

# КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ



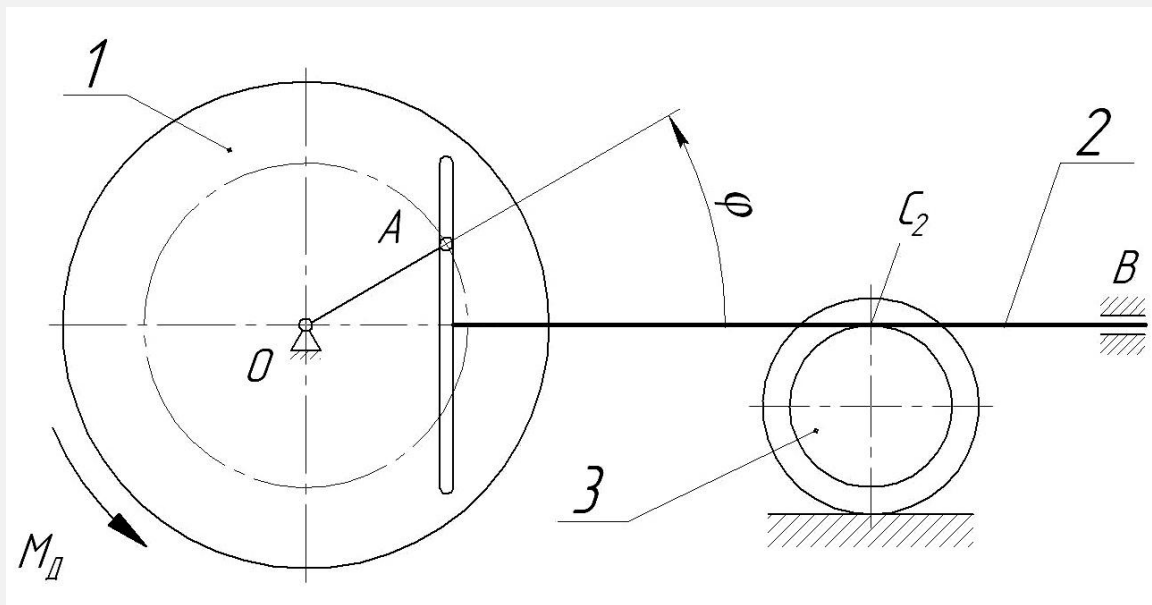
Тема: Динамика кулисного механизма.

Выполнила: Орлова П.А.

Группа:ММ-250003

Преподаватель: Ламоткин А.Е.

# СХЕМА МЕХАНИЗМА



1-маховик 2-кулиса 3-каток

# УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

- Кулисный механизм, состоящий из маховика 1, кулисы 2 и катка 3, расположен в горизонтальной плоскости и приводится в движение из состояния покоя вращающим моментом  $M_D$ , создаваемым электродвигателем. Заданы массы звеньев механизма; величина вращающего момента; радиус инерции катка и радиусы его ступеней; радиус маховика, представляющего собой сплошной однородный цилиндр,  $R_1 = 0,36$  м;  $OA = 0,24$  м.

$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$m_3$ , кг	$M_D$ , Н·м	$\rho_3$ , м	$R_3$ , м	$r_3$ , м	$\varphi^*$ , рад
54	14	12	112	0,14	0,16	0,12	$\pi/6$

# КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

- Механизм состоит из трех звеньев. Ведущим является маховик 1, к которому приложен вращающий момент  $M_d$  со стороны электродвигателя. От маховика посредством кулисы 2 движение передается ведомому звену 3 – катку.
- Маховик совершает вращательное движение, кулиса – поступательное, каток – плоское.
- Начало координат помещаем в точку  $O$ , ось  $Ox$  направляем вправо, ось  $Oy$  – вверх

# КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

- Скорость т.А  $v_A = OA \cdot \omega = OA \cdot \dot{\varphi}$
- Скорость кулисы  $v_2 = v_{2x} = (\bar{v}_A)_x = \dot{\varphi} \cdot OA \cdot \sin \varphi$
- Ускорение кулисы  $a_{2x} = OA \cdot (\ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi)$
- Скорость центра катка  $v_{C3x} = \frac{R_3}{r_3 + R_3} \cdot v_{2x} = \frac{R_3}{r_3 + R_3} \cdot \dot{\varphi} \cdot OA \cdot \sin \varphi$
- Ускорение центра катка  $a_{C3x} = \dot{v}_{C3x} = \frac{R_3}{r_3 + R_3} \cdot \dot{v}_{2x} = \frac{R_3}{r_3 + R_3} \cdot OA \cdot (\ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi)$
- Угловая скорость катка  $\omega_3 = \frac{v_{C3x}}{R_3} = \frac{1}{r_3 + R_3} \cdot \dot{\varphi} \cdot OA \cdot \sin \varphi$
- Угловое ускорение катка  $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{\dot{v}_{C3x}}{R_3} = \frac{a_{C3x}}{R_3} = \frac{1}{r_3 + R_3} \cdot OA \cdot (\ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi)$

# УРАВНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

- $x_A = OA \cdot \cos \varphi$ ;
- $y_A = OA \cdot \sin \varphi$ ;
- $x_{C2} = y_{C20} + OA \cdot \cos \varphi$ ;
- $y_{C2} = 0$ ;
- $y_{C3} = r_3$ .

$$\dot{x}_{C3} = \frac{R_3}{r_3 + R_3} \cdot \dot{\varphi} \cdot OA \cdot \cos \varphi$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{1}{r_3 + R_3} \cdot \dot{\varphi} \cdot OA \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{r_3 + R_3} \cdot OA \cdot \sin \varphi$$

$$x_{C3} = x_{C30} + \frac{R_3}{r_3 + R_3} \cdot OA \cdot \sin \varphi$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ МАХОВИКА

- Для определения угловой скорости маховика применяем теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме, полагая, что механизм в начальный момент находился в покое.
- $T - T_0 = A_e + A_i$  где
- $T_0 = 0$  – кинетическая энергия в начальном положении;
- $A_e = A$  – работа внешних сил при перемещении механизма из начального положения в конечное;
- $A_i = 0$  – работа внутренних сил при перемещении механизма из начального положения в конечное.

- Кинетическую энергию механизма находим как сумму кинетических энергий его звеньев

- $T = T_1 + T_2 + T_3$

- Кинетическая энергия вращающегося маховика:  $T_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{I_1 \dot{\varphi}^2}{2}$

- $I_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2}$  момент инерции маховика (сплошного диска) относительно оси вращения.

- Кинетическая энергия поступательно движущейся кулисы:

- $T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2}{2} (\dot{\varphi} \cdot OA \cdot \sin \varphi)^2$

- Кинетическая энергия катка, совершающего плоское движение:

- $T_3 = \frac{m_3 v_{C3}^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3}{2} \left( \frac{R_3}{r_3 + R_3} \cdot \dot{\varphi} \cdot OA \cdot \sin \varphi \right)^2 + \frac{I_3}{2} \left( \frac{1}{r_3 + R_3} \cdot \dot{\varphi} \cdot OA \cdot \sin \varphi \right)^2$



- где  $I_3 = m_3 \rho_3^2$  – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс.
- Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{I_1 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{\varphi} \cdot OA \cdot \sin \varphi)^2 + \frac{m_3}{2} \left( \frac{R_3}{r_3 + R_3} \cdot \dot{\varphi} \cdot OA \cdot \sin \varphi \right)^2 + \frac{I_3}{2} \left( \frac{1}{r_3 + R_3} \cdot \dot{\varphi} \cdot OA \cdot \sin \varphi \right)^2$$

- После преобразований:  $T = \frac{I_{np}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2}{2}$  где  $I_{np}(\varphi)$  – приведенный к ведущему звену момент инерции механизма, в общем случае зависящий от угла поворота маховика.

$$I_{np}(\varphi) = \frac{m_1 R_1^2}{2} + \left( m_2 + m_3 \left( \frac{R_3 + \rho_3}{r_3 + R_3} \right)^2 \right) \cdot (OA \cdot \sin \varphi)^2 = 3,90 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

- **Определение элементарной работы, мощности внешних сил.**  
Определение работы внешних сил на конечном перемещении (механизм в горизонтальной плоскости). В данном механизме нет вертикальных перемещений масс, поэтому работу совершает только вращающий момент МД. Элементарная работа при этом определяется равенством

- $dA_e = M_D \cdot d\varphi$
- Работа при повороте маховика на угол  $\varphi^*$
- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ**

$$A = \int_0^{\varphi^*} M_D d\varphi = M_D \varphi^*$$

**МАХОВИКА** при его повороте на угол

- $$\frac{I_{\text{пр}} \left( \frac{\pi}{6} \right) \cdot \dot{\varphi}^2}{2} = M_D \cdot \frac{\pi}{6}; \quad \frac{3,90 \cdot \dot{\varphi}^2}{2} = 112 \cdot \frac{\pi}{6}; \quad \dot{\varphi}^2 = 30,073;$$
- $$\omega_1 = \dot{\varphi}(\varphi^*) = 5,48 \text{ рад/с}$$

# СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КУЛИСНОГО МЕХАНИЗМА, ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ МАХОВИКА

- Определение производной кинетической энергии по времени

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dI_{np}(\varphi)}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}^3 + I_{np}(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi}$$

- Вычисляем для заданных в условии числовых значений:

$$\frac{dI_{np}(\varphi^*)}{d\varphi} = \left( 14 + 12 \cdot \left( \frac{0,16 + 0,14}{0,12 + 0,16} \right)^2 \right) \cdot 0,24^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 1,386 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

