КИНЕМАТИКА

ЛЕКЦИИ 1-2: КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ

Кинематика есть раздел механики, посвященный **изучению движения тел с геометрической точки зрения**, без учета причин, вызывающих изменение этого движения, т. е. сил. От геометрии кинематика отличается, по существу, тем, что при рассмотрении перемещений тел в пространстве принимается во внимание еще и время перемещения. Поэтому кинематику иногда называют «геометрией четырех измерений», понимая под четвертым измерением время.

СТАТИКА	**КИНЕМАТИКА**
Изучает равновесие (**покой**) **под действием сил**	Изучает **движение безотносительно к силам** его вызывающим

Задачи кинематики состоят в разработке методов определения положения, скорости, ускорения и других кинематических величин точек, оставляющих механическую систему.

2. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются **абсолютное пространство** и **абсолютное время**, существование которых постулируется. Абсолютные пространство и время считаются независимыми одно от другого; в этом состоит основное отличие классической модели пространства и времени от их модели в теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны.

Абсолютное пространство представляет собой трехмерное, однородное и изотропное неподвижное евклидово пространство.

Абсолютное время в теоретической механике считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

3. СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого, если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются. Для удобства исследования геометрического характера движения можно взять вполне определенное твердое тело, т. е. тело, форма которого неизменна, и условиться считать его неподвижным. Движение других тел по отношению к этому телу называется **абсолютным движением**.

В качестве неподвижного тела отсчета обычно выбирают систему трех осей (чаще всего взаимно ортогональных), называемую **системой отсчета**, которая по определению считается неподвижной

Система отсчета = **неподвижная системой координат** = **абсолютная СК**.

4. МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА

Под **материальной точкой** понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы ее положение и движение можно было определить как для объекта, не имеющего размеров. Это условие будет выполнено, если при изучении движения можно пренебречь размерами частицы и ее вращением.

Все зависит от конкретики :

Спутник - материальную точка, при определении его положения в космическом пространстве.

Спутник – не материальная точка если рассматриваются задачи, связанные с ориентацией его антенн, т.к. здесь нельзя пренебрегать вращением спутника

В теоретической механике материальная точка представляет собой геометрическую точку, наделенную по определению механическими свойствами; эти свойства будут рассмотрены в динамике. **В кинематике материальная точка отождествляется с геометрической точкой**.

Геометрическое место последовательных положений движущейся материальной точки называется ее **траекторией**

5. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Задать движение точки
значит дать способ
определения положения точки в любой момент времени.

Три способа задания движения

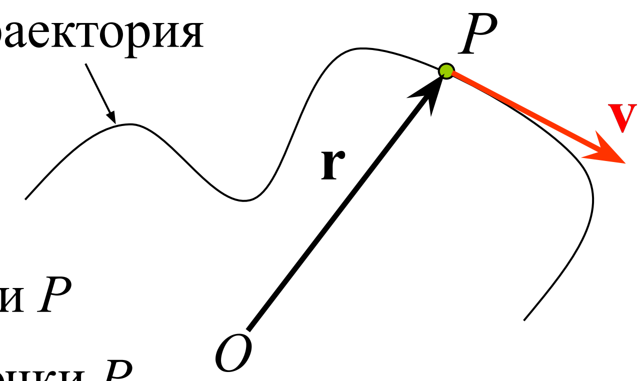
- Векторный
- Координатный
- Естественный

6. ВЕКТОРНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

O – неподвижная точка

P – движущаяся точка

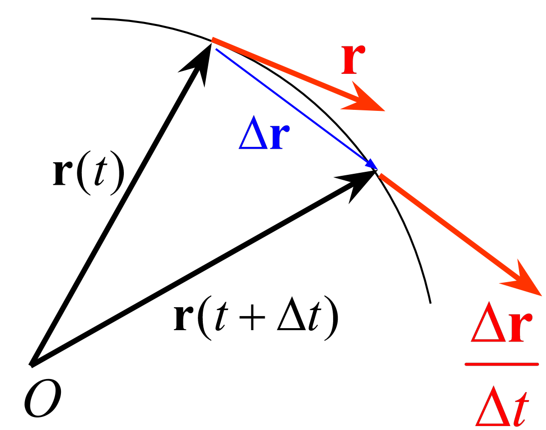
$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)}$ - закон движения точки P



