

Решение иррациональных уравнений с параметром.



Решение иррационального уравнения

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

Зависит от четности натурального числа n :

- если n – **четное**, то есть $n=2k$, где k – натуральное число, то данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$$

- если n – **нечетное**, то есть $n=2k+1$, где k – натуральное число, то данное уравнение равносильно уравнению:

$$f(x) = g^{2k+1}(x)$$

Пример 1. Решить уравнение относительно x

$$\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$$

Решение: исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ (a - 2)x = 1 + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x = \frac{1 + 2a}{a - 2}, \\ a \neq 2. \end{cases}$$

Найдем a , при которых $\frac{1 + 2a}{a - 2}$ больше -1 , т.е. решим неравенство

$$\frac{1 + 2a}{a - 2} \geq -1 \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $\forall a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty) \quad x = \frac{1 + 2a}{a - 2}$

$\forall a \in \left(\frac{1}{3}; 2\right]$ - решений нет.

Пример 2. При каких a уравнение имеет единственный корень?

$$\sqrt{x+3} = 2x - a$$

Решение: исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x - a \geq 0 \\ x + 3 = 4x^2 - 4ax + a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{a}{2} \\ 4x^2 - (4a + 1)x + a^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, если:

$$\begin{cases} D = 0 \\ f\left(\frac{a}{2}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4a + 1)^2 - 16(a^2 - 3) = 0 \\ 4 \cdot \frac{a^2}{4} - (4a + 1) \cdot \frac{a}{2} + a^2 - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{49}{8} \\ a > -6 \end{cases}$$

Ответ: при $a = -\frac{49}{8}$ или $a > -6$ данное уравнение имеет

единственный корень.

Пример 3. При каких a уравнение $\sqrt{x+2a+1} = a + \frac{x}{4}$ имеет два корня?

Решение: исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a + \frac{x}{4} \geq 0 \\ x + 2a + 1 = a^2 + \frac{ax}{4} + \frac{x^2}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4a \\ x^2 + 8(a-2)x + 16a^2 - 32a - 16 = 0 \end{cases}$$

Данная система имеет два решения, если:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-4a) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16(a-2)^2 - 16a^2 + 32a - 16 > 0 \\ 16a^2 + 8(-4a)(a-2) + 16a^2 - 32a + 16 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -32a + 80 > 0 \\ 32a - 16 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < \frac{5}{2} \\ a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: при $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ данное уравнение имеет два корня.