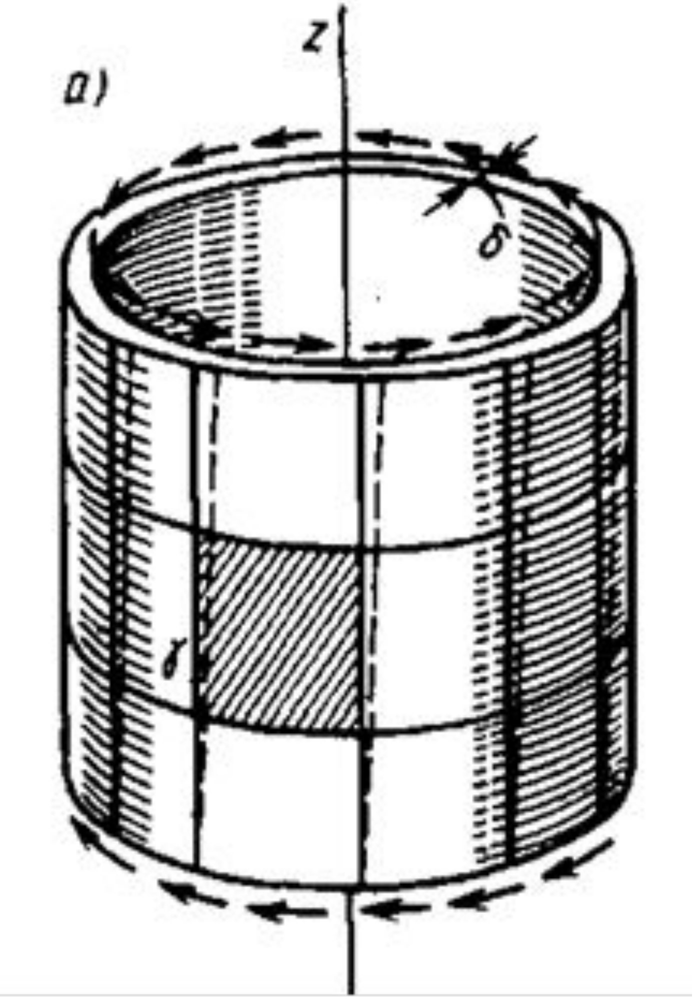
Сопротивление материалов

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Чистый сдвиг

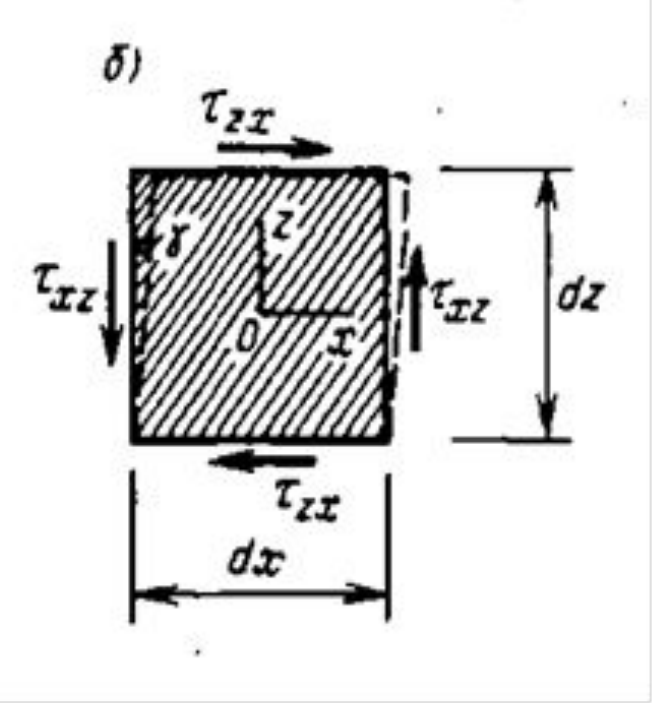


Кроме деформации растяжения или сжатия материал нагруженного элемента конструкции может испытывать деформацию **сдвига**.

В сплошном материале деформацию сдвига можно осуществить, например, если подвергнуть кручению тонкостенную трубу. Прямоугольные до деформации элементы материала стенок трубы превращаются в параллелограммы за счет изменения первоначально прямого угла на малый угол γ, называемый **углом сдвига.**

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Чистый сдвиг



Показанный на рисунке элемент, выделен из стенки трубы. Компоненту касательных напряжений, возникающих на горизонтальных площадках в окружном направлении, обозначим τ_{zx}. Одни напряжения τ_{zx} существовать на гранях элемента не могут, так как они, образуя пару сил с моментом $(\tau_{zx}\,\mathrm{d}x\delta)\,\mathrm{d}z$, где в скобках дано значение касательных сил, а $\mathrm{d}z$ — плечо пары сил, вызвали бы вращение элемента. Поэтому на вертикальных гранях указаны компоненты напряжений τ_{zx}, приводящиеся к паре $(\tau_{zx}\,\mathrm{d}z\delta)\,\mathrm{d}x$. Найдем соотношение этих напряжений из условия равновесия элемента в виде равенства нулю суммы моментов этих пар:

