрещивающимися
прямыми

- Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Для решения задач подобного типа существует несколько методов решения.

- 1. (Метод построения общего перпендикуляра или поэтапно-вычислительный метод). В этом случае строится общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный каждой из них) и находится его длина

- 2. (Метод параллельных прямой и плоскости). В этом случае строится плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

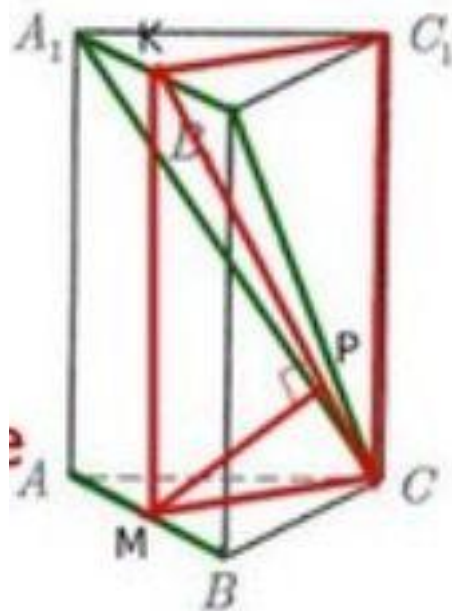
- 3. (Метод параллельных плоскостей). В этом случае данные скрещивающиеся прямые заключаются в параллельные плоскости, проходящие через них, и находится расстояние между этими плоскостями.

Рассмотрим решение задачи

В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и $C B_1$

- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой. Чтобы найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, нужно:
 - 1. Через одну из прямых провести плоскость, параллельную второй прямой.
 - 2. Из любой точки первой прямой опустить перпендикуляр на плоскость и найти его длину. То есть задача сводится к нахождению расстояния от точки до плоскости. Это можно сделать геометрическим методом или с помощью метода координат.

Теперь рассмотрим в плоскости МСС 1 прямоугольный треугольник МКС и проведем в нем высоту МР: Длина высоты МР треугольника и есть расстояние между прямыми АВ и СВ 1, которой нам нужно найти.



Чтобы найти высоту MP , выразим два раза площадь треугольника MKS

$$S = \frac{1}{2} KM \cdot MC = \frac{1}{2} KC \cdot MP$$

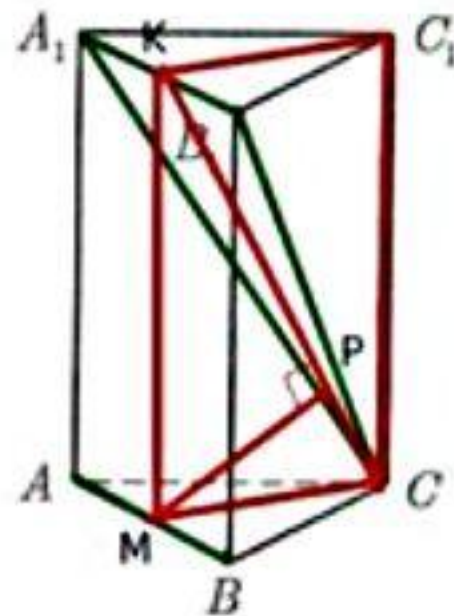
$$KM \cdot MC = KC \cdot MP$$

$$KM = 1 \quad MC = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$KC = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot MP$$

$$MP = \frac{\sqrt{21}}{7}$$



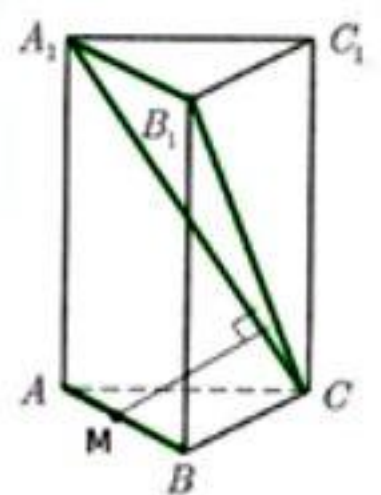
Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Аналитический способ решения задачи

