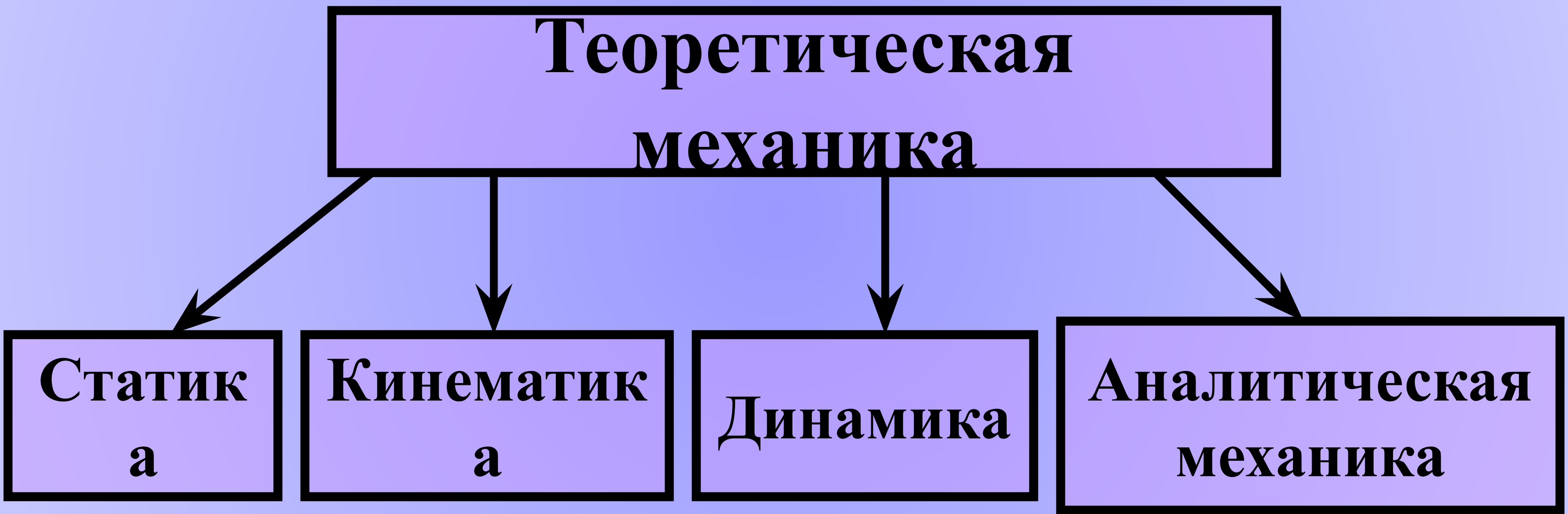
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Лекции и практика:
Бородина Марина Борисовна

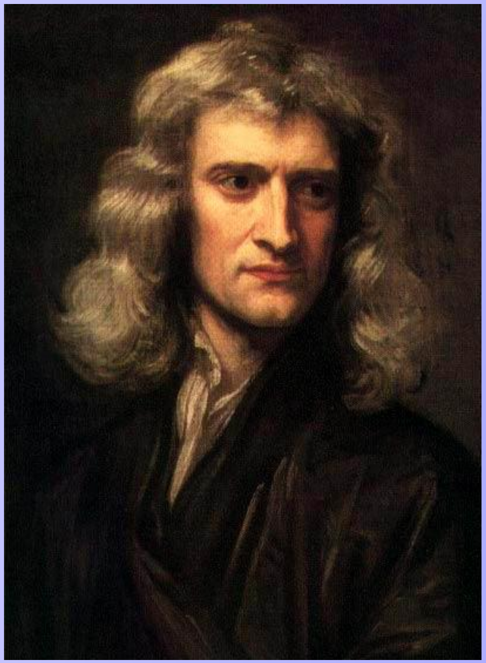
Рекомендуемая литература:

1) Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.
2) Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике.
3) Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики в 2-х частях.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА - наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами.