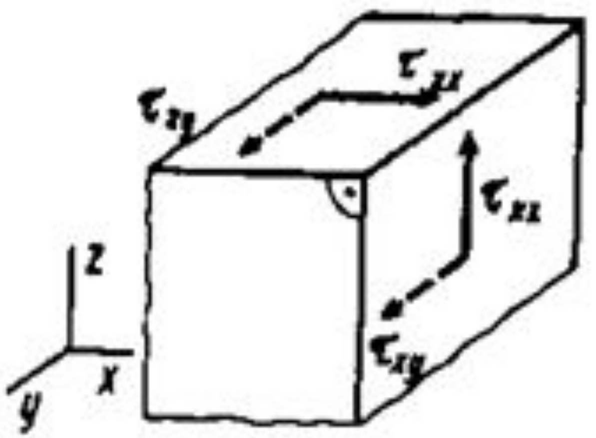
$$\left(\tau_{zx}\mathrm{d}x\delta\right)\mathrm{d}z-\left(\tau_{xz}\mathrm{d}z\delta\right)\mathrm{d}x=0$$

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ
Чистый сдвиг

Сократив это выражение на произведение $dx\, dz\, \delta$, получим равенство

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad (1)$$

называемое **законом парности касательных напряжений**: *На взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения численно равны и направлены так, что стремятся вращать элемент в противоположные стороны.*



В общем случае на каждой площадке могут возникать две компоненты касательных напряжений. Исходя из закона о парности, в плоскости могут быть только два варианта действия касательных напряжений на гранях прямоугольного элемента материала, отличающиеся на правлением векторов напряжений $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau$.

Напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тем, что на гранях элемента возникают только касательные напряжения, называют ЧИСТЫМ СДВИГОМ.

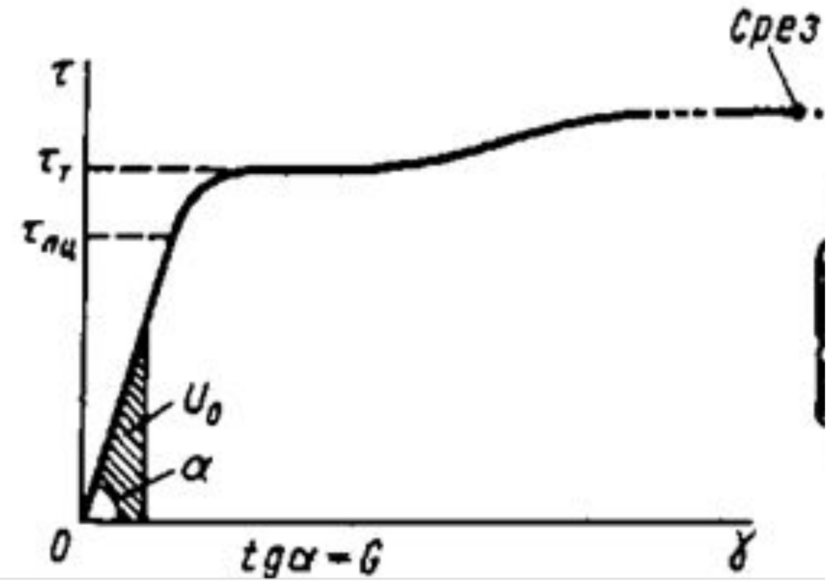
Все элементы стенки рассматриваемой трубы находятся в одинаковых условиях и испытывают чистый сдвиг.

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ
Чистый сдвиг

Закон Гука при сдвиге. Экспериментальное изучение деформации чистого сдвига обычно проводят путем кручения трубчатых образцов, получая из эксперимента зависимость между напряжением τ и углом сдвига γ. Диаграмма сдвига изображена для пластичной стали показана на рисунке.

До напряжения $\tau_{пц}$ называемого пределом пропорциональности при сдвиге, справедлива линейная зависимость

$$\tau = G\gamma \qquad (2)$$



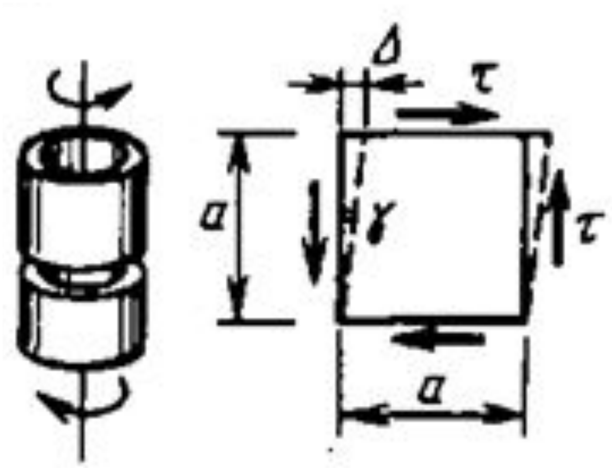
где G — это модуль упругости материала при сдвиге.

