# СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ СИЛ

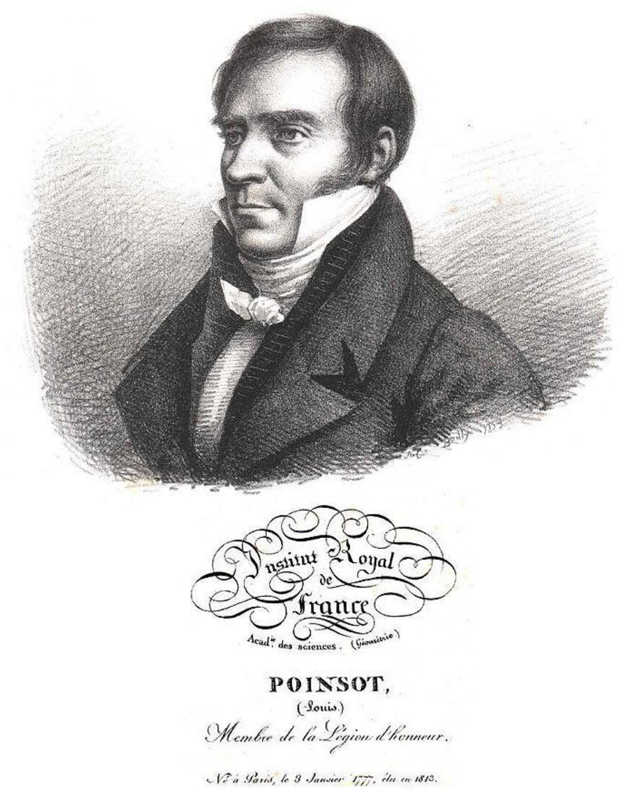
***ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. СТАТИКА***

ЛЕКЦИЯ 5

# ТЕОРЕМА ПУАНСО (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ)

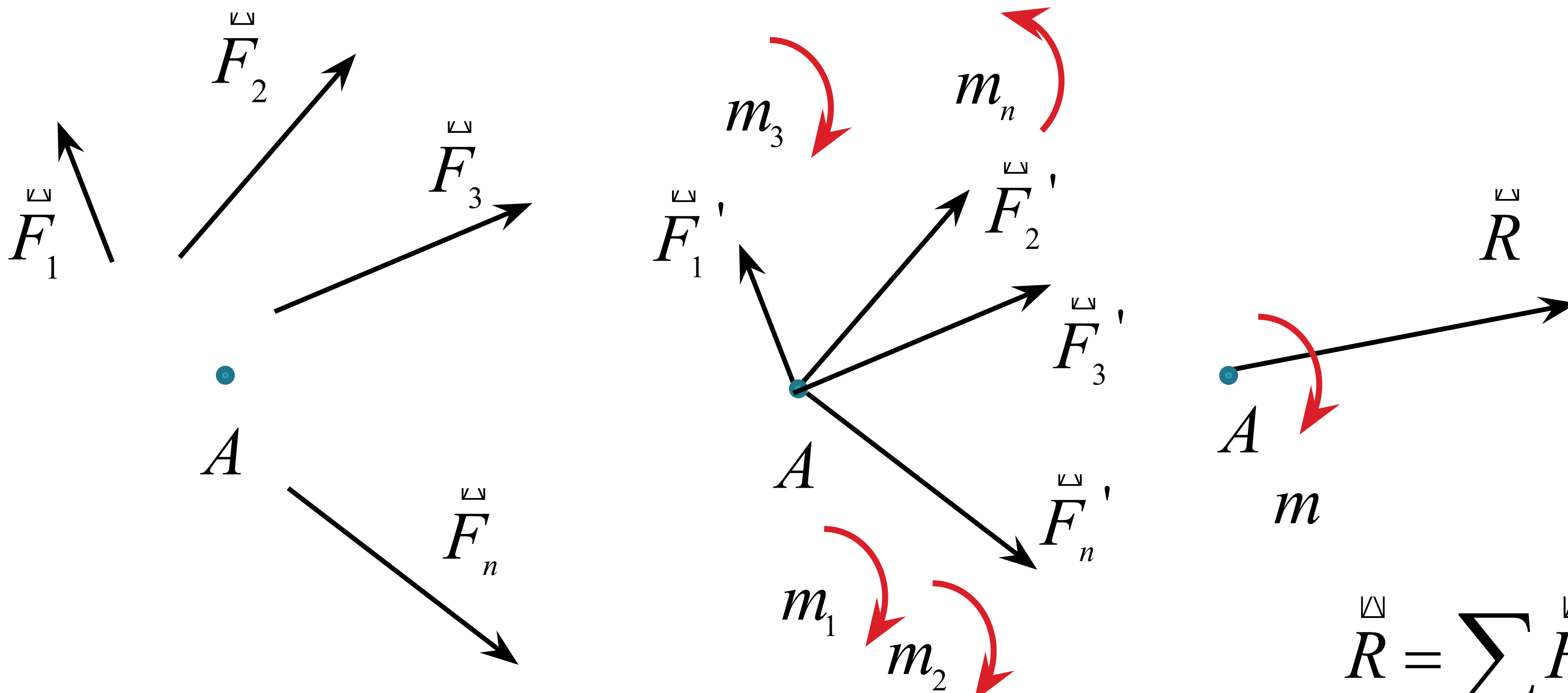
Произвольная система сил эквивалентна силе, равной главному вектору системы, и паре сил, момент которой равен главному моменту системы относительно точки приложения силы (центра приведения)