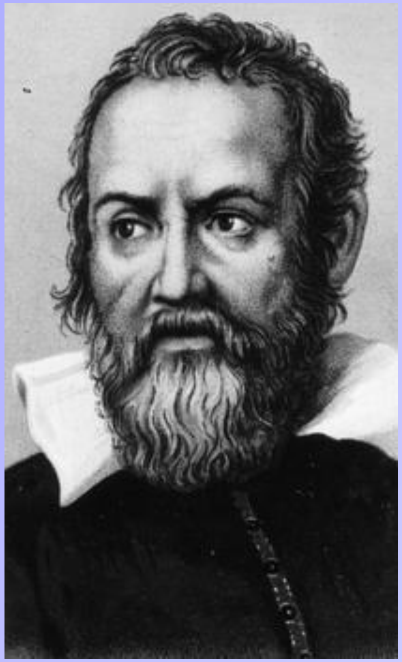


Теоретическую механику называют еще *классической механикой* или *механикой Ньютона* (1643-1727 гг.).



Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов.

Три закона механики (законы Ньютона) впервые в полной мере сформулированы и математически описаны Исааком Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии» (1687 год)

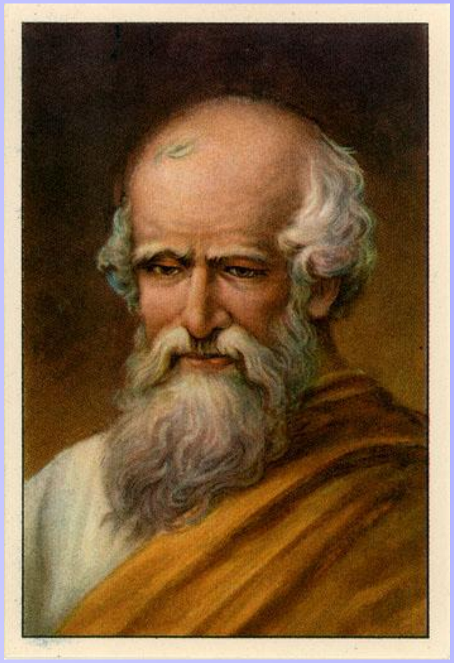


Первый закон (закон инерции), в менее чёткой форме, опубликовал ещё Галилей (1564-1642 гг.)

При отсутствии внешних сил тело либо покоится, либо равномерно и прямолинейно движется.

Роберт Гук (1635 г. –1703 г.) предвосхитил закон всемирного тяготения И. Ньютона; в 1679 г.

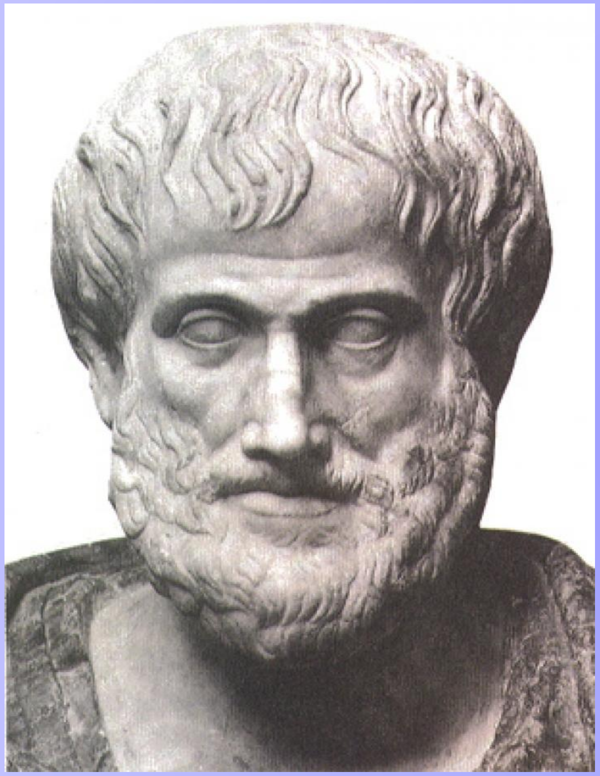
В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе.



Ещё со времён **Архиме́да** (287 до н. э. — 212 до н. э.) был известен третий закон.

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе, взаимодействия двух тел друг на друга равны и направлены в противоположные стороны.

Правило равновесия рычага формулировали ещё **Аристотель** (384-322 гг. до н.э.) и его ученики - в трактате «Механические проблемы».