Выражение (2) носит название закона Гука при сдвиге.

Напряжение $\tau_т$ является пределом текучести при сдвиге, т. е. касательным напряжением, при котором угол сдвига возрастает при постоянном напряжении. Для пластичного материала протяженность диаграммы сдвига довольно велика (на рисунке отмечено пунктиром). Завершается испытание в этом случае срезом материала в плоскости поперечного сечения трубчатого образца.

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Чистый сдвиг



Смещение Δ называют абсолютным сдвигом.

Отношение $\Delta/a = \mathrm{tg}(\gamma) \approx \gamma$ — относительным сдвигом или, как указывалось, углом сдвига. Эта величина безразмерная, поэтому модуль сдвига G выражается в единицах напряжения (Па)

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}} \qquad (3)$$

E — модуль упругости при растяжении;

μ — коэффициент Пуассона;

G — модуль сдвига

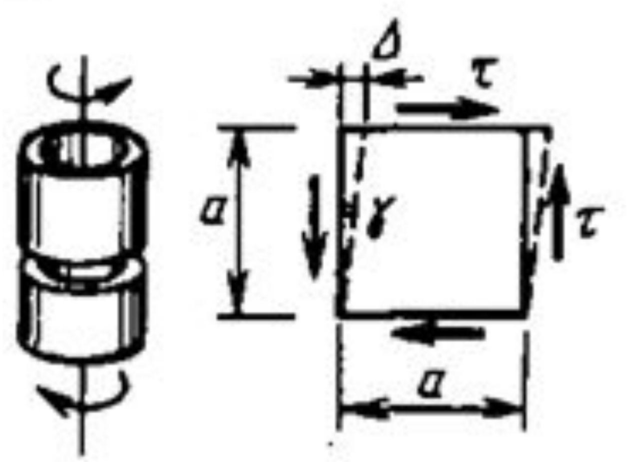
Например, для стали E = 200 ГПа, μ = 0.25 и по формуле (3) найдем, что G = 80 ГПа.

Эта зависимость подтверждается экспериментально.

Для многих материалов предел текучести при сдвиге $\tau_т$ связан с пределом текучести при растяжении $\sigma_т$ следующим соотношением: $\tau_т \approx \sigma_т / \sqrt{3}$

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Потенциальная энергия при чистом сдвиге



Энергия деформации, накапливаемая в элементе размером $a \times a \times 1$, показанном на рисунке. Эта энергия равна работе касательных сил, приложенных к граням элемента. Работу совершает горизонтальная сила

$$T = \tau \cdot a \cdot 1$$

на перемещении

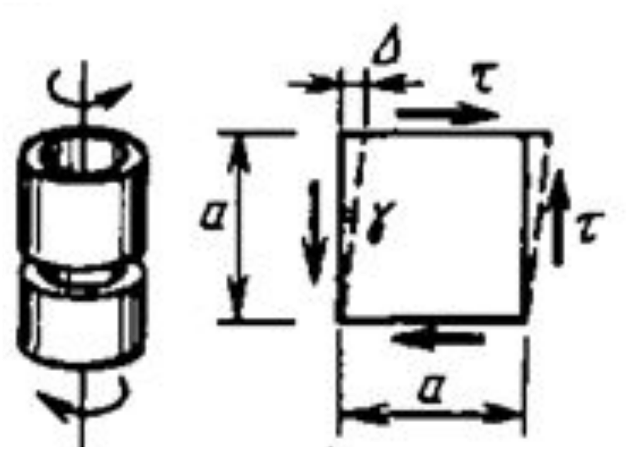
$$\Delta = \gamma a$$

работа этой упругой силы будет равна

$$A = \frac{1}{2} T \Delta = \frac{1}{2} \tau \gamma a^2$$

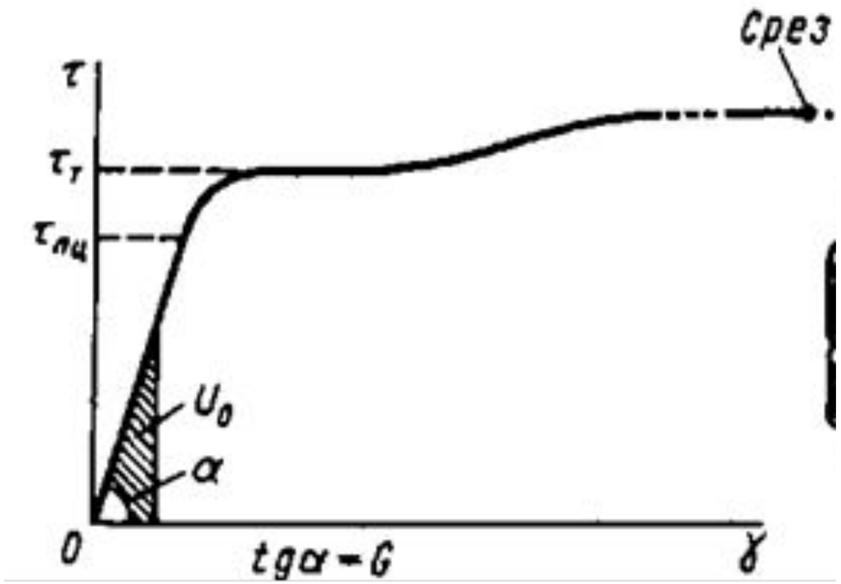
СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Потенциальная энергия при чистом сдвиге