Луи́ Пуансо́ (1777-1859) — французский математик и механик, академик Парижской Академии наук (1813); пэр Франции (1846), сенатор (1852). Известен своими трудами в области геометрии и механики



# ТЕОРЕМА ПУАНСО (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ)

Произвольная система сил эквивалентна силе, равной главному вектору системы, и паре сил, момент которой равен главному моменту системы относительно точки приложения силы (центра приведения)




$$\vec R = \sum \vec F_k$$

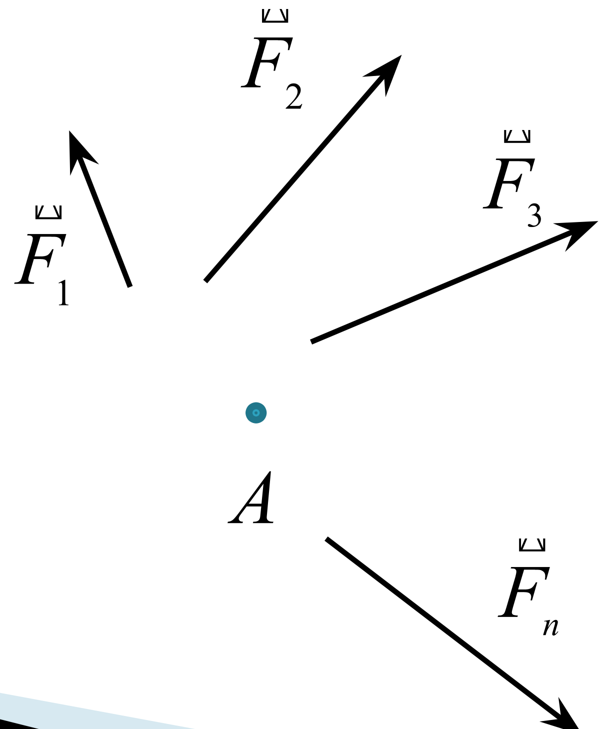
$$\vec m = \sum \vec m_k = \sum \vec M_A(\vec F_k)$$

# СТАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

**<u>Статические инварианты</u>** – характеристики системы сил, не зависящие от центра приведения

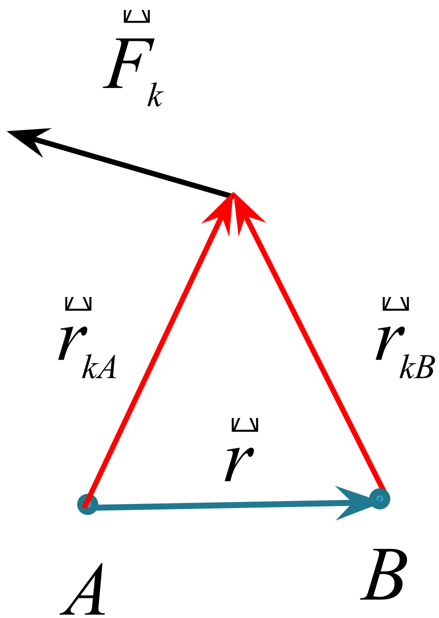
Статические инварианты позволяют более детально ответить на вопрос, к чему приводится система сил.

