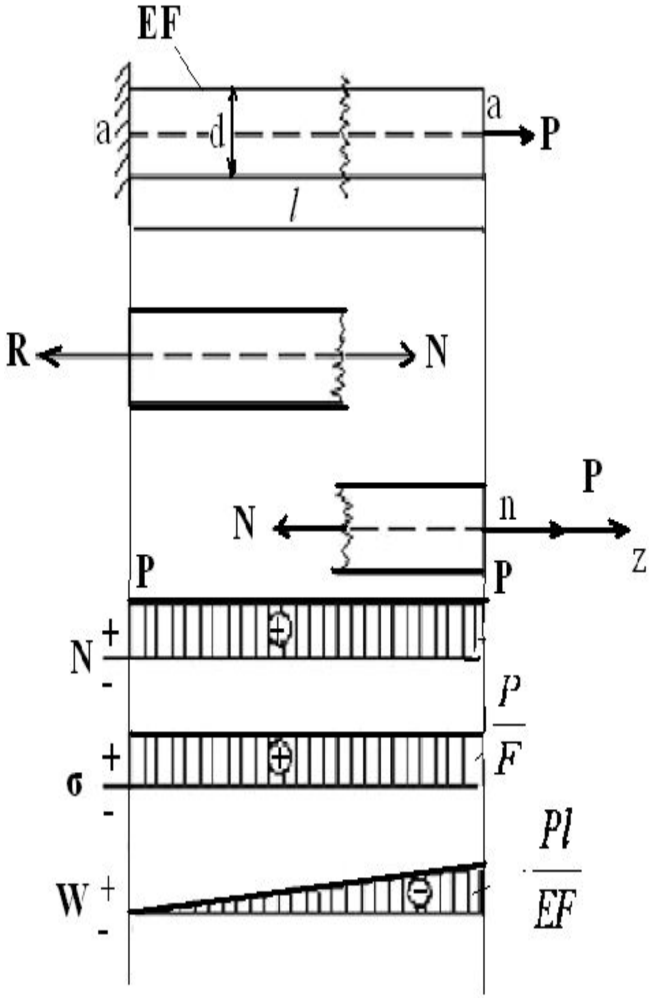
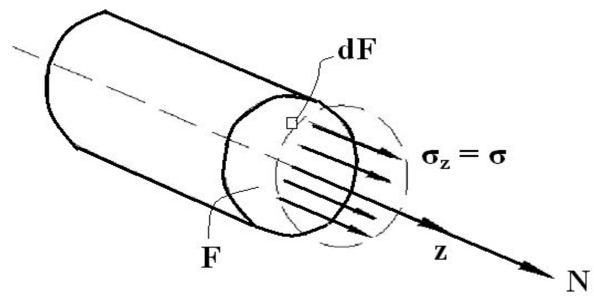
Растяжение-сжатие

$N \neq 0, N > 0, N < 0$

$\sum np_z(\overline{P_i}) = 0$ $\quad P - N = 0 \quad N = P$





$$dN = \sigma dF$$
$$N = \int_F \sigma dF$$
$$\sigma = const$$
$$N = \sigma \int_F dF = \sigma F$$
$$\boxed{\sigma = \frac{N}{F}}$$

Расчет по напряжениям

1. Проверочный расчет на прочность

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \qquad [\sigma] = \frac{\sigma_L}{n}$$

$$n_L = \frac{\sigma_L}{\sigma_{\max}} \qquad n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} \quad (1{,}5 \div 2) \qquad n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\max}} \quad (2 \div 3)$$