Отнесем численно равную работе энергию деформации к единице объема элемента:

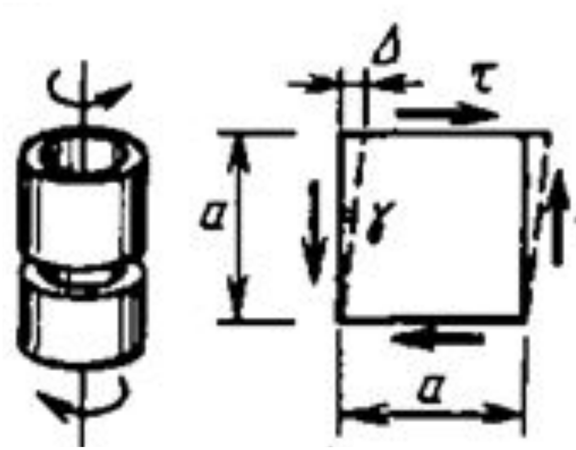
$$u = \frac{A}{a^2 \cdot 1} = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G} = \frac{1}{2}G\gamma^2 \qquad (4)$$



Величина u называется плотностью энергии деформации или удельной потенциальной энергией деформации при чистом сдвиге.

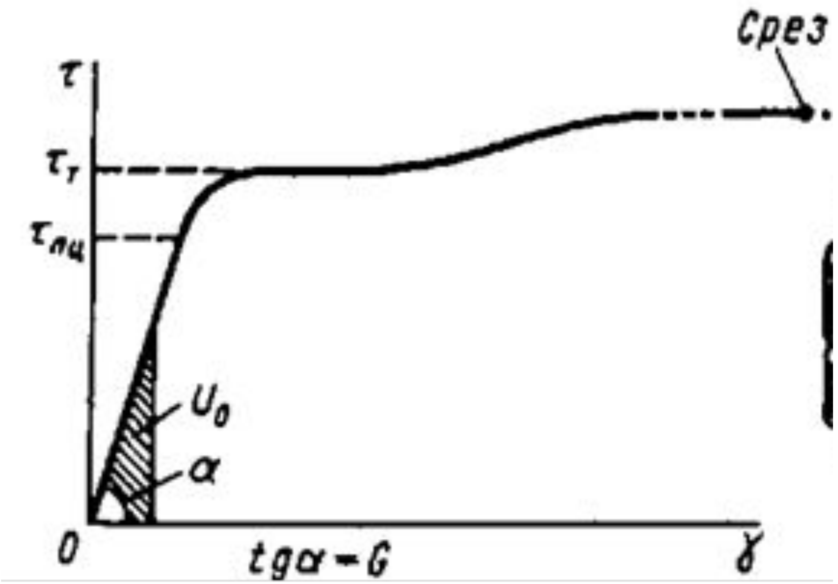
Численно она равна площади треугольника на диаграмме сдвига.

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ
Потенциальная энергия при чистом сдвиге



Если по объему материала V касательные напряжения $\tau_т$ имеют переменное значение, то энергия деформации в объеме V найдется как интеграл:

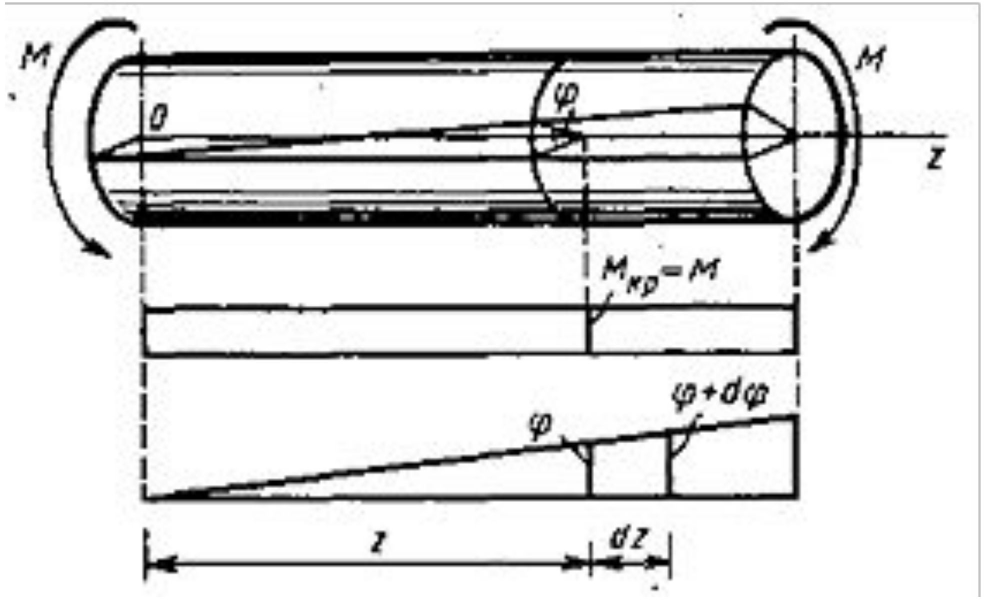
$$u = \iiint_V u \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z \tag{5}$$



где $u \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$ — энергия, накопленная в элементарном объеме тела.