- Мощность  $N^e = \frac{dA^e}{dt} = M_{д} \dot{\varphi}$

- Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергией в дифференциальной форме

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i$$

- 
- 

- где  $N^e$  – мощность внешних сил;  $N^i = 0$  – мощность внутренних сил.
- Подставляя в это уравнение найденные выше значения находим

$$\left( \frac{m_1 R_1^2}{2} + \left( m_2 + m_3 \left( \frac{R_3 + \rho_3}{r_3 + R_3} \right)^2 \right) \cdot (OA \cdot \sin \varphi)^2 \right) \cdot \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \left( m_2 + m_3 \left( \frac{R_3 + \rho_3}{r_3 + R_3} \right)^2 \right) \cdot OA^2 \cdot \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = M_D$$

- Подставляем числовые данные и получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$(3,499 + 1,600 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot \ddot{\varphi} + 0,800 \cdot \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = 112$$

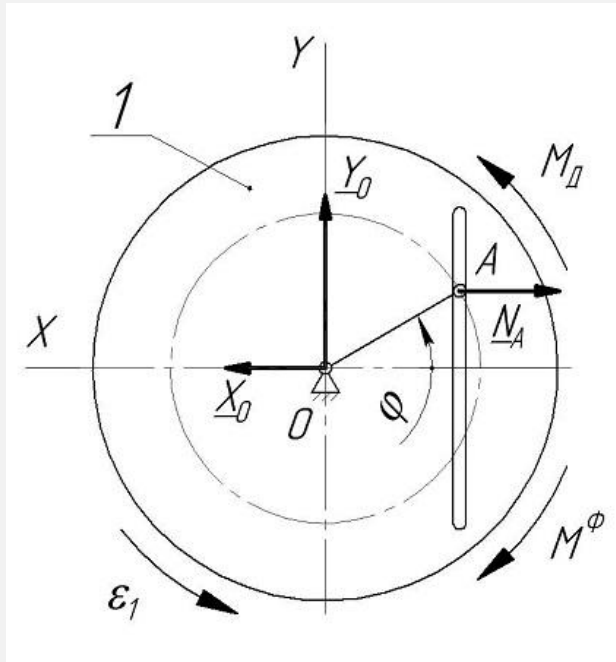
- Это уравнение описывает движение кулисного механизма. Оно может быть проинтегрировано только численно, а также использовано для нахождения углового ускорения маховика в произвольном его положении

- Определим угловое ускорение маховика при угле его поворота

$$\varphi^* = \pi/6.. \left( 3,499 + 1,600 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{6} \right) \cdot \ddot{\varphi} + 0,800 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot 5,48^2 = 112; \quad 3,899 \cdot \ddot{\varphi} = 112 - 20,806;$$
$$3,899 \cdot \ddot{\varphi} = 91,194$$

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = 23,39 \text{ рад/с}^2.$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ



- Маховик совершает вращательное движение
- Система сил инерции приводится к паре с моментом  $M^{\Phi} = -I_1\ddot{\phi}$ , направленным против вращения, т. к. оно ускоренное
- Условие уравновешенности плоской системы внешних сил

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_O - N_A = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_O = 0,$$

$$\sum m_o(\vec{F}_k) = 0; \quad M_D - M^{\Phi} - N_A \cdot y_A = 0;$$

- Находим

$$N_A = \frac{M_D - M^\Phi}{y_A} = \frac{M_D - I_1 \ddot{\varphi}}{OA \cdot \sin \varphi} = \frac{M_D - \frac{m_1 R_1^2}{2} \cdot \ddot{\varphi}}{OA \cdot \sin \varphi};$$

$$Y_O = 0;$$

$$X_O = N_A.$$

- При угле  $\varphi^* = \pi/6$ :

$$N_A = \frac{M_D - M^\Phi}{y_A} = \frac{M_D - I_1 \ddot{\varphi}}{OA \cdot \sin \varphi} = \frac{112 - \frac{54 \cdot 0,36^2}{2} \cdot 23,39}{0,24 \cdot \sin \frac{\pi}{6}} = 251,3 \text{ H};$$

$$Y_O = 0; X_O = 251,3 \text{ H}.$$

- Действительные направления сил  $N_A$  и  $X_O$  соответствуют показанным на рисунке, т.к. их величина получилась положительной.
- Сила , приводящая в движение кулису, по третьему закону динамики равна реакции кулисы и направлена в противоположную сторону.
- 
-



## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

$\omega_1$ , рад/с	$\varepsilon_1$ , рад/с <sup>2</sup>	$F_A$ , Н	$X_0$ , Н	$Y_0$ , Н
5,48	23,39	251,3	251,3	0