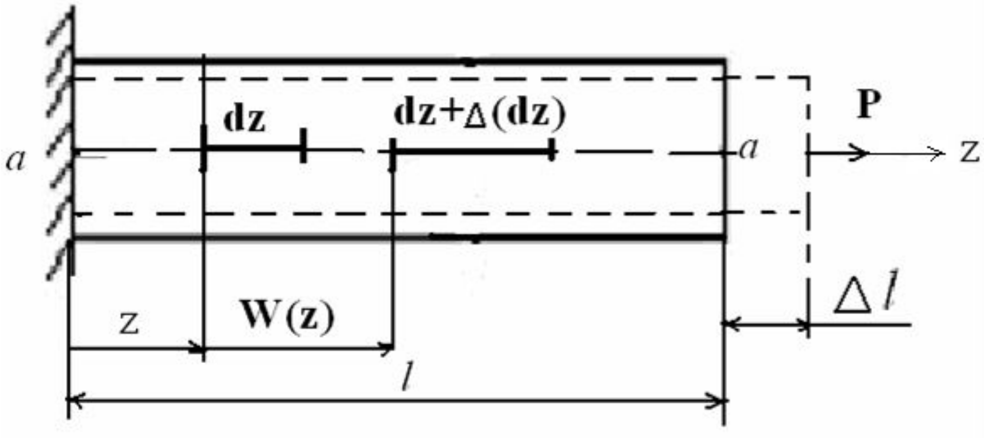
$$\sigma_L = \begin{cases} \sigma_T \\ \sigma_B \end{cases}$$

n > 1

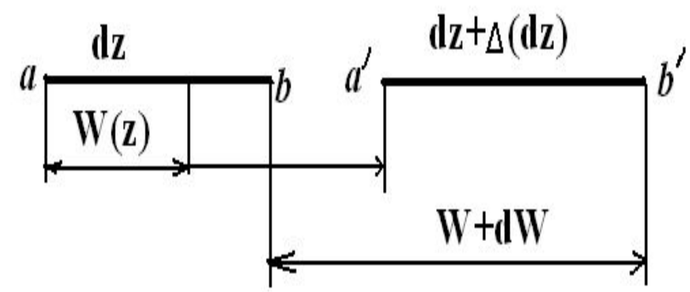
2. Конструктивный расчет

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{F}\right)_{\max} \leq [\sigma] \qquad \boxed{F \geq \frac{N}{[\sigma]}}$$

Расчет на жесткость при растяжении-сжатии. Закон Гука



$W(z)$ – функция перемещений



$$a'b' - ab = \Delta(dz) = dW$$

$$\frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{dW}{dz}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{dW}{dz}}$$

$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$ - закон Гука

$$\frac{dW}{dz} = \frac{N}{EF}; \quad EF - \text{жесткость при растяжении – сжатии}$$

$$dW = \frac{Ndz}{EF}, \quad W = c + \int \frac{Ndz}{EF}$$

$$\boxed{W = W_0 + \int \frac{Ndz}{EF}} \qquad W\Big|_{z=l} - W_0 = \Delta l = \frac{Nl}{EF} \qquad \boxed{\Delta l = \frac{Nl}{EF}}$$

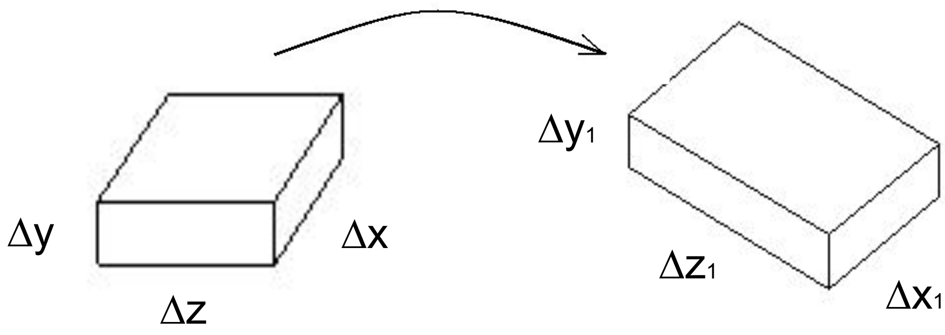
$$\boxed{W = W_0 + \frac{Nz}{EF}} \qquad W_a = \Delta l = \frac{Pl}{EF} \qquad \boxed{W_{\max} \le [W]}$$

Деформации

до нагружения

после нагружения

перемещение



Линейные деформации

$$\varepsilon_{x_{cp}} = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x}$$

(средняя относительная деформация)

компоненты деформации

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x} \\ \varepsilon_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta y} \\ \varepsilon_z = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta z_1 - \Delta z}{\Delta z} \end{cases}$$