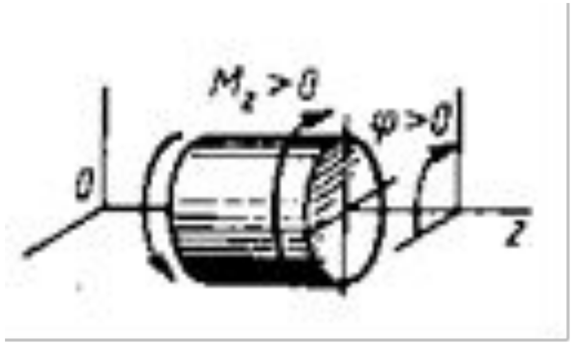
СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.



Общая деформация кручения стержня с круглым сечением (см. рисунок) характерна тем, что поперечные сечения поворачиваются вокруг оси стержня z на углы $\phi = \phi(z)$, называемые углами закручивания, а в поперечных сечениях возникают касательные напряжения τ, приводящие к возникновению крутящего момента M_z.

Правило знаков для момента M



- при взгляде на торцевое сечение элемента стержня dz со стороны его внешней нормали видим, что положительный момент M_z направлен по ходу часовой стрелки.
- Угол поворота $\phi > 0$, если при взгляде на сечение в положительном направлении оси z видим поворот против хода часовой стрелки.

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.

Получим формулу для напряжений τ и найдем зависимость между функцией φ и моментом M_z из которой можно было бы определять углы закручивания. Для сечения в виде круга указанная задача может быть решена достаточно просто путем использования двух допущений о характере деформации стержня, подтверждаемых экспериментально. Кручение стержней с некруглым сечением представляет более сложную задачу.

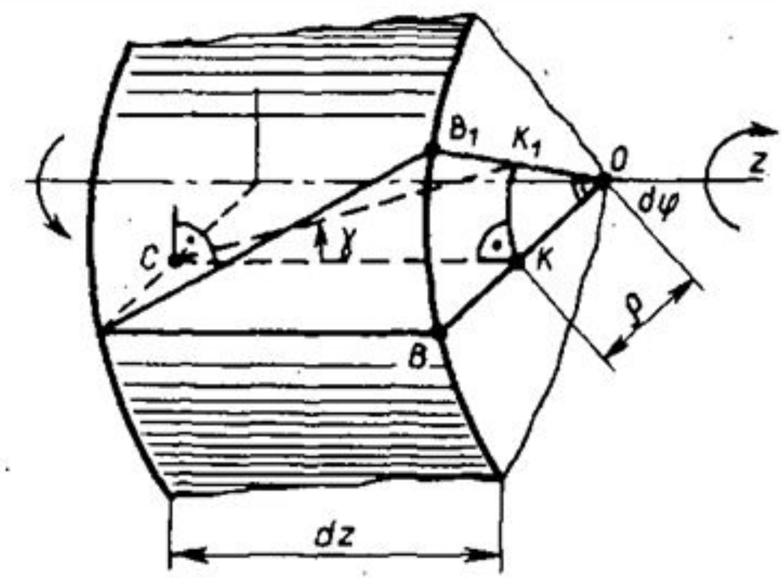
Первое допущение состоит в том, что будем считать справедливой гипотезу плоских сечений, т. е. примем, что поперечные сечения при кручении, поворачиваясь вокруг оси z, остаются плоскими. ***Заметим***, *что для сечения некруглой формы это положение в общем случае несправедливо, сечения при кручении искривляются (депланируют), что существенно усложняет задачу*.

Второе допущение утверждает, что все радиусы данного сечения остаются прямыми и поворачиваются на один и тот же угол φ, т. е. каждое поперечное сечение поворачивается вокруг оси z как жесткий тонкий диск.

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.