Производная по времени от **r** – скорость **v** точки P

Производная по времени от **v** – ускорение **w** точки P

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$



Свойства производной вектора

1) $\dfrac{d\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)}{dt} = \dfrac{d\mathbf{a}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{b}}{dt}$ 2) $\dfrac{d\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)}{dt} = \dfrac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{b}}{dt}$

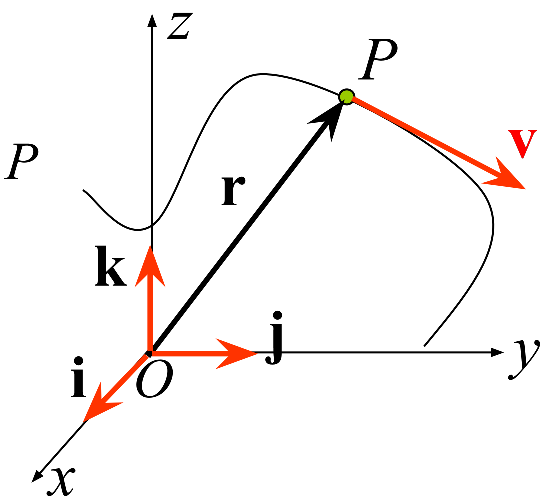
3) $\dfrac{d\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)}{dt} = \dfrac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\dfrac{d\mathbf{b}}{dt}$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

7. КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Oxyz – неподвижная система координат
P – движущаяся точка

$\boxed{x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)}$ - закон движения точки *P*



$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \equiv \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

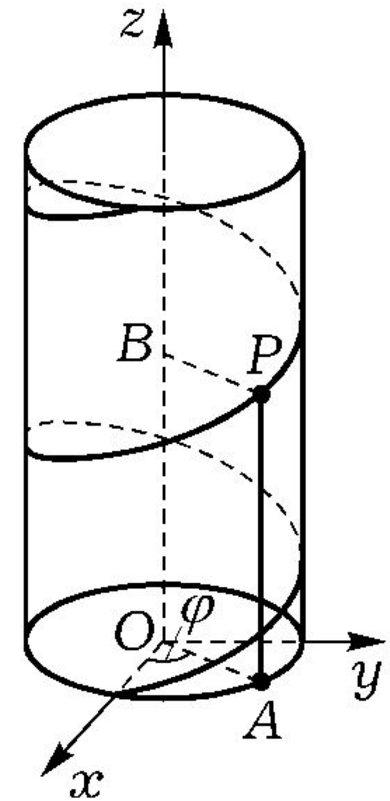
$$\boxed{v_x = \dot{x},\ v_y = \dot{y},\ v_z = \dot{z}}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad \cos(\mathbf{v},\mathbf{i}) = \frac{v_x}{v},\ \cos(\mathbf{v},\mathbf{j}) = \frac{v_y}{v}\mathbf{i},\ \cos(\mathbf{v},\mathbf{k}) = \frac{v_z}{v}$$

$$\boxed{w_x = \ddot{x},\ w_y = \ddot{y},\ w_z = \ddot{z}}$$

$$w = |\mathbf{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad \cos(\mathbf{w},\mathbf{i}) = \frac{w_x}{w},\ \cos(\mathbf{w},\mathbf{j}) = \frac{w_y}{w}\mathbf{i},\ \cos(\mathbf{w},\mathbf{k}) = \frac{w_z}{w}$$

8. ПРИМЕР



$x = a\cos bt,\ y = a\sin bt,\ z = ct$ Найти траекторию, скорость, ускорение точки

1) $x^2 + y^2 = a^2$ ⇨ Точка движется по поверхности цилиндра радиуса *a*, ось которого совпадает с осью *z*

2) Пусть φ - угол между проекцией *OA* радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$ на плоскость *Oxy*

$x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ \varphi = bt$

$z = ct$

Прямая *OA* равномерно вращается, точка *P* равномерно перемещается по образующей *AP*. Т.е. *P* **движется по винтовой линии**

3) $\dot{x} = -ab\sin bt,\ \dot{y} = ab\cos bt,\ \dot{z} = c$ ⇨ $v = \sqrt{c^2 + a^2b^2}$ Величина скорости постоянна, направление изменяется со временем.