**<u>Первый статический инвариант</u>** – главный вектор системы



# СТАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

**Главный момент не является статическим инвариантом.**
**Как он зависит от центра приведения?**




**Определим момент одной из сил системы**

$$\vec{M}_A(\vec{F}_k) = \vec{r}_{kA} \times \vec{F}_k, \qquad \vec{M}_B(\vec{F}_k) = \vec{r}_{kB} \times \vec{F}_k$$

$$\vec{r} = \vec{AB}$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_k) = \vec{r}_{kA} \times \vec{F}_k = (\vec{r} + \vec{r}_{kB}) \times \vec{F}_k$$

**Главный момент системы**

$$\vec{M}_A = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_k) = \sum \vec{r}_{kA} \times \vec{F}_k = \sum (\vec{r} + \vec{r}_{kB}) \times \vec{F}_k =$$

$$= \sum \vec{r} \times \vec{F}_k + \sum \vec{r}_{kB} \times \vec{F}_k = \vec{M}_B + \sum \vec{AB} \times \vec{F}_k$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \times \vec{R}$$

# СТАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \times \vec{R}$$

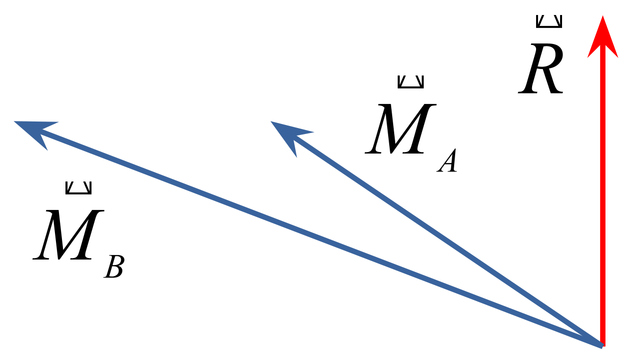
**Умножим равенство скалярно на главный вектор системы**

$$\vec{M}_A \cdot \vec{R} = \vec{M}_B \cdot \vec{R} + (\vec{AB} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}$$

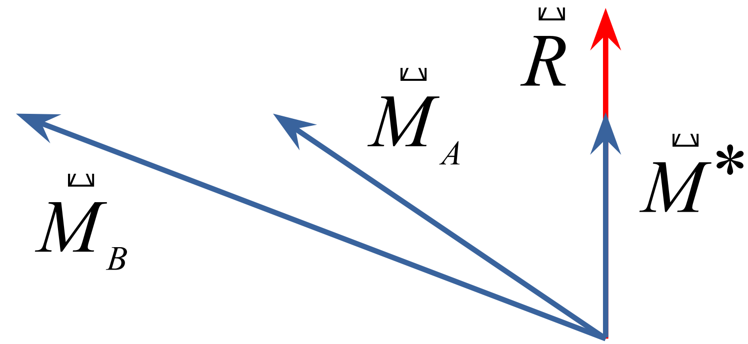
**Последнее слагаемое равно нулю (почему?)**

$$\vec{M}_A \cdot \vec{R} = \vec{M}_B \cdot \vec{R}$$

**<u>Второй статический инвариант</u>** – скалярное произведение главного вектора на главный момент



# СТАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ




**Получили альтернативное определение**

**Второй статический инвариант** – минимальный главный момент

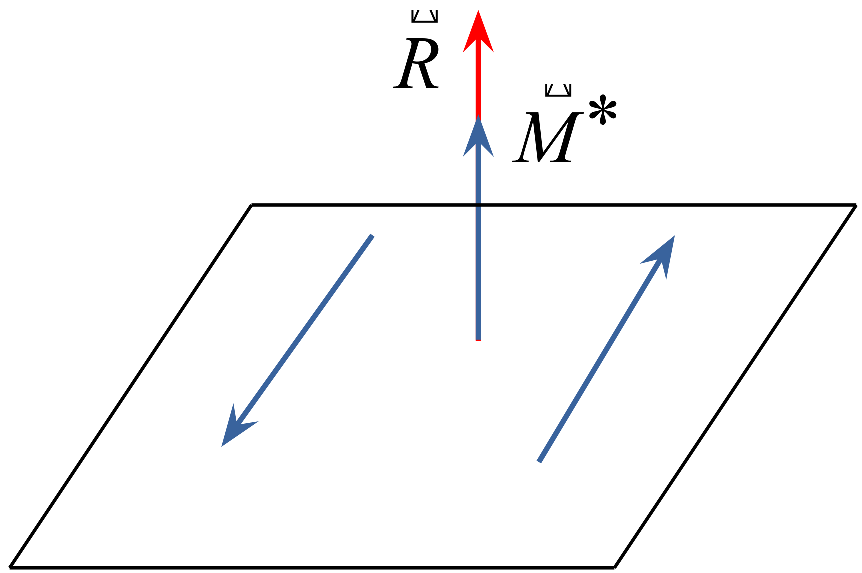
**Как найти минимальный главный момент?**