Согласно допущениям, кручение представляет деформацию сдвига материала, заключенного между соседними поперечными сечениями, вызванную относительным поворотом этих сечений вокруг оси z



На рисунке изображена деформация элемента стержня длиной dz, выделенного из закручиваемого стержня (см. слайд 10) при произвольном значении z. УСЛОВНО принято, что левое сечение элемента стержня dz остается неподвижным, а правое поворачивается на угол $d\phi$, создаваемый за счет закручивания на длине dz. Один из радиусов OB, оставаясь прямым, поворачивается вместе с сечением на угол $d\phi$, а образующая CK произвольной точки К этого радиуса переходит в положение СК, поворачиваясь на угол γ — угол сдвига в этой точке вала. Дуга $KK_1 = \rho\ d\phi$, а из треугольника $d\phi\ CKK_1$ тот же отрезок $KK_1 = \gamma\ dz$. Из равенства $\rho\ d\phi = \gamma\ dz$ найдем

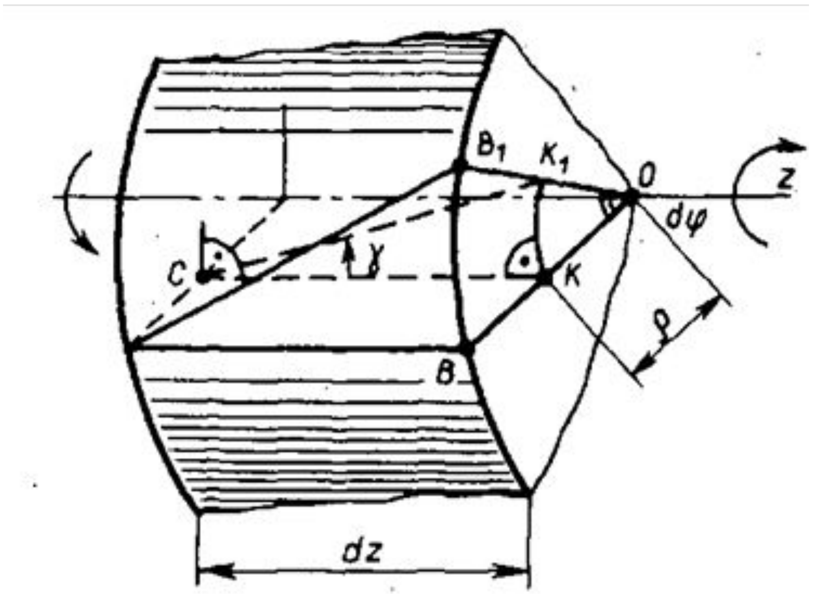
pd<p=ydz y=p (dtp/dz) и по закону Гука (5.2) получим касательное напряжение:

$$\gamma = \rho\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$$

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.

По закону Гука (2) получим касательное напряжение:



$$\tau = G\lambda = G\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right)\rho \qquad (6)$$

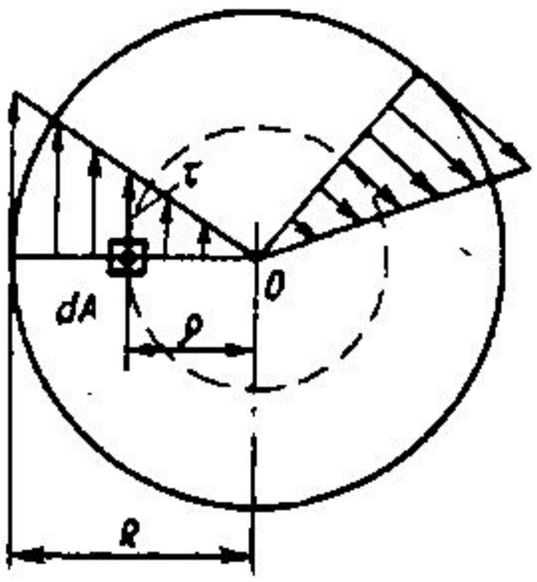
где

G и $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}$ — константы для всех точек сечения, следовательно,

τ в сечение распределяется пропорционально

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.



Согласно формуле (6), закон распределения напряжений τ вдоль произвольного радиуса в сечении изображен на рисунке. Во всех точках окружности радиуса ρ напряжение τ=const и направлено по касательной к этой окружности.

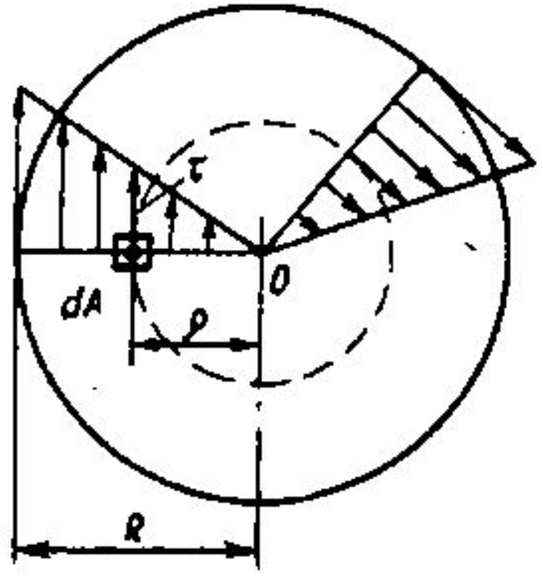
$\theta = \dfrac{d\varphi}{dz}$ - эта величина называется относительным (погонным) углом закручивания и имеет размерность *рад/м.*

При θ = const это угол закручивания, накапливаемый на единице длины вала. В формуле (6) угол θ неизвестен и может быть найден из условия, что напряжения τ в сечении сводятся к крутящему моменту M_x :

$$M_z = \int_A \tau \, dA \, \rho = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA \qquad (7)$$

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.