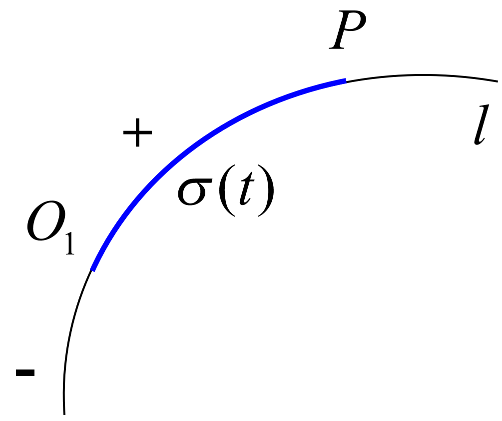
4) $\ddot{x} = -ab^2\cos bt,\ \ddot{y} = -ab^2\sin bt,\ \ddot{z} = 0$ ⇨ $w = ab^2$

Ускорение имеет постоянную величину и направлено по внутренней нормали цилиндра (от P к B).

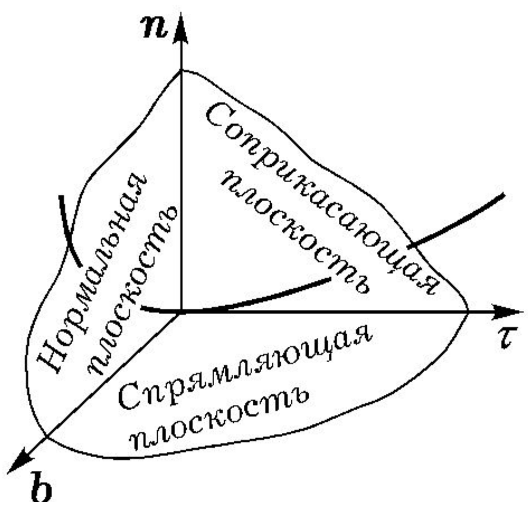
9. ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

l – траектория движения точки
P – движущаяся точка
O_1 – начало отсчета
σ – длина дуги $O_1 P$

$\boxed{\sigma = \sigma(t)}$ - закон движения точки P



$\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ естественный трехгранник (правый)
Векторы $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ лежат в соприкасающейся плоскости траектории в точке Р и направлены соответственно по касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуг и по главной нормали траектории в сторону ее вогнутости, вектор **b** направлен по бинормали траектории



Диф. геометрия $\boldsymbol{\tau}(\sigma) = \dfrac{d\mathbf{r}}{d\sigma}$ $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \dfrac{1}{\rho}\mathbf{n}(\sigma)$

10. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}\boldsymbol{\tau} = v_\tau\boldsymbol{\tau}$$

Скорость всегда направлена по касательной к траектории

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\sigma}\boldsymbol{\tau}\right) = \ddot{\sigma}\boldsymbol{\tau} + \dot{\sigma}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \ddot{\sigma}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{\sigma}^2}{\rho}\mathbf{n}$$

Ускорение всегда лежит в соприкасающейся плоскости

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{w}_\tau = \ddot{\sigma}\boldsymbol{\tau}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

Теорема Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное.

$\mathbf{w}_\tau$ — касательное (тангенциальное) ускорение
$\mathbf{w}_n$ — нормальное ускорение точки.

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, а нормальное — ее направления.

11. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА

<u>Задача: Найти радиус кривизны эллипса</u> $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Идея: рассмотреть эллипс как траекторию движения точки с законом

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t$$

Из теоремы Гюйгенса

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_\tau^2}}$$

$$v = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

$$w^2 = \ddot x^2 + \ddot y^2 = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t$$

$$w_\tau^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{\left(a^2-b^2\right)^2\sin^2 t\cos^2 t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}{ab}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}{ab}}$$

