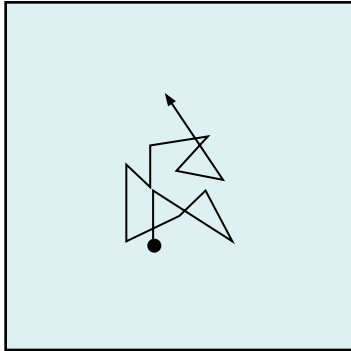


## Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов



При равновесии в газе устанавливается хаотическое (тепловое) движение молекул. Все направления движения равновероятны.

### Давление газа

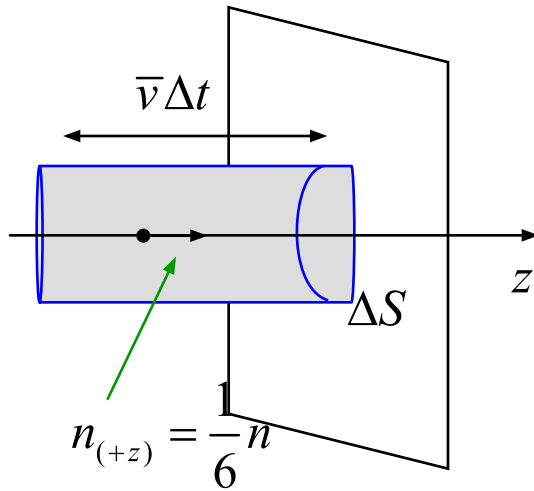
1) Все молекулы одинаковы

2)  $v_i = \bar{v}$

3) 
$$v_i = \begin{cases} \pm \bar{v} x \\ \pm \bar{v} y \\ \pm \bar{v} z \end{cases} \quad \left[ i = (\pm x), (\pm y), (\pm z) \right]$$

$n_i = \frac{1}{6} n$  – концентрация молекул  $i$ -й скоростной группы

## Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов



Число молекул, ударяющихся об  $\Delta S$  за  $\Delta t$

$$\Delta N = \frac{1}{6}nS\bar{v}\Delta t$$

Они передадут импульс

$$\Delta p_z = (2m\bar{v})\Delta N = \frac{1}{3}nm\bar{v}^2\Delta S\Delta t \quad \longrightarrow$$

$$\Delta F_z = \frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \frac{1}{3}nm\bar{v}^2\Delta S \quad \longrightarrow \quad \left( P = \frac{\Delta F_z}{\Delta S} \right)$$

$$P = \frac{1}{3}nm\bar{v}^2 = \frac{2}{3}n\bar{\epsilon}$$

– основное уравнение МКТ

## Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

Свойства  $\bar{\varepsilon}$

$$1) \quad PV = \frac{N}{N_A} RT \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{N}{V} = n, \quad k = \frac{R}{N_A} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} P = nkT \\ P = \frac{2}{3} n\bar{\varepsilon} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$$

2) При равновесии в смеси газов

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = \dots$$

3) При тепловом равновесии газов

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = \dots$$



$\bar{\varepsilon}$  обладает свойствами температуры

## Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

### Распределении кинетической энергии по степеням свободы

Все направления движения равноправны  $\implies \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$

$$\overline{\varepsilon_x} = \overline{\varepsilon_y} = \overline{\varepsilon_z} = \frac{1}{3} \overline{\varepsilon} \implies \overline{\varepsilon_x} = \overline{\varepsilon_y} = \overline{\varepsilon_z} = \frac{1}{2} kT$$

Теорема о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы:

*Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы любой атомно-молекулярной системы, равна  $\frac{1}{2} kT$*

*Число степеней свободы есть число независимых координат, заданием которых определяется пространственное положение системы*

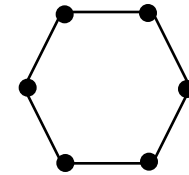
## Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

### Число степеней свободы

Система  $N$  материальных точек с  $k$  связями (молекула)

Число степеней свободы

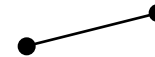
$$f = 3N - k$$



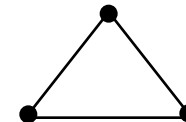
1) Одноатомная молекула  $f = 3$



2) Жесткая двухатомная молекула  $f = 5$



2) Жесткая трехатомная молекула  $f = 6$



## Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

### Газ жестких молекул

Вся энергия молекулы кинетическая  $\longrightarrow$  (при равновесии)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{f}{2} kT$$