$$\vec{M}_A \cdot \vec{R} = \vec{M}^* \cdot \vec{R} \qquad \vec{M}_A \cdot \vec{R} = M^* R$$

$$M^* = \frac{\vec{M}_A \cdot \vec{R}}{R}$$

# ДИНАМИЧЕСКИЙ ВИНТ

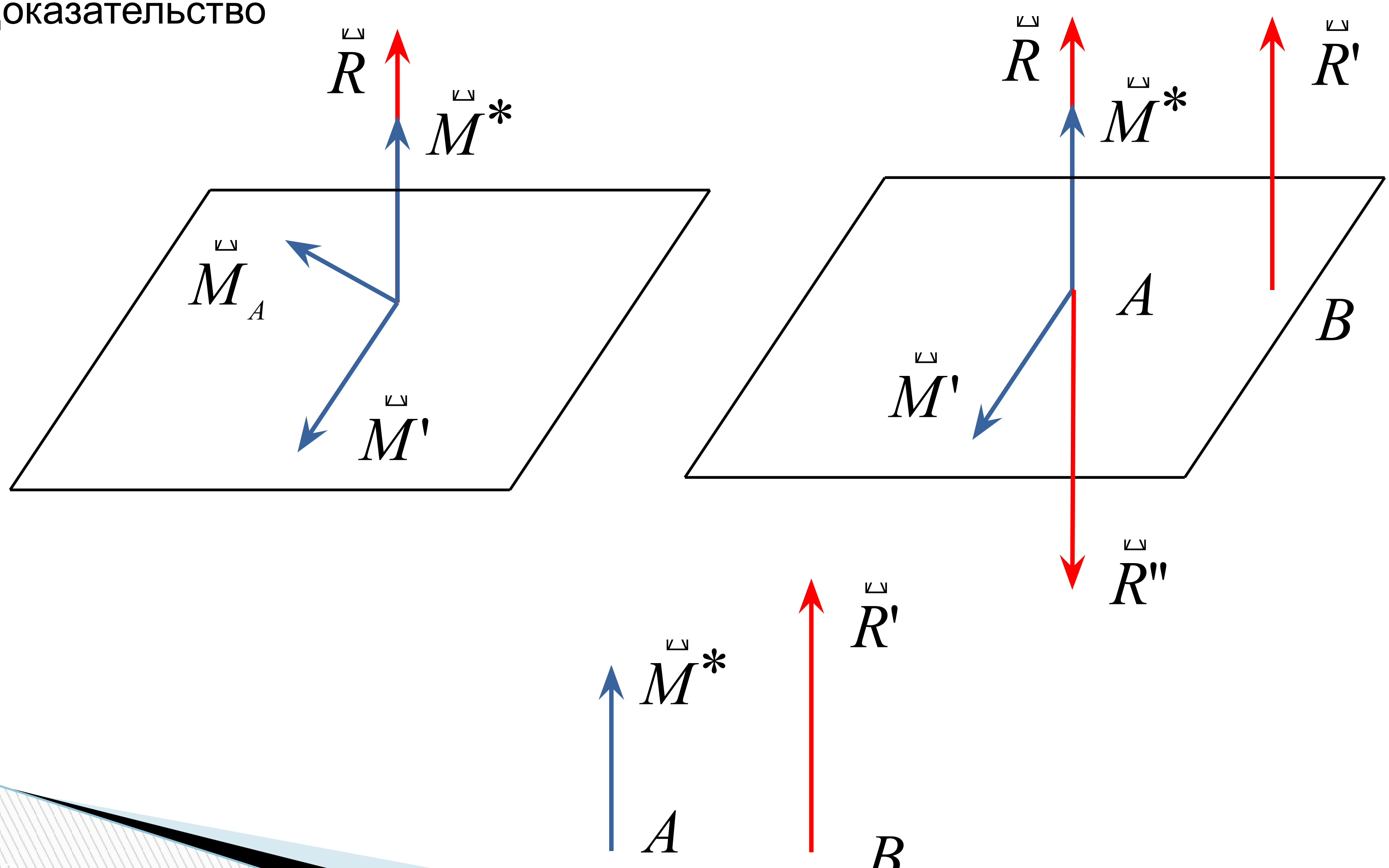
**Динамический винт** – совокупность силы и пары сил, момент которой параллелен силе