При $t = 0, \pi \quad \left(y = 0, x = \pm a\right) \qquad \rho = a^2/b$

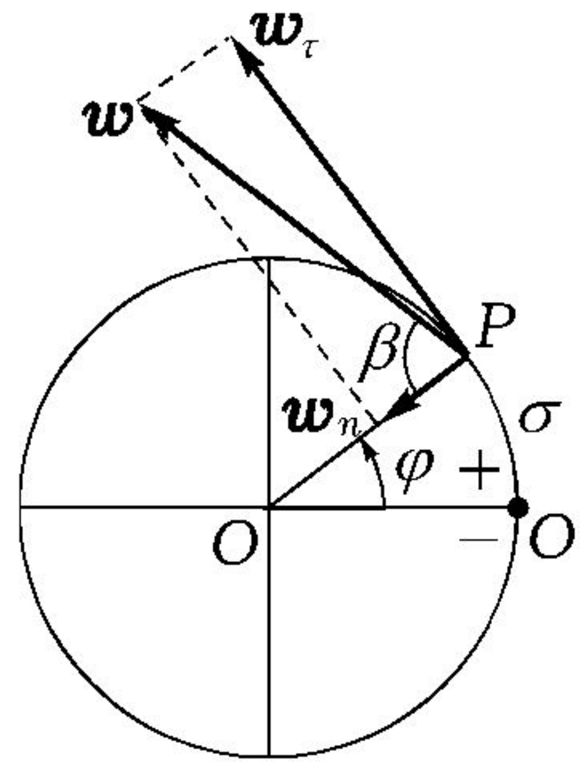
При $t = \pi/2, 3\pi/2 \quad \left(y = \pm b, x = 0\right) \qquad \rho = b^2/a$

12. КРУГОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

Точка движется по окружности радиуса R

$$\sigma(t) = R\varphi(t)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\sigma}\,\boldsymbol{\tau} = R\dot{\varphi}\,\boldsymbol{\tau}$$



$$\mathbf{w} = w_\tau \boldsymbol{\tau} + w_n \mathbf{n}, \quad w_\tau = \ddot{\sigma} = R\ddot{\varphi}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \dot{\varphi}^2 R$$

$\dot{\varphi} = \omega$ **угловая скорость**

$\ddot{\varphi} = \varepsilon$ **угловое ускорение**

$$\boxed{\begin{aligned} v &= R\omega \\ w_\tau &= R\varepsilon \\ \mathbf{w}_n &= \omega^2 R\mathbf{n} \end{aligned}}$$

$w_\tau = R\varepsilon$ — касательное ускорение

$\mathbf{w}_n = \omega^2 R\mathbf{n}$ — нормальное (**центростремительное**) ускорение

Угол β находится из равенства $tg\beta = \dfrac{w_\tau}{w_n} = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$

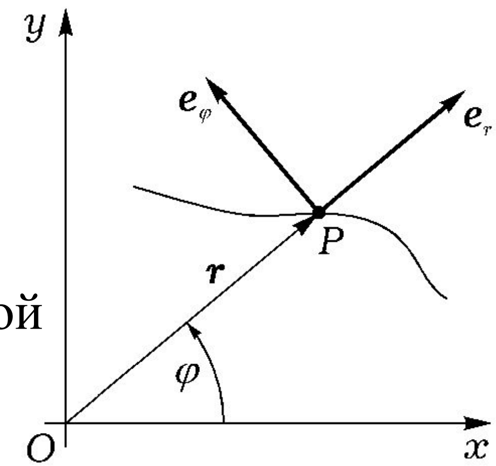
При равномерном круговом движении $\omega = \text{const}$ ⇨ $\varepsilon=0,\ \beta=0$

13. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть движение задано в полярной системе координат

$$x = r\cos\varphi \qquad r = r(t),\ \varphi = \varphi(t)$$

$$y = r\sin\varphi$$



Единичные векторы $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$ задают направления двух перпендикулярных осей: радиальной и трансверсальной

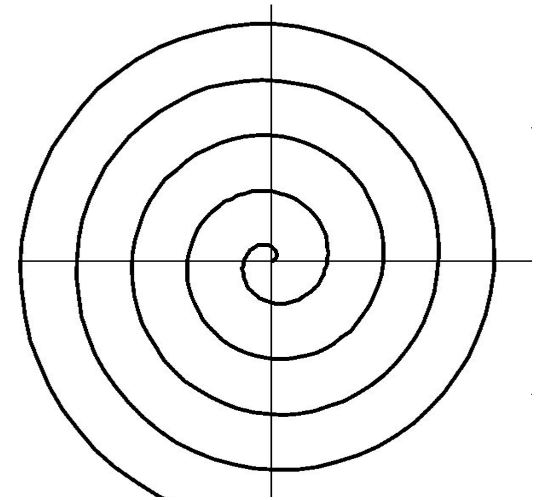
$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \ddot x \\ \ddot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right)\cos\varphi - \left(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi\right)\sin\varphi \\ \left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right)\sin\varphi + \left(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi\right)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Проекции v_r и v_φ скорости на радиальную и трансверсальную оси называются соответственно **радиальной и трансверсальной скоростями**.