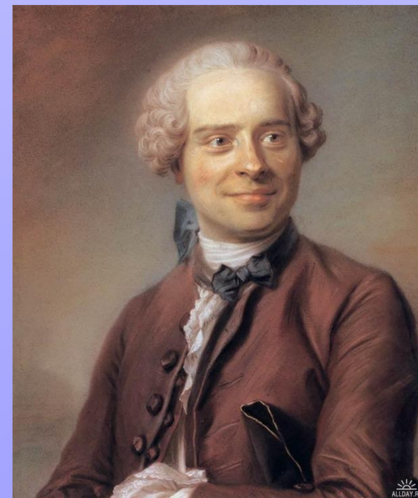


Камень, который по природе падает вниз, не приучишь подниматься вверх, приучай его, подбрасывая вверх хоть тысячу раз.

В труде «**Механические проблемы**» описаны зубчатые колеса, кривошипы, катки, полиспасты, металлические цапфы.

Л.Эйлер (1707-1783)

Разработал методы решения задач динамики точки и твердого тела путем составления и интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений



Ж.Д’Аламбер (1717-1783)

Предложил свой известный принцип решения задач динамики

Ж.Лагранж (1736-1813)

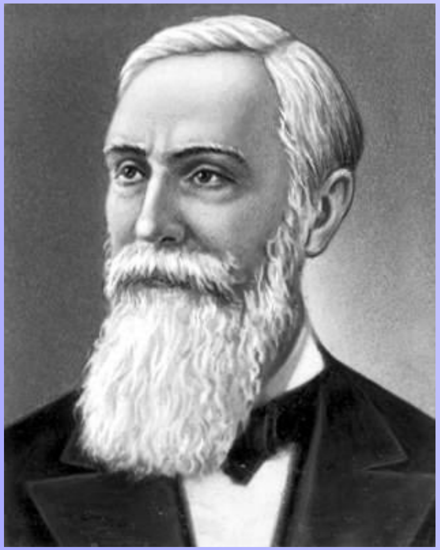
Разработал общий аналитический метод решения задач динамики на основе принципа Даламбера и принципа возможных перемещений

М.В.Остроградский
(1801-1861 гг.)

Принадлежит ряд важных исследований по аналитическим методам решения задач механики

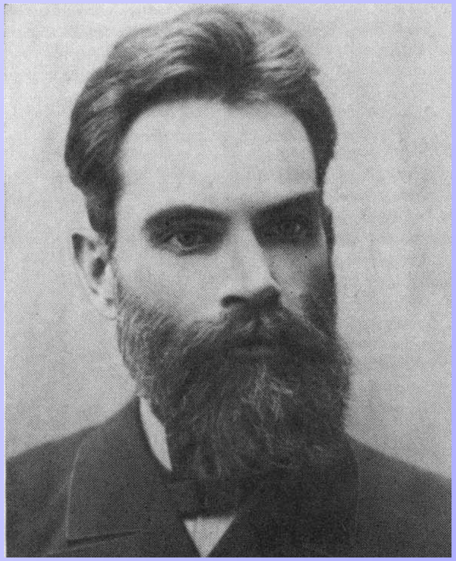
С.В.Ковалевская
(1850-1891 гг.),

Решила одну из труднейших задач динамики твердого тела



П.Л.Чебышев
(1821-1894 гг.)

Создал новое направление в исследовании движения механизмов



А.М.Ляпунов
(1857-1918 гг.)

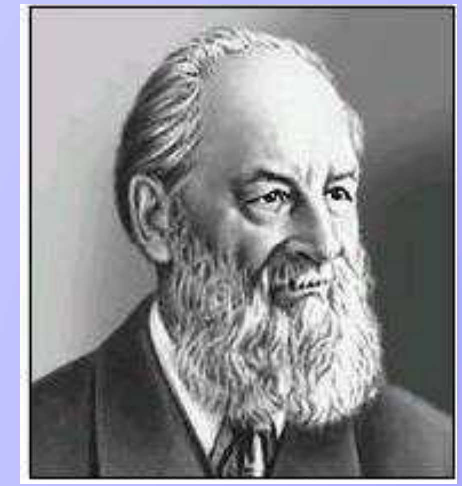
К.Э.Циолковский (1857-1935 гг.)

И.В.Мещерский
(1859-1935 гг.)