# ТЕОРЕМА О ДИНАМИЧЕСКОМ ВИНТЕ

Если статические инварианты системы сил отличны от нуля, то система приводится к динамическому винту

Доказательство



# СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ СИСТЕМ СИЛ

$\vec{M}^* \neq 0,\ \vec{R} \neq 0$ динамический винт

$\vec{M}^* = 0,\ \vec{R} \neq 0$ равнодействующая

$\vec{M}^* \neq 0,\ \vec{R} = 0$ пара сил

$\vec{M}^* = 0,\ \vec{R} = 0$ система сил уравновешена

# УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА

$$\vec{M}^{*}=0,\quad \vec{R}=0$$ система сил уравновешена

$$\vec{R}=\sum \vec{F}_k \qquad \vec{M}_O=\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k)$$

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА**

$$\vec{R}=\sum \vec{F}_k = R_x\vec{i}+R_y\vec{j}+R_z\vec{k} \qquad R_x=\sum F_{kx}$$

$$\vec{M}_O=\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k)=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}$$

$$M_x=\left(\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k)\right)_x=\sum M_O(\vec{F}_k)_x=\sum M_x(\vec{F}_k)$$

# УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

1. Произвольная система сил

$$\sum F_{kx} = 0$$

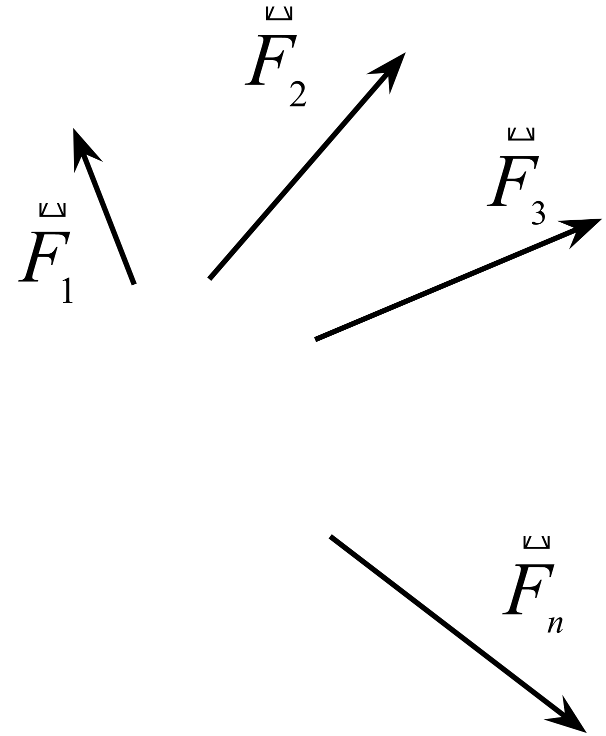
$$\sum F_{ky} = 0$$

$$\sum F_{kz} = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0$$



# УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

2. Система сходящихся сил

$$\sum F_{kx} = 0$$

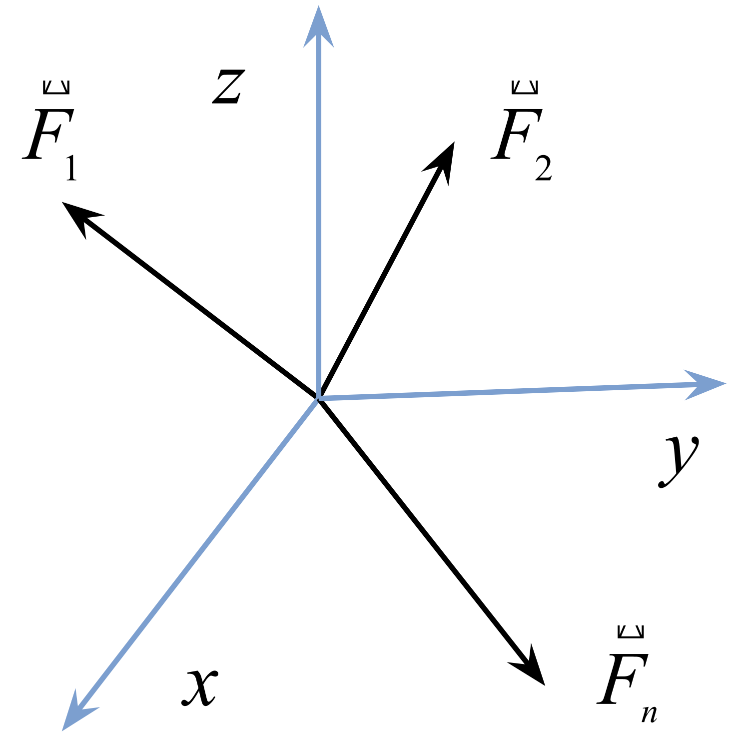
$$\sum F_{ky} = 0$$

$$\sum F_{kz} = 0$$

$$\cancel{\sum M_x(\vec{F}_k) = 0}$$

$$\cancel{\sum M_y(\vec{F}_k) = 0}$$

$$\cancel{\sum M_z(\vec{F}_k) = 0}$$



# УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

3. Система параллельных сил

$$\cancel{\sum F_{kx} = 0}$$

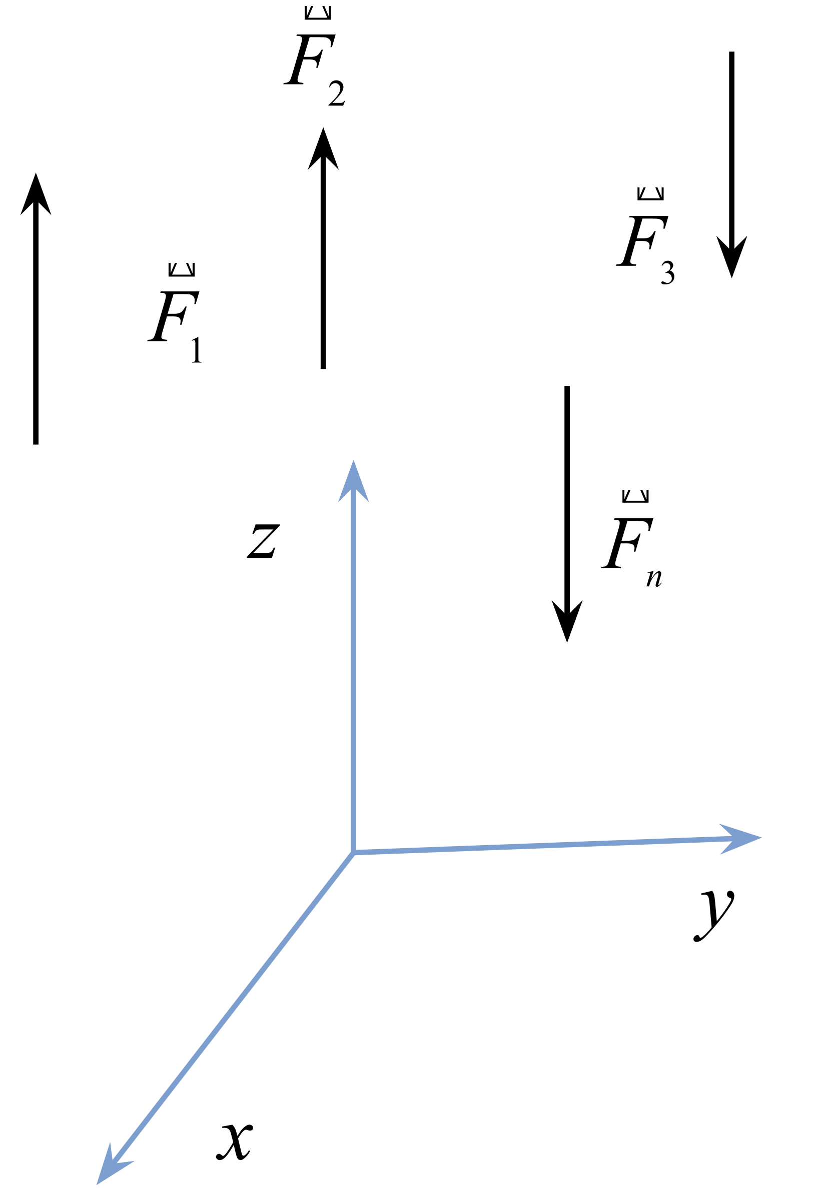
$$\cancel{\sum F_{ky} = 0}$$