$$\boxed{\begin{aligned} v_r &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_r = \dot r \\ v_\varphi &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_\varphi = r\dot\varphi \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} w_r &= \ddot r - r\dot\varphi^2 \\ w_\varphi &= r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi \end{aligned}}$$

14. ПРИМЕР



Движение точки задано в полярных координатах

$$r = at, \varphi = bt$$

Найти траекторию, скорости, ускорения

Исключаем время из уравнений движения

Траектория: $\boxed{r = a\varphi/b}$ Спираль Архимеда

$$\dot r = a, \quad \dot\varphi = b, \quad \ddot r = \ddot\varphi = 0$$

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot r \\ v_\varphi &= r\dot\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_r &= a \\ v_\varphi &= br = abt \end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned} w_r &= \ddot r - r\dot\varphi^2 \\ w_\varphi &= r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} w_r &= -b^2 r = -ab^2 t \\ w_\varphi &= 2ab \end{aligned}}$$

15. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Всякие три числа (q_1, q_2, q_3) однозначно определяющие положение точки в пространстве, можно рассматривать как координаты этой точки. Эти числа, в отличие от прямолинейных декартовых координат, называют криволинейными координатами. Движение точки считается заданным, если ее криволинейные координаты $q_i \left(i = 1, 2, 3\right)$ - известные функции времени $q_i(t)$

Связь между декартовыми и криволинейными координатами

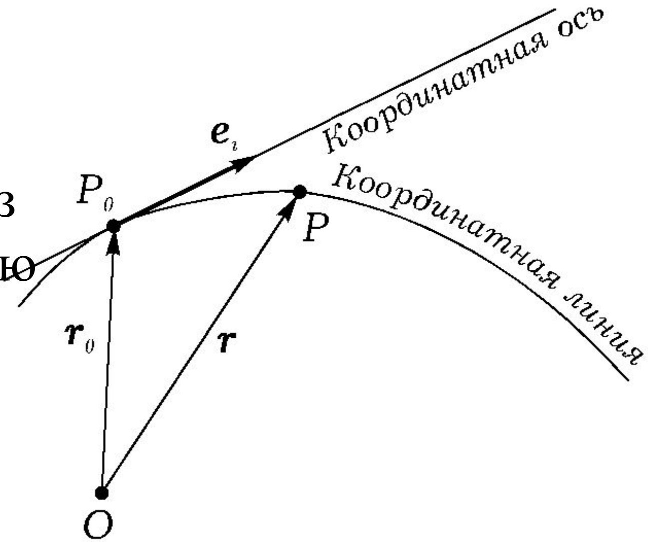
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(q_1, q_2, q_3) \\ y(q_1, q_2, q_3) \\ z(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Радиус вектор точки –сложная функция времени

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\left(q_1(t), q_2(t), q_3(t)\right)$$

16. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛАМЭ

P_0 - некоторая точка в пространстве, с криволинейными координатами $\left(q_1^0, q_2^0, q_3^0\right)$
Первой **координатной линией**, проходящей через P_0, назовем кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(q_1, q_2^0, q_3^0\right)$ определяющую положение радиус вектора при фиксированных значениях $q_2 = q_2^0, q_3 = q_3^0$ и произвольном q_1
Аналогично определяются вторая и третья координатные линии.



Касательная к i-ой координатной линии в точке P_0 – i-ая **координатная ось**

$\mathbf{e}_i \left(i = 1, 2, 3\right)$ - **единичный орт *i*-ой координатной оси**

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}(q)}{\partial q_i} \bigg/ \left|\frac{\partial \mathbf{r}(q)}{\partial q_i}\right| = \frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\mathbf{k}\right)$$

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

коэффициенты Ламэ

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i \mathbf{e}_i}$$

17. СКОРОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Если векторы $\mathbf{e}_i\left(i=1,2,3\right)$ взаимно ортогональны, то криволинейные координаты называют ортогональными. Мы будем рассматривать только ортогональные криволинейные координаты.