Дал строгую постановку одной из фундаментальных задач механики и всего естествознания – задачи об устойчивости равновесия и движения и разработал наиболее общие методы ее решения

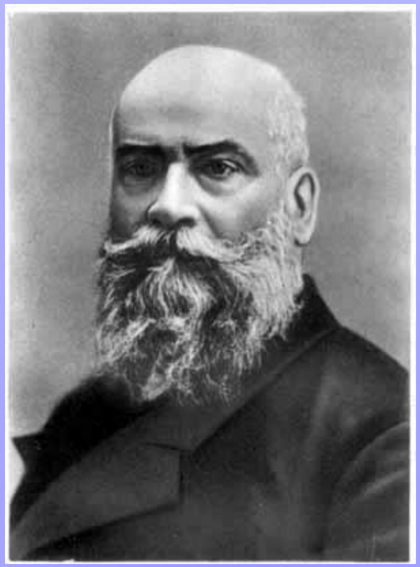
Автор ряда фундаментальных исследований по теории реактивного движения

Внес большой вклад в решение задач механики тел переменной массы



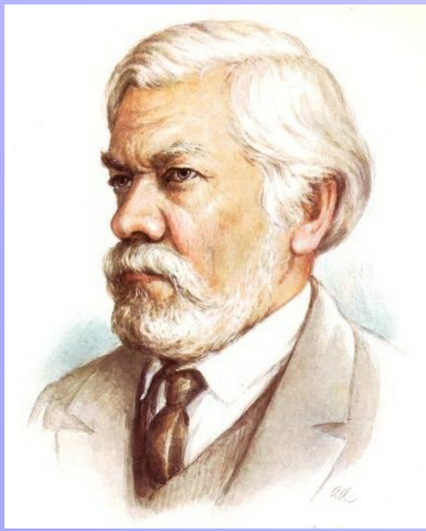
А.Н.Крылов
(1863-1945 гг.)

Разработал теорию корабля и внес большой вклад в развитие теории гироскопа и гироскопических приборов



Н.Е.Жуковский
(1847-1921 гг.)

Заложил основы авиационной науки



С.А.Чаплыгин
(1869-1912 гг.)