$$\sum F_{kz} = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0$$

$$\cancel{\sum M_z(\vec{F}_k) = 0}$$



# УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

4. Произвольная плоская система сил

$$\sum F_{kx} = 0$$

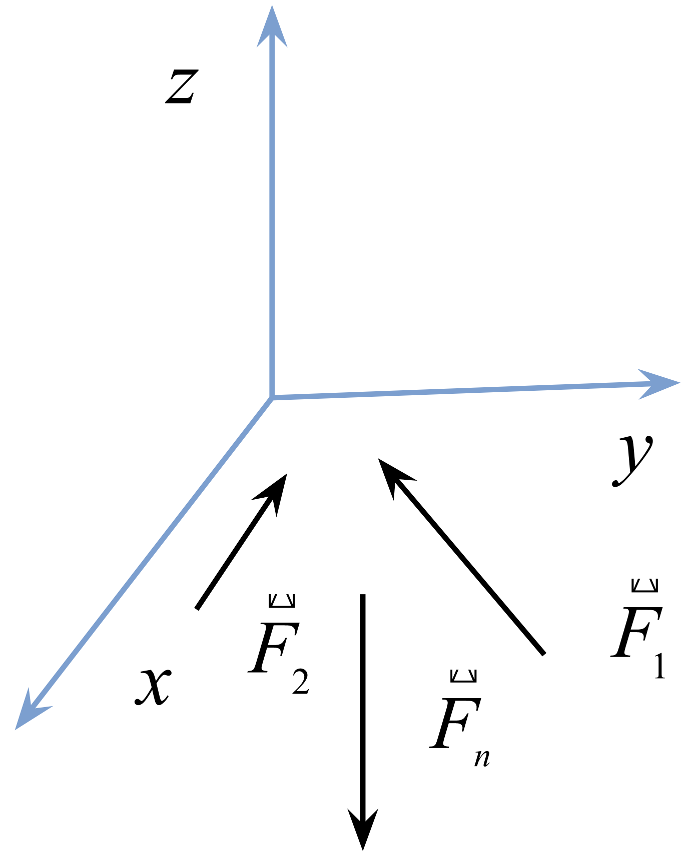
$$\sum F_{ky} = 0$$

$$\cancel{\sum F_{kz} = 0}$$

$$\cancel{\sum M_x(\vec{F}_k) = 0}$$

$$\cancel{\sum M_y(\vec{F}_k) = 0}$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0$$

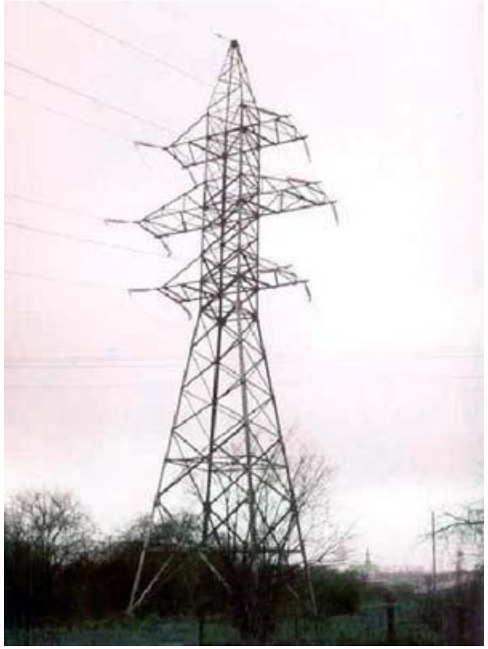



$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$$

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ. ФЕРМА

Мосты

Опоры ЛЭП



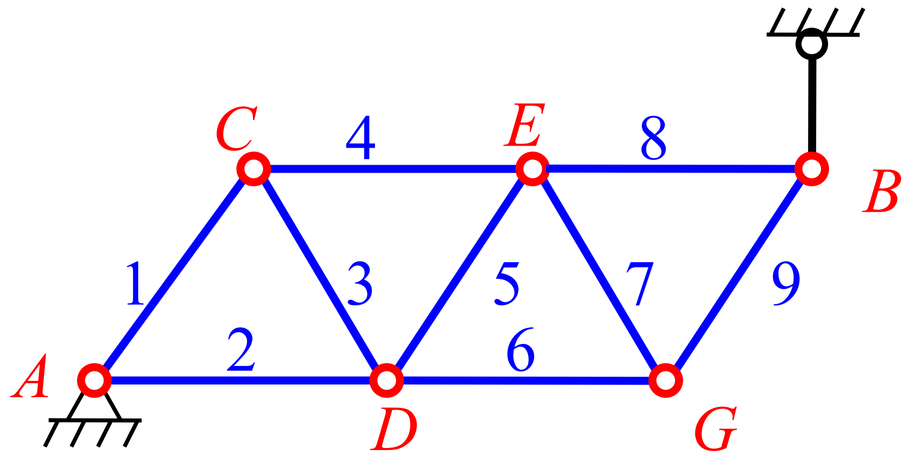
Подъемные краны

Металлические каркасы зданий

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ. ФЕРМА

Ферма - жесткая, геометрически неизменяемая конструкция, состоящая из стержней, соединенных шарнирами.