- истинная (относительная) линейная деформация по оси x

Учет температуры в перемещениях

$$\boxed{W = W_0 + \int \frac{Ndz}{EF} + \int \alpha\, t(z)dz}$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha\, l\, t}$$

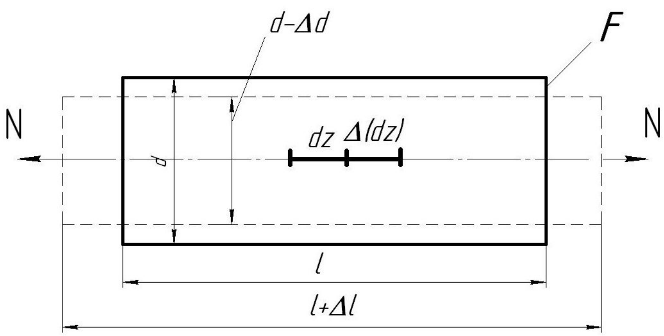
$\alpha -$ коэффициент линейного расширения

$t(z) = T_к - T_н, (\Delta t)$

$T_к -$ конечная (рабочая) температура

$T_н -$ Начальная температура (температура монтажа)

Поперечная деформация при растяжении-сжатии
Закон Пуассона



$$\varepsilon_{пр} = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{\Delta l}{l} > 0$$

$$\boxed{\left|\frac{\varepsilon_{поп}}{\varepsilon_{прод}}\right| = \mu}$$ -закон Пуассона

$$\varepsilon_{поп} = -\frac{\Delta d}{d} < 0$$

$$\boxed{\varepsilon_{поп} = -\mu\varepsilon_{пр}}$$

$0 \le \mu \le 0{,}5$

$\mu \approx 0{,}25 \div 0{,}33 -$ металлы

$$\varepsilon_{поп} = -\frac{\Delta d}{d} = \mu\varepsilon_{пр} \to \Delta d = d\mu \cdot \varepsilon_{пр} = d\mu\frac{\sigma}{E} = d\mu\frac{N}{EF}$$

Учет температуры в перемещениях

$$\boxed{W = W_0 + \int \frac{Ndz}{EF} + \int \alpha\, t(z) dz}$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha\, l\, t}$$

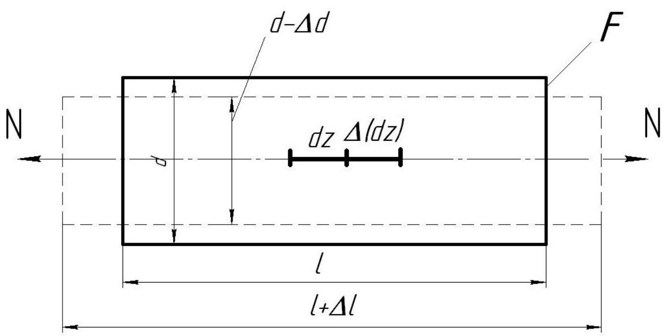
$\alpha -$ коэффициент линейного расширения

$t(z) = T_к - T_н, (\Delta t)$

$T_к -$ конечная (рабочая) температура

$T_н -$ Начальная температура (температура монтажа)

Поперечная деформация при растяжении-сжатии
Закон Пуассона



$$\varepsilon_{пр} = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{\Delta l}{l} > 0$$

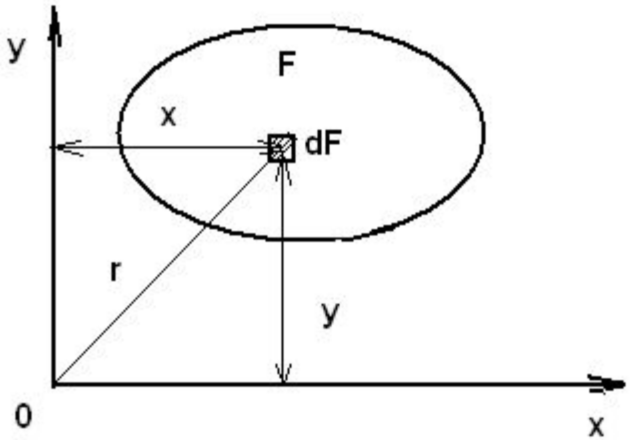
$$\boxed{\left|\frac{\varepsilon_{поп}}{\varepsilon_{прод}}\right| = \mu}$$ -закон Пуассона