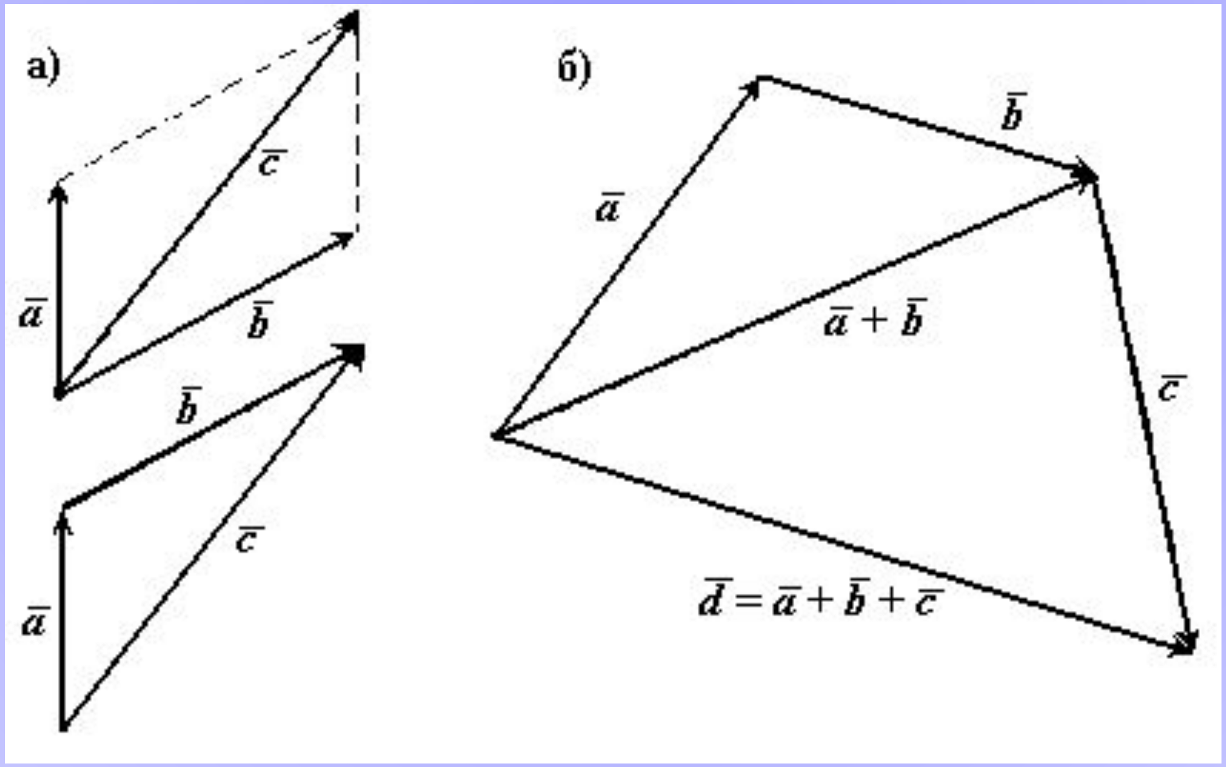
Основоположник газовой динамики

СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Статика – учение о равновесии материальных тел и о приведении системы сил к простейшему виду.

Повторить: - Элементы векторной алгебры: векторы, их сложение, умножение, аналитическая запись этих операций.

- Решение систем линейных алгебраических уравнений.

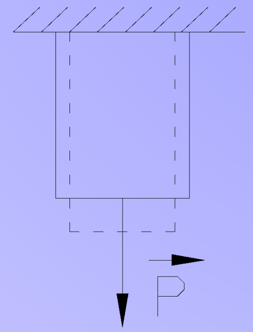


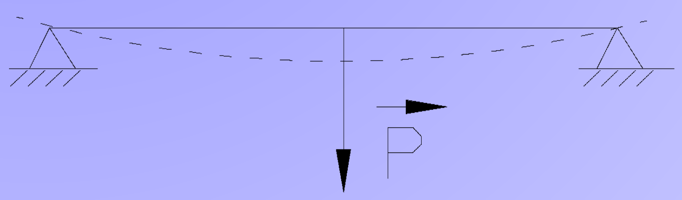
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ. АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГЕ ТЕЛО

Материальная точка – всякая материальная частица или тело, размерами которого по условию задачи можно пренебречь. Вся масса частицы или тела сосредоточена в этой точке. Всякое *физическое тело* – система материальных точек.

Абсолютно твердое тело (жесткое) – это тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда и при всех условиях остается постоянным.

В теоретической механике все тела принято считать абсолютно твердыми. Примеры деформации тел:





Сила – векторная величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел.

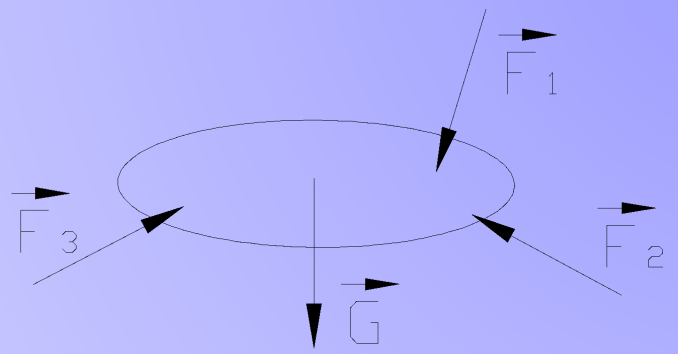
Действие силы на тело определяется:

1) численной величиной или модулем силы,
2) направлением силы,
3) точкой приложения силы,
4) линией действия силы.

Основные единицы измерения силы:

1 ньютон (**1 Н**) или 1 килограмм (**1 кГ**). 1кГ = 9,81Н; 1 Н = 0.102 кГ.

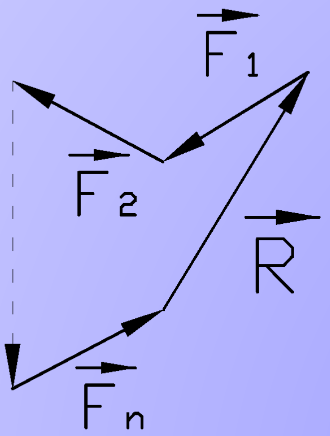
Система сил – совокупность сил, приложенных к данному телу.