Интеграл по площади поперечного сечения

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA$$ представляет полярный момент инерции сечения ($м^4$).

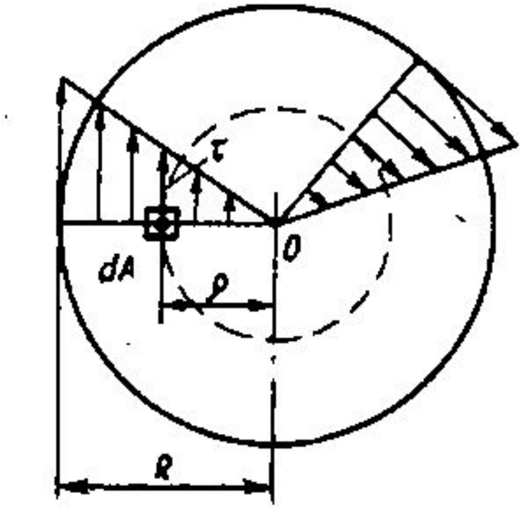
Из (7) получаем относительный (погонный) угол закручивания *рад/м*

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_\rho} \qquad (8)$$

GJ_ρ – жесткость сечения при кручении.

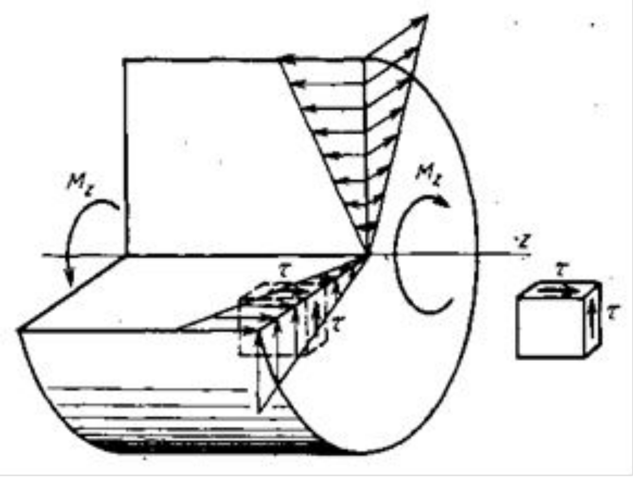
СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.



Подставив (8) в (4) получим формулу касательных напряжений при кручении.

$$\boxed{\tau = \frac{M_z}{J_\rho}\rho} \qquad (9)$$



По закону о парности касательных напряжений формула (9) определяет касательное напряжение в плоскости поперечного сечения и одновременно возникающее напряжение в перпендикулярной плоскости диаметрального продольного сечения вала. На рнс. 5.6 показано распределение τ вдоль радиуса в двух указанных сечениях, каждый прямоугольный элемент материала, показанный на рис. 5.6, испытывает напряженное состояние чистого сдвига.

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.

Расчеты прочность.

Обеспечение прочности при кручении элементов конструкций круглого сечения производится по методу предельных состояний на основе неравенства

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_\rho}\rho_{\max} \le R} \qquad (10)$$

где R — расчетное сопротивление материала стержня при сдвиге, а крутящий момент M_x определяется от расчетных нагрузок с учетом возможных перегрузок. Левую часть неравенства запишем в несколько преобразованном виде:

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} \le R} \qquad (11)$$

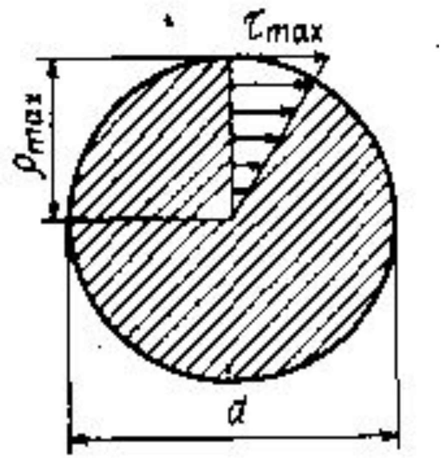
СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.