$$\varepsilon_{поп} = -\frac{\Delta d}{d} < 0$$

$$\boxed{\varepsilon_{поп} = -\mu \varepsilon_{пр}}$$

$0 \le \mu \le 0{,}5$ $\qquad$ $\mu \approx 0{,}25 \div 0{,}33 -$ металлы

$$\varepsilon_{поп} = -\frac{\Delta d}{d} = \mu \varepsilon_{пр} \rightarrow \Delta d = d\mu \cdot \varepsilon_{пр} = d\mu \frac{\sigma}{E} = d\mu \frac{N}{EF}$$



Общие понятия и определения

F – площадь поперечного сечения

$\boxed{0.1}$ $S_x = \int_F y\,dF \gtrless 0\,[\ ^3]$ – статический момент сечения плоской фигуры относительно оси x,

$S_y = \int_F x\,dF \gtrless 0\,[\ ^3]$.

$\boxed{0.2}$ $I_x = \int_F y^2\,dF > 0\,[\ ^4]$ – осевой или экваториальный момент инерции пл. фигуры относительно оси x,

$I_y = \int_F x^2\,dF > 0\,[\ ^4]$.

$\boxed{0.3}$ $I_{xy} = \int_F xy\,dF \gtrless 0\,[\ ^4]$ – центробежный момент инерции плоской фигуры относительно осей x и y.

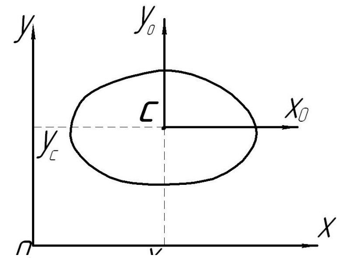
$\boxed{0.4}$ $I_0 = I_p = \int_F r^2\,dF > 0\,[\ ^4]$ – полярный момент инерции плоской фигуры относительно выбранного полюса O.

$\boxed{0.5}$ $i_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{F}} > 0\,[\ ]$ – радиус инерции плоской фигуры относительно оси x,

$i_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{F}} > 0\,[\ ]$.

Свойства геометрических характеристик

Свойство 1



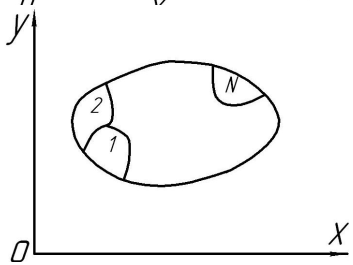
x_c, y_c – координаты ц.т. пл. фигуры:

$$x_c = \frac{S_y}{F} \qquad S_y = x_c F$$

$$y_c = \frac{S_x}{F} \qquad S_x = y_c F$$

$$\longrightarrow \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{S_{x_0} = S_{y_0} = 0}$$

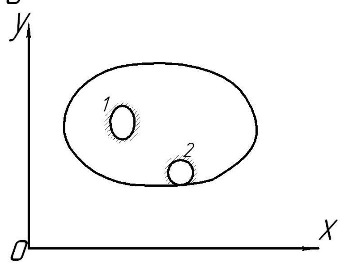
Свойство 2



Момент инерции составной фигуры:

$$\boxed{I_x = \sum_{k=1}^{N} I_x^{(k)}} \quad (I_y, I_{xy}, I_0, S_x, S_y)$$

Свойство 3



Момент инерции многосвязной области:

$$\boxed{I_x = I_x^{(0)} - \sum_{k=1}^{N} I_x^{(k)}} \quad (I_y, I_{xy}, I_0, S_x, S_y)$$

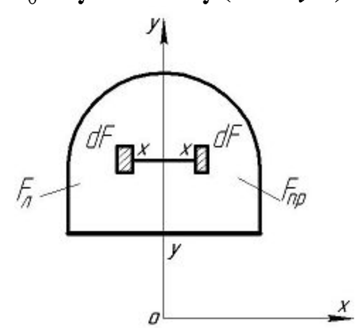
Свойство 4

$\boxed{I_0 = I_x + I_y}$ (две взаимно-перпендикулярные оси, проходящие через полюс O)