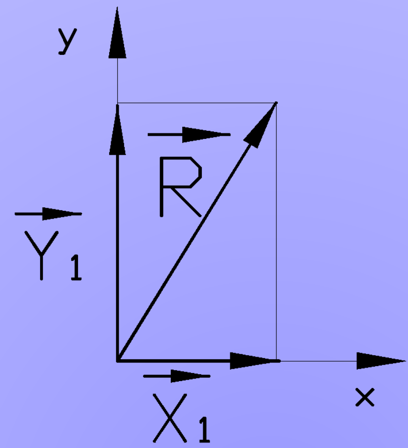


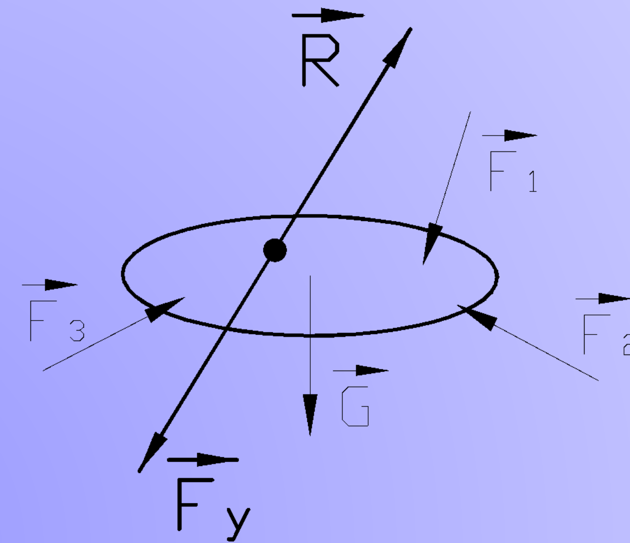
Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в равновесии, называется *уравновешенной.*

Равнодействующая – это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело.

Замена системы сил их равнодействующей R называется **сложением сил**. Обратный процесс называется **разложением силы R** на ее составляющие.







Уравновешивающая сила – это сила, равная по модулю равнодействующей силе, противоположная ей по направлению и действующая по той же линии действия.

$$\{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots \overrightarrow{F_n}\} \sim \overrightarrow{R}$$

Силы, действующие на тело можно разделить на **внешние** и **внутренние**.

Внешние силы – приложены к точкам твердого тела со стороны других тел.

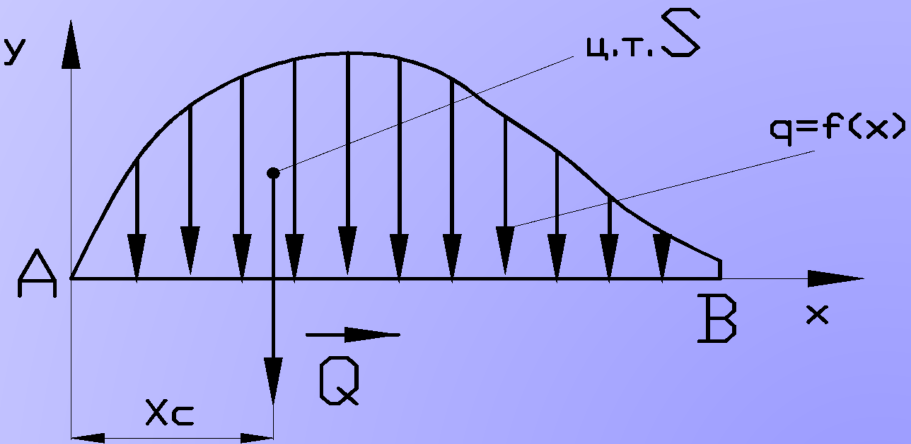
Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками данного тела.

Внутренние силы, действующие в данном абсолютно твердом теле, образуют уравновешенную систему сил и на условия равновесия тела не влияют.

Сосредоточенной силой называется сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке.