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)=\dot{q}_1H_1\mathbf{e}_1+\dot{q}_2H_2\mathbf{e}_2+\dot{q}_3H_3\mathbf{e}_3$$

$$\boxed{v_{q_1}=\dot{q}_1H_1,\ v_{q_2}=\dot{q}_2H_2,\ v_{q_3}=\dot{q}_3H_3,}$$

$$v=\sqrt{\dot{q}_1^2H_1^2+\dot{q}_2^2H_2^2+\dot{q}_3^2H_3^2}$$

18. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(q),\quad \mathbf{v}=\mathbf{v}\left(q,\dot{q}\right)$$

Лемма №1 Лагранжа $\boxed{\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_i}=\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}}$ Лемма №2 Лагранжа $\boxed{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\right)=\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_i}}$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_i}=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_i\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_i\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_i\partial q_3}\dot{q}_3$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}=f(q)\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_1\partial q_i}\dot{q}_1+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_2\partial q_i}\dot{q}_2+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial q_3\partial q_i}\dot{q}_3$$

19. УСКОРЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

$$w_{q_i} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\right) - \mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\right)\right]$$

Л-1 Л-2

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_i}\right]$$

$$\boxed{w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]}$$

$$T = \frac{1}{2}v^2$$

20. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ УСКОРЕНИЯ

$$\boxed{w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]}$$

1) Найти функции $\quad H_i(q) \quad T(q,\dot q) = \frac{1}{2}\left(\dot q_1^2 H_1^2 + \dot q_2^2 H_2^2 + \dot q_3^2 H_3^2\right)$

2) Подсчитать $\quad \dfrac{\partial T(q,\dot q)}{\partial \dot q_i} = H_i^2 \dot q_i$

3) Найти $\quad \bar w_{q_i}(q,\dot q,\ddot q) = \dfrac{1}{H_i}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) = H_i \ddot q_i + 2\dot q_i\left(\dfrac{\partial H_i}{\partial q_1}\dot q_1 + \dfrac{\partial H_i}{\partial q_2}\dot q_2 + \dfrac{\partial H_i}{\partial q_1}\dot q_2\right)$

4) Найти $\quad \tilde w_{q_i}(q,\dot q) = \dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial T}{\partial q_i} = \dfrac{1}{H_i}\sum_{j=1}^{3}\dot q_j^2 H_j \dfrac{\partial H_j}{\partial q_i}$

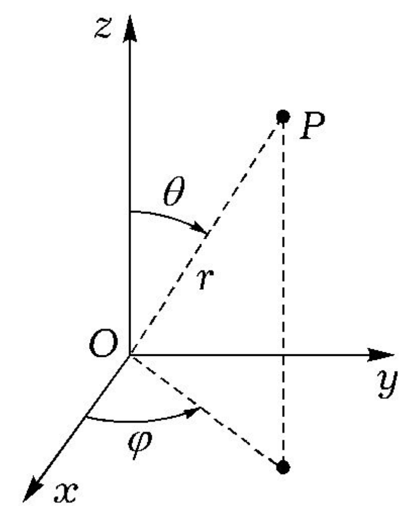
5) Вычислить $\quad w_{q_i} = \bar w_{q_i}(q,\dot q,\ddot q) - \tilde w_{q_i}(q,\dot q)$

21. ПРИМЕР: СФЕРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

$$q_1 = r \qquad x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad H_r = 1$$

$$q_2 = \varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad H_\varphi = r\sin\theta$$

$$q_3 = \theta \qquad z = r\cos\theta \qquad H_\theta = r$$



$$\boxed{\begin{aligned} v_r &= \dot r \\ v_\varphi &= r\sin\theta\,\dot\varphi \\ v_\theta &= r\dot\theta \end{aligned}}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot r^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + r^2\dot\theta^2\right)$$

$$\bar w_r = \ddot r$$

$$\bar w_\varphi = r\sin\theta\ddot\varphi + 2\sin\theta\dot r\dot\varphi + 2r\cos\theta\dot\theta\dot\varphi$$

$$\bar w_\theta = r\ddot\theta + 2\dot\theta\dot r$$

$$\partial T/\partial\dot r = \dot r$$

$$\partial T/\partial\dot\varphi = r^2\sin^2\theta\dot\varphi$$

$$\partial T/\partial\dot\theta = r^2\dot\theta$$

$$\tilde w_r = r\sin^2\theta\dot\varphi^2 + r\dot\theta^2$$

$$\tilde w_\varphi = 0$$

$$\tilde w_\theta = r\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_r &= \ddot r - r\sin^2\theta\dot\varphi^2 - r\dot\theta^2 \\ w_\varphi &= r\sin\theta\ddot\varphi + 2\sin\theta\dot r\dot\varphi + 2r\cos\theta\dot\theta\dot\varphi \\ \bar w_\theta &= r\ddot\theta + 2\dot\theta\dot r - r\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2 \end{aligned}}$$