Момент сопротивления сечения при кручении ($м^3$).

$$W_\rho = W_{кр} = \frac{J_\rho}{\rho_{max}} \qquad (12)$$

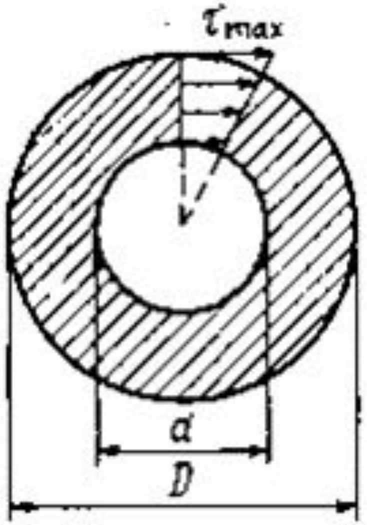
Для сплошного круглого сечения



$$\boxed{W_\rho = \frac{\pi d^4/32}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}} \qquad (13)$$

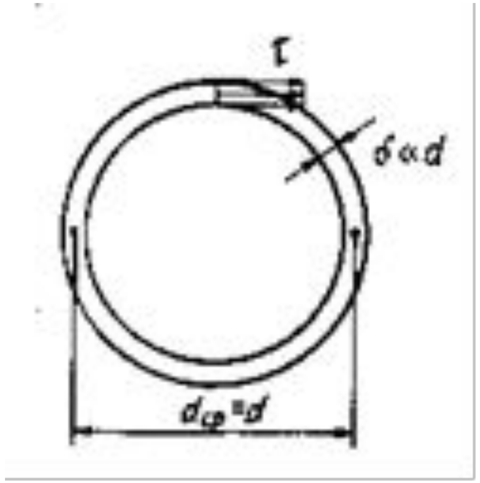
СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.



Для полого толстостенного цилиндра

$$W_\rho = \frac{\frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \alpha^4\right) \qquad (14)$$



Для тонкостенного кольцевого сечения, когда толщина стенки S во много раз меньше среднего диаметра сечения d, можно приближенно принять напряжения τ равномерно распределенными по толщине δ и равными средним напряжениям.

$$\boxed{W_\rho = \frac{\pi d^3\delta / 4}{d/2} = \frac{\pi d^2\delta}{2}} \qquad (15)$$

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.

Если используется метод допускаемых напряжений, например при проектировании валов машин, то условие прочности (11) примет вид

условие прочности по допускаемым напряжениям

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} \le [\tau]} \qquad (16)$$

где [τ] — допускаемое касательное напряжение материала стержня.

Если вал машины передает скручивающий момент M_x, например от мотора к станку, то значение момента зависит от передаваемой мощности и частоты вращения вала. Учитывая, что мощность равна работе в единицу времени (1 *Вт*= 1 *Нм/с*), можно составить равенство

$$N = M_z \alpha = M_z \frac{\pi n}{30}$$

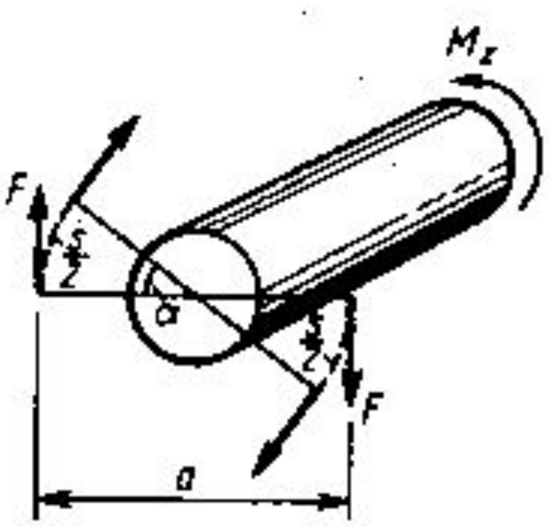
где N — мощность, *Вт*; M_x — момент, *Нм*; *n* — частота вращения, *об/мин*.

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.

$$M_z = \frac{30}{\pi}\frac{N}{n} = 9.55\frac{N}{n} \qquad (17)$$

Работа момента



$$M_z = F\alpha$$

при повороте вала на угол α равна работе сил F на пути s

$$A = Fs = Fa \cdot \alpha = M_z\alpha$$

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.

Определение углов закручивания. Расчеты на жесткость

Для определения углов закручивания воспользуемся соотношением (8), из которого, интегрируя обе части равенства, найдем

$$\varphi = \int_0^z \frac{Mz}{GJ_\rho} dz + \varphi_0 \qquad (18)$$

где ϕ_0 — угол поворота при $z = 0$.

В частном случае при $M_z = M = const$, $GJ_\rho = const$ и $\phi_0 = 0$ получим

$$\varphi(l) = \left.\frac{Mz}{GJ_\rho}\right|_0^l = \frac{Ml}{GJ_\rho} \qquad (19)$$

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Кручение стержней с круглым поперечным сечением.

Определение углов закручивания. Расчеты на жесткость

Формулой (19) пользуются для определения угла закручивания, накапливаемого на отдельном участке длиной l при постоянных жесткости GJ_ρ и моменте $M_z = M$. При этом угол ϕ на длине $0 \le z \le l$ возрастает от $\phi_0 = 0$ до $\phi = l$ по линейному закону.

Расчеты на жесткость.

Вал машины, испытывающей чрезмерно большие углы закручивания, может отрицательно влиять на режим ее работы, в частности могут возникнуть нежелательные крутильные колебания. Поэтому помимо условий прочности должны соблюдаться и условия жесткости, которые формулируются в отношении погонного угла закручивания

$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GJ_\rho} \le [\theta] \qquad (20)$$