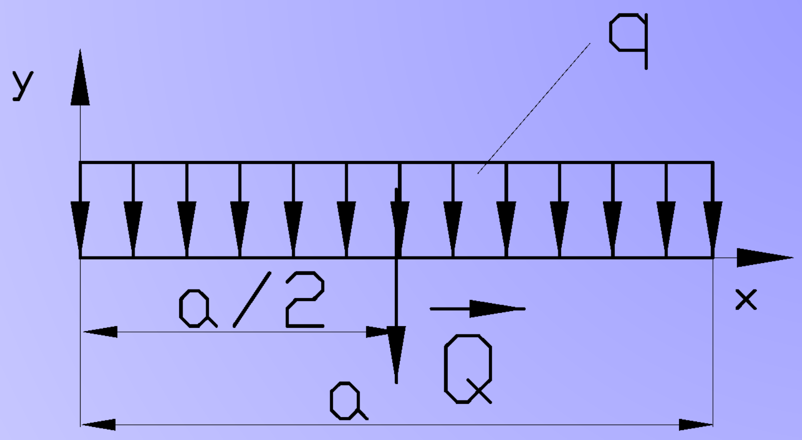
Распределенными называются силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности.

Плоская система распределенных сил характеризуется интенсивностью **q** [Н/м] или [кГ/м] и может быть заменена равнодействующей силой **Q**, которая будет проходить через центр тяжести **S**.



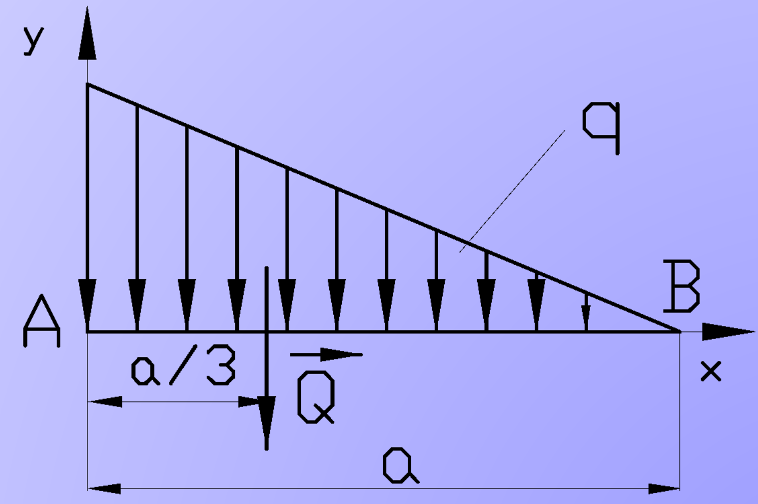
Если q изменяется по произвольному закону q = f(x)

$$Q = \int_0^a f(x)dx \qquad X_C = \frac{\int_0^a x \cdot f(x)dx}{\int_0^a f(x)dx}$$

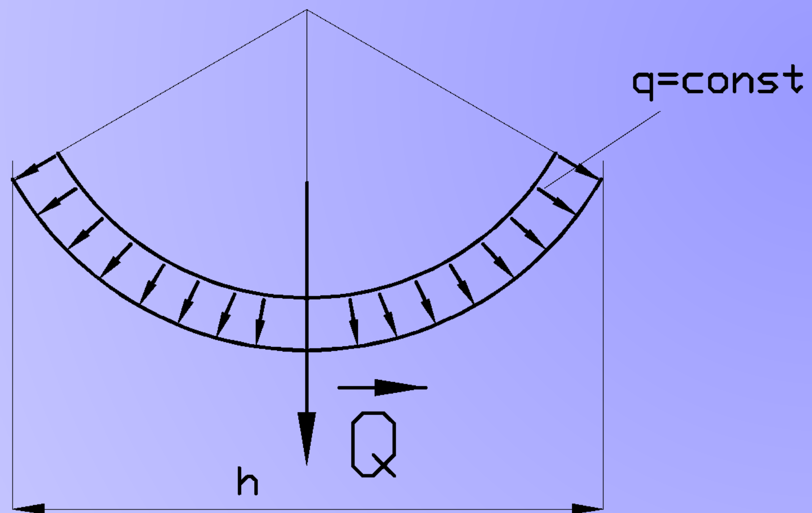


Если q = const., то

Q = aq;   Xc = a/2.