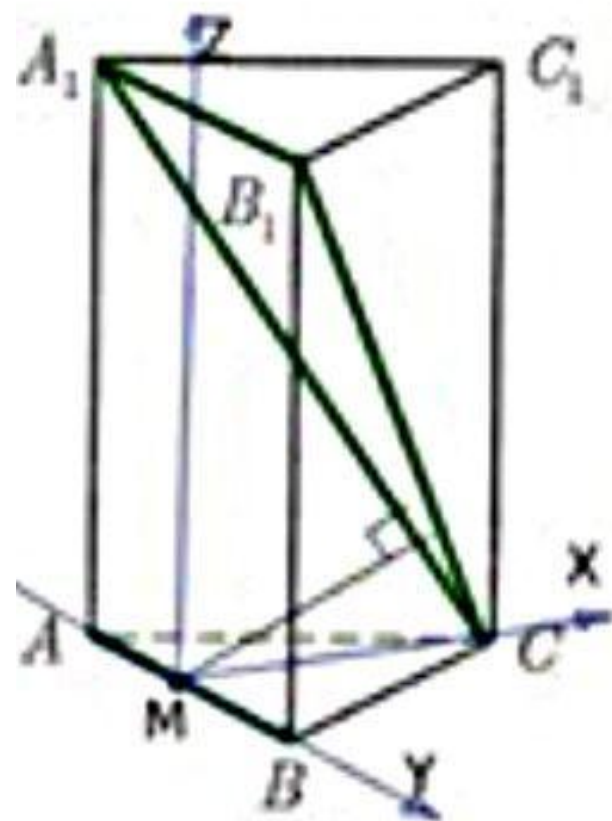
- Как мы помним из геометрического метода решения этой задачи, расстояние между прямыми AB_1 и A_1C есть расстояние от точки M , которая является серединой отрезка AB до плоскости A_1B_1C :

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$ вычисляется по такой формуле:

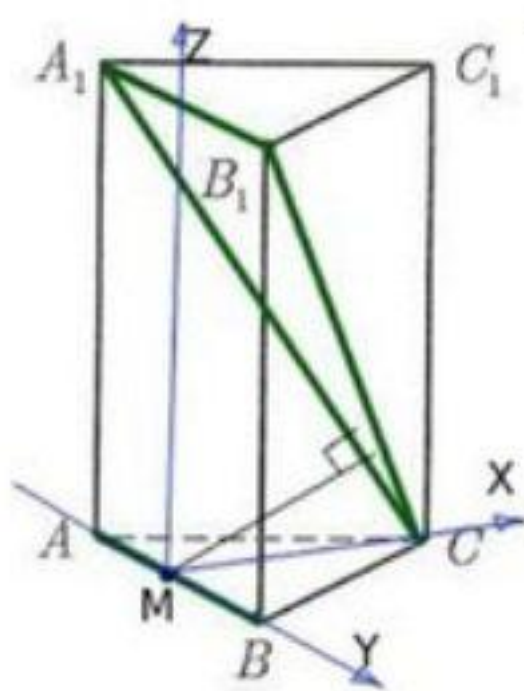
$$\rho = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



- Нам надо выбрать систему координат таким образом, чтобы координаты точки M и точек A_1 , B_1 и C_1 , задающих плоскость $A_1 B_1 C_1$ вычислялись наиболее простым способом и содержали как можно больше нулей. Поэтому удобно выбрать систему координат вот таким образом: Поместим нашу призму в систему координат. Если мы решаем задачу с кубом или прямоугольным параллелепипедом, то выбор системы координат очевиден: мы помещаем начало координат в одну из вершин куба, а оси направляем вдоль ребер. В случае призмы это не столь очевидно.



Запишем координаты получившихся точек



$$M(0; 0; 0)$$

$$A_1(0; -\frac{1}{2}; 1)$$

$$B_1(0; \frac{1}{2}; 1)$$

$$C(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$$

- Чтобы найти коэффициенты a , b , c и d в уравнении $ax+by+cz+d=0$ плоскости $A_1B_1C_1$, примем коэффициент $a \neq 1$, и подставим координаты точек A_1 , B_1 и C_1 в уравнение плоскости. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot a - \frac{1}{2}b + c + 1 = 0 \\ 0 \cdot a + \frac{1}{2}b + c + 1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}b + c + 1 = 0 \\ \frac{1}{2}b + c + 1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

Подставим значения коэффициентов и координаты точки $M(0;0;0)$ в формулу для расстояния.

$$\rho = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Получим:

$$\rho = \frac{\left| -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \right|}{\sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3} + 1}} = 1 : \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$