Внутренняя энергия одного моля идеального газа таких молекул

$$U = N_A \bar{\varepsilon} = \frac{f}{2} N_A kT = \frac{f}{2} RT \quad \longrightarrow \quad \left( C_V = \frac{dU}{dT} \right)$$

$$C_V = \frac{f}{2} R$$

## Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

1) Теплоемкость газа одноатомных молекул ( $f = 3$ )

$\approx$  He, Ar, Ne и другие инертные газы

$$C_V = \frac{3}{2}R$$

2) Теплоемкость газа двухатомных жестких молекул ( $f = 5$ )

$\approx$  ( при комнатных  $t$  )  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2$ , воздух

$$C_V = \frac{5}{2}R$$

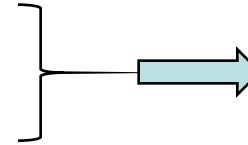
3) Теплоемкость газа трех- и более атомных жестких молекул ( $f = 6$ )

$\approx$  водяной пар  $H_2O$

$$C_V = 3R$$

## Распределение Максвелла

При равновесии движение молекул беспорядочно  
 Все направления движения равноправны



$$dP(v_i) = \varphi(v_i) dv_i \quad (i = x, y, z)$$

$dP(v_i)$  – вероятность  $v_i \in (v_i; v_i + dv_i)$

$\varphi(v_i)$  – функция распределения (плотность вероятности) для  $v_i$

Аналогично для трехмерной вероятности

$$dP(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$$

$dP(\mathbf{v})$  – вероятность  $\mathbf{v} \in (\mathbf{v}; \mathbf{v} + d\mathbf{v})$

$f(\mathbf{v})$  – функция распределения (плотность вероятности) для  $\mathbf{v}$



## Распределение Максвелла

В предположении, что все направления движения статистически независимы

$$f(\mathbf{v}) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z)$$

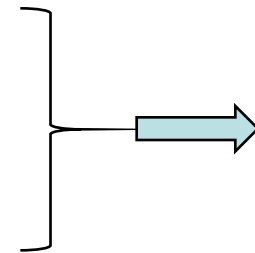
и равноправны  $f(\mathbf{v}) \rightarrow f(v) \implies \left[ f(v) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z) \right]$

$$\varphi(v_i) = A e^{-\alpha v_i^2} \quad (i = x, y, z)$$

$$f(\mathbf{v}) = A^3 e^{-\alpha v^2}$$

Условие нормировки  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x) dv_x = 1$

Средняя кинетическая энергия  $\bar{\varepsilon}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_x \varphi(v_x) dv_x = \frac{1}{2} kT$



## Распределение Максвелла

$$\varphi(v_x) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{mv_x^2}{2kT} \right)$$

$$f(\mathbf{v}) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

– распределение Максвелла

$F(v)$  – плотность вероятности для модуля скорости, тогда

$$F(v)dv = 4\pi v^2 f(\mathbf{v})dv \quad \longrightarrow$$

$$F(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

## Распределение Максвелла

Вероятное число молекул со скоростями в диапазоне от  $v$  до  $v + dv$

$$dN = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right) dv$$

### Характерные скорости

Вероятная скорость  $\left[ F'(v_{\text{вер}}) = 0 \right]$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

Средняя скорость  $\left[ \bar{v} = \int_0^{\infty} v F(v) dv \right]$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

## Распределение Максвелла

Среднеквадратичная скорость  $\left( v_{\text{КВ}} = \sqrt{v^2} \right)$

$$v_{\text{КВ}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

Приведенная форма распределения Максвелла

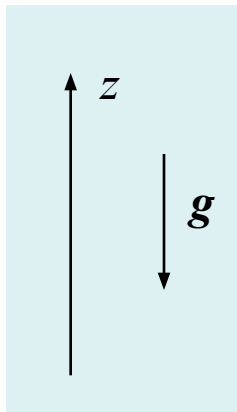
$$u = v/v_{\text{вер}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$$F'(u)du = F(v)dv$$

$$F'(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2)$$

## Распределение Больцмана

Идеальный газ в поле тяжести



$T = \text{const}$

1) При тепловом равновесии  $T = \text{const}$

2) При механическом равновесии

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} \quad \longrightarrow \quad [ \rho = nm ]$$

$$\frac{dp}{dz} = -nmg \quad \longrightarrow \quad [ p = nkT ]$$

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \quad \longrightarrow \quad [ u = mgz ]$$

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{u}{kT}\right) \quad - \text{распределение Больцмана}$$

$n_0$  – концентрация молекул на высоте  $z = 0$