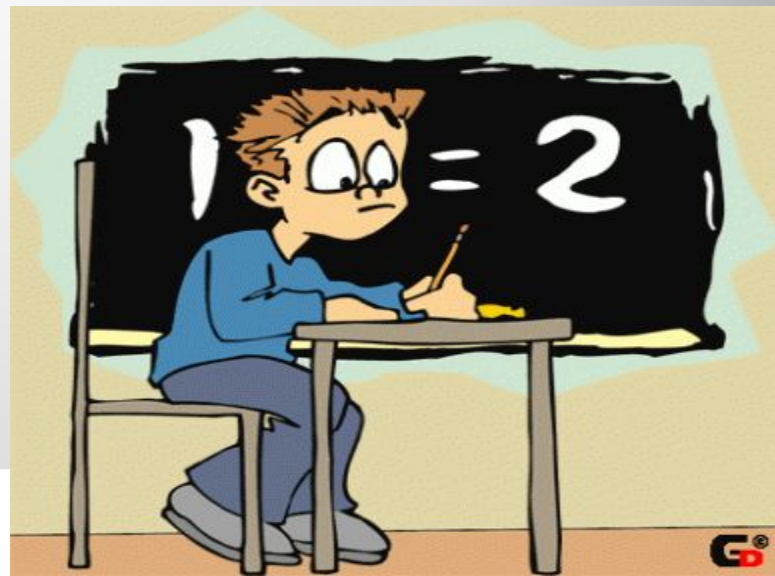


Линейные неравенства с параметром

Определение:

Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, где a и b — действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а x — неизвестное, называются *линейными неравенствами с параметром*.



Пример 1:

$$(m-1)x < 5m$$

Решение:

$m=1$ – контрольное значение

$$0 \cdot x < 5 \quad \forall x \in R$$

$$m > 1 \quad x < \frac{5m}{m-1}$$

$$m < 1 \quad x > \frac{5m}{m-1}$$



Пример 2:

Решить неравенство при всех значениях параметра a :

$$a(3x-5) < 6+ax$$

Решение:

Приведем к линейному виду:

$$3ax-5a < 6+ax$$

$$2ax < 6+5a$$

$a=0$ – контрольное значение

$$0 \cdot (3x-5) < 6 \quad \forall x \in R$$

$$a > 0 \quad x < \frac{6+5a}{2a}$$

$$a < 0 \quad x > \frac{6+5a}{2a}$$

Пример 3:

Чему равно значение переменной при различных значениях параметра:

$$b^2x - x + 1 > b$$

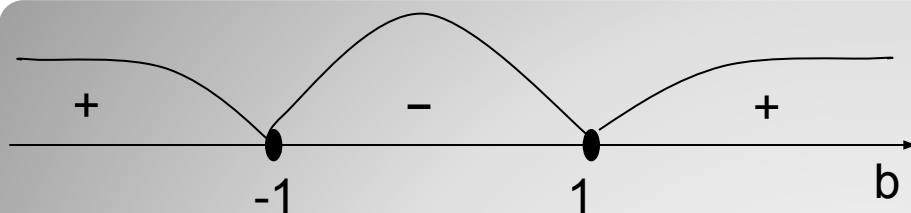
Решение:

Приведем к линейному виду:

$$b^2x - x > b - 1$$

$$x(b^2 - 1) > b - 1$$

$b = \pm 1$ – контрольные значения



если $b \in (-\infty; -1)$, то $b^2 - 1 > 0$ $x > \frac{1}{b+1}$

если $b \in (-1; 1)$, то $b^2 - 1 < 0$ $x < \frac{1}{b+1}$

если $b \in (1; +\infty)$, то $b^2 - 1 > 0$ $x > \frac{1}{b+1}$

если $b = -1$, то $0 \cdot x > -2$, $x \in R$

если $b = 1$, то $0 \cdot x > 0$, $x \in \emptyset$

Пример 4:

Найти все значения переменной
относительно $\frac{3ax+4}{3a+9} < \frac{x}{a+3} + \frac{3a-5}{3a-9}$
параметра a :

Решение:
 $a = \pm 3$ — контрольные значения

если $a = \pm 3$ неравенство не имеет смысла

Приведем к линейному виду $ax=b$:

$$\frac{3ax+4}{3(a+3)} - \frac{x}{a+3} < \frac{3a-5}{3(a-3)}$$

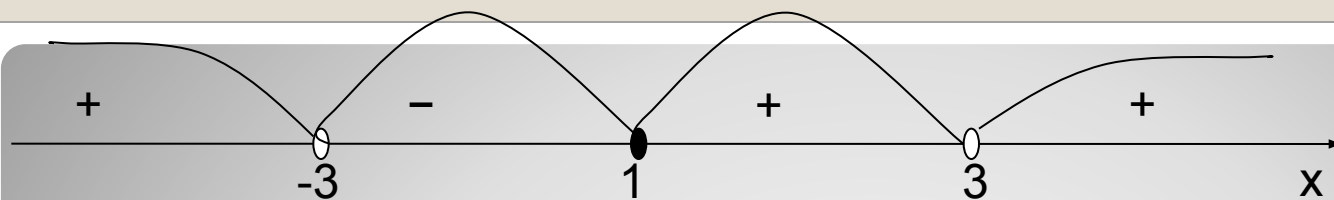
$$\frac{3ax+4-3x}{3(a+3)} < \frac{3a-5}{3(a-3)}$$