Док-во: $I_0 = \int r^2 dF = \int (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = I_y + I_x$

Свойство 5

$\boxed{I_{xy} = 0}$



y – ось симметрии пл. фигуры

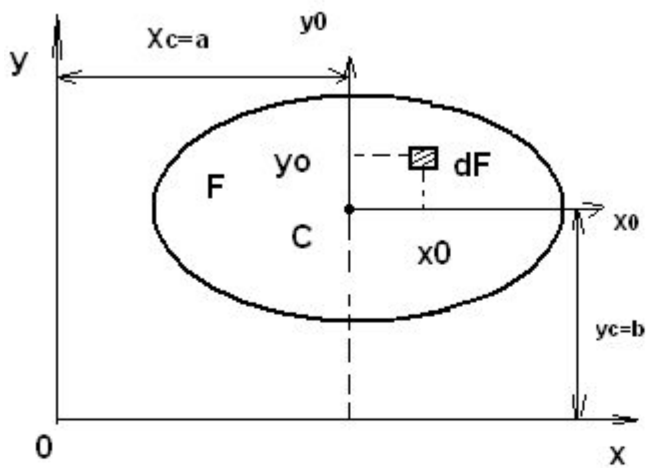
Док-во: $I_{xy} = \int_F xy dF =$

$$= \int_{F_л} \underbrace{x^{<0} y^{>0} dF}_{<0} + \int_{F_{пр}} \underbrace{x^{>0} y^{>0} dF}_{>0} = 0$$

Определение центра тяжести пл. фигуры

$$x_c = \frac{\sum_i S_y}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_i S_x}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i F_i y_i}{\sum_i F_i}$$

Преобразование моментов инерции при параллельном переносе осей



Дано: $I_{x_0}, I_{y_0}, I_{x_0 y_0}; x_c, y_c$ – координаты ц.т. пл. фигуры в новой системе xOy

$I_x, I_y, I_{xy} = ?$

$$\begin{cases} x = x_c + x_0 = a + x_0 \\ y = y_c + y_0 = b + y_0 \end{cases}$$

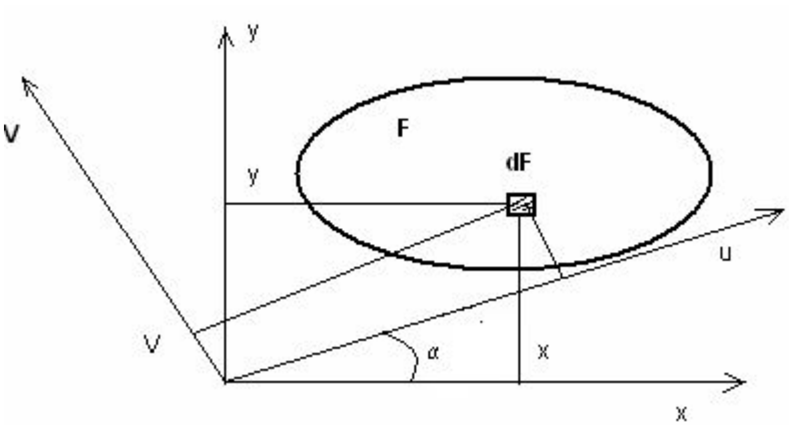
– формулы преобразования координат при переходе к новой системе

$$I_x = \int_F y^2 dF = \int_F (b + y_0)^2 dF = b^2 \int_F dF + 2b \int_F y_0 dF + \int_F y_0^2 dF = b^2 F + 2b \cancel{S_{x_0}} + I_{x_0} \to \boxed{I_x = I_{x_0} + b^2 F}$$

0 (св-во 1)

Аналогично: $\boxed{I_y = I_{y_0} + a^2 F}$ $\boxed{I_{xy} = I_{x_0 y_0} + abF}$

Преобразование моментов инерции при повороте осей



Дано: I_x, I_y, I_{xy};