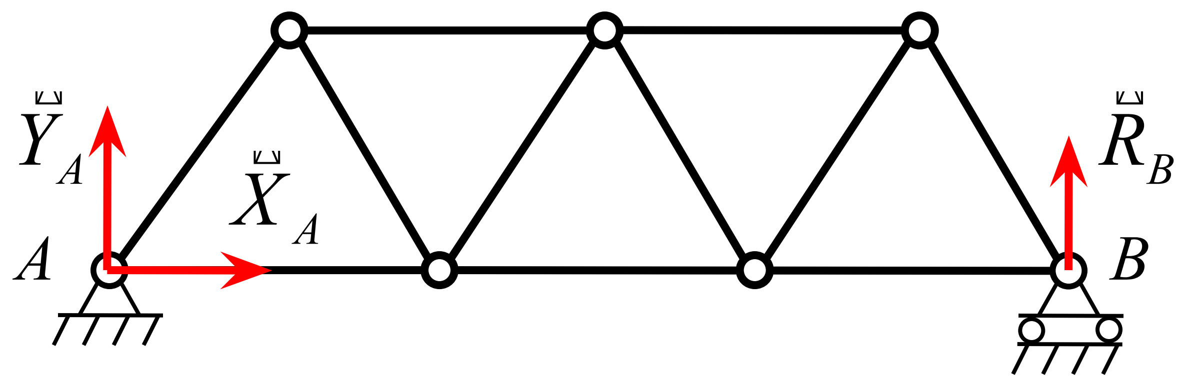
Узел фермы – точка крепления двух или более стержней




1, 2, … 9 – стержни

*A, B, … G* – шарниры (узлы)

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ. ФЕРМА




У **статически определимых ферм** число реакций опор не более трех

Пусть $k$ – число стержней, $n$ – число узлов
Тогда **ферма будет статически определимая** при выполнении равенства

$$k = 2n - 3$$

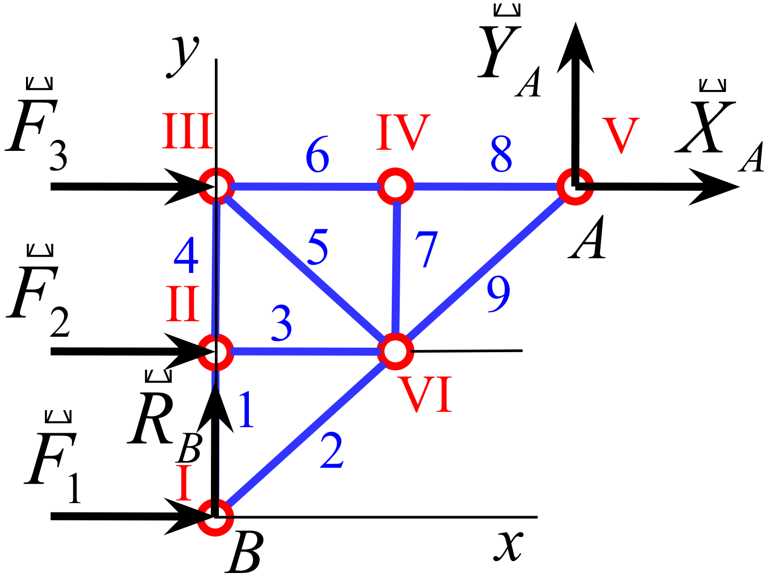
# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ. ФЕРМА

**Для расчета ферм необходимо**

- **Найти реакции внешних опор с использованием аксиомы отвердевания и 3-х уравнений равновесия**

- **Определить усилия в стержнях фермы методом вырезания узлов или методом сечений ( Риттера)**

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ. ФЕРМА




1.Пронумеруем все стержни фермы арабскими цифрами: 1, 2, 3, … 9

2. Пронумеруем узлы фермы римскими цифрами: I, II, III, … IV

3. Рассмотрим равновесие каждого из узлов и составим уравнения равновесия (считаем условно все стержни растянутыми).

Учитываем 3-й закон Ньютона: для каждого из стержней усилия со стороны узлов равны по величине и направлены в разные стороны.