$$\frac{3ax-3x}{3(a+3)} + \frac{4}{3(a+3)} < \frac{3a-5}{3(a-3)}$$

$$\frac{ax-x}{a+3} < \frac{(3a-5)(a+3)-4(a-3)}{3(a-3)(a+3)}$$

$$\frac{x(a-1)}{a+3} < \frac{3(a^2-1)}{3(a-3)(a+3)}$$

$$a = 1 \text{ — контрольное значение}$$



если $a \in (-\infty; -3)$, то $\frac{a-1}{a+3} > 0$ $x > \frac{a+1}{a-3}$

если $a = \pm 3$, то $x \in \emptyset$

если $a \in (-3; 1)$, то $\frac{a-1}{a+3} < 0$ $x > \frac{a+1}{a-3}$

если $a = 1$, то $0 \cdot x < 0$, $x \in \emptyset$

если $a \in (1; 3)$, то $\frac{a-1}{a+3} > 0$ $x < \frac{a+1}{a-3}$

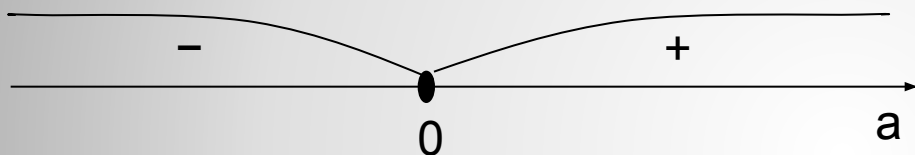
если $a \in (3; +\infty)$, то $\frac{a-1}{a+3} > 0$ $x < \frac{a+1}{a-3}$

Пример 5:

Решить неравенство $a|x| > 2$

Решение:

$a = 0$ – контрольное значение



если $a < 0$, то $|x| < \frac{2}{a}$ (модуль < отрицательного числа); $x \in \emptyset$

если $a = 0$, то $0 \cdot |x| > 2$; $x \in \emptyset$

если $a > 0$, то $|x| < \frac{2}{a} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{a} \\ x < -\frac{2}{a} \end{cases}$

Пример 6:

При каких значениях k неравенство

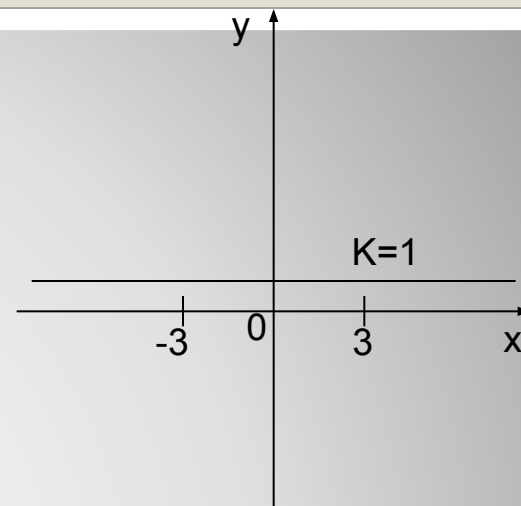
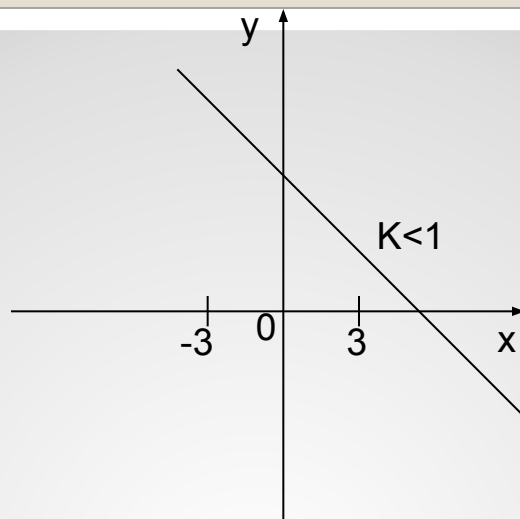
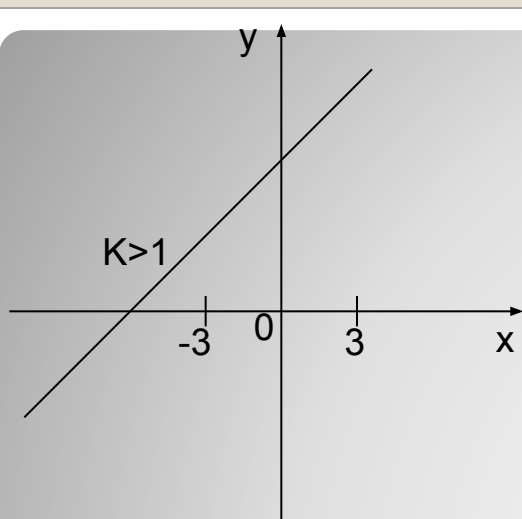
$$(k-1)x+2k+1>0 \quad (1)$$

верно при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x|\leq 3$?

Решение:

Введем в рассмотрение функцию $f(x) = (k-1)x+2k+1$

Она является линейной при любом действительном значении k , т.е. при любом действительном значении k графиком ее служит прямая.



Для выполнения неравенства (1) на всем отрезке $[-3; 3]$
 достаточно выполнения условия

$$\begin{cases} f(-3) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases}$$

$$f(-3) = -3(k-1) + 2k + 1 = 4 - k$$

$$f(3) = 3(k-1) + 2k + 1 = 5k - 2$$

$$\begin{cases} f(-3) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \text{ при } \begin{cases} 4 - k > 0 \\ 5k - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0,4 < k < 4$$