$\angle\alpha$ – новая система образована с помощью α

$I_u, I_v, I_{uv} = ?$

$$\begin{cases} u = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ v = y\cos\alpha - x\sin\alpha \end{cases}$$

– формулы преобразования координат при повороте осей

$$\boxed{I_u} = \int_F v^2 dF = \int_F (y\cos\alpha - x\sin\alpha) dF = \ldots = \boxed{\frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha} \quad (1)$$

$$\boxed{I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha}$$

$$\boxed{I_{uv}} = \int_F uv dF = \ldots = \boxed{\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha} \quad (2)$$

Главные оси и главные моменты инерции

$$I_u = f(\alpha) \xrightarrow{(1)} \frac{dI_u}{d\alpha} = 0 \xrightarrow{(1)} \boxed{tg2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}} \; (3)$$

-формула для опред. положения двух главных осей инерции

$$\boxed{I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}} \; (4)$$ – главные моменты инерции

$$I_{uv} = \varphi(\alpha) \xrightarrow{(2)} \frac{dI_{uv}}{d\alpha} = 0 \xrightarrow{(2)} \boxed{tg2\alpha_1 = \frac{I_x - I_y}{2I_{xy}}} \; (5)$$

-формула для опред. положения двух осей, относительно которых ц.б. момент инерции достигает экстремума

$$\boxed{\max I_{uv}, \min I_{uv} = \pm\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}} \; (6)$$ – экстремальные значения ц. б. момента инерции I_{uv}

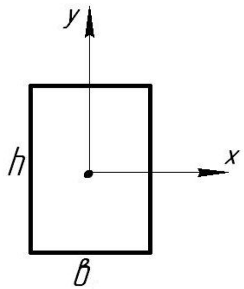
Из (4) и (6): $I_1 - I_2 = 2\max I_{uv} \rightarrow \boxed{\max I_{uv} = \frac{I_1 - I_2}{2}}$

$I_1 + I_2 = I_x + I_y = const$ – инвариантная величина

Свойство гл. оси инерции: $\boxed{I_{uv} = 0}$

Геометрические характеристики простейших фигур

1. Прямоугольник

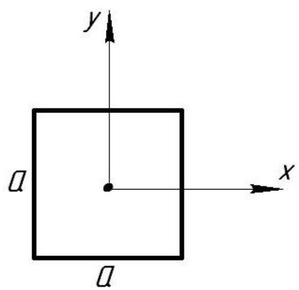


$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

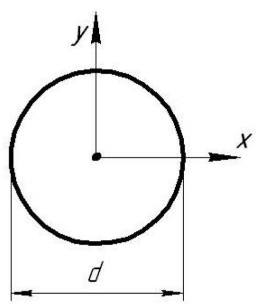
2. Квадрат



$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

3. Круг



$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

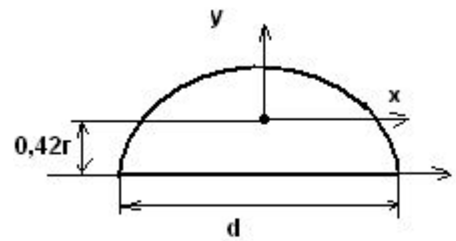
$$I_{xy} = 0$$

4. Полукруг

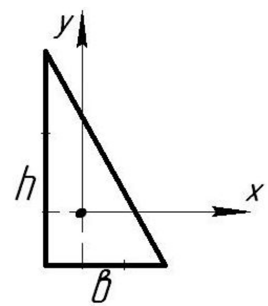
$$I_x = 0{,}00686 d^4$$

$$Y_{x_1} = I_y = \frac{\pi d^4}{128}$$

$$I_{xy} = 0$$



5. Прямоугольный треугольник

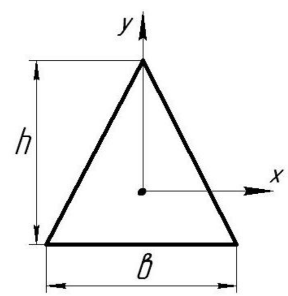


$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

6. Равнобедренный треугольник



$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{48}$$

$$I_{xy} = 0$$