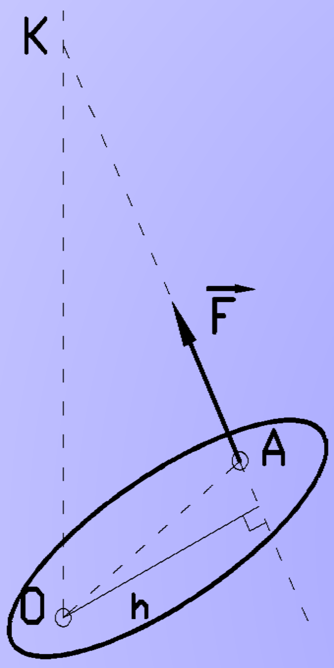


Если q – изменяется по линейному закону q = kx, то Q = ½ aq;   Xc = a/3.



Если Q равномерно распределена по дуге окружности, то доказано, что сосредоточенная нагрузка Q = qh   (h – хорда дуги АВ) и проходит по оси симметрии дуги.

Момент силы относительно центра (или точки)



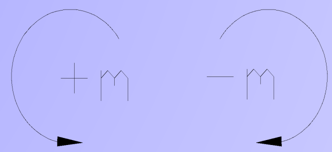
Моментом силы F относительно центра *O* называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведения модуля силы *F* на длину плеча *h*:

$$m_O(\overrightarrow{F}) = \pm F \cdot h$$

Размерность момента: [Н м] или [кГ м].

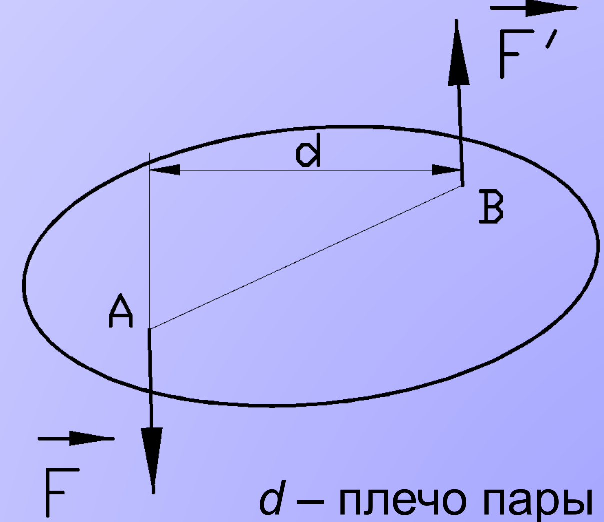
Плечо силы F относительно центра O – это кратчайшее расстояние от центра *O* до линии действия силы (перпендикуляр *h*, опущенный из центра *O* на линию действия силы).

В дальнейшем будем считать, что момент имеет знак «+», если сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, и знак «-», если по ходу часовой стрелки



Свойства момента силы:

1) момент не меняется при переносе силы *F* вдоль линии действия;
2) момент равен нулю только если *F* = 0 или *h* = 0.



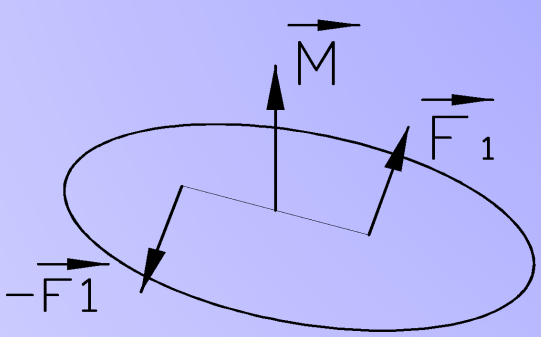
d – плечо пары

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело. Эта система сил не находится в равновесии и не имеет равнодействующей.

Моментом пары называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо:

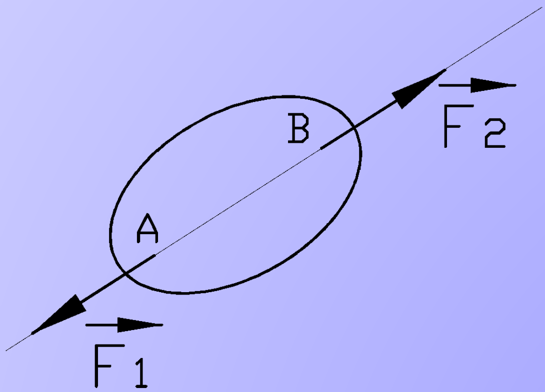
$$m = \pm F \cdot d$$

Теорема: Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра лежащего в плоскости ее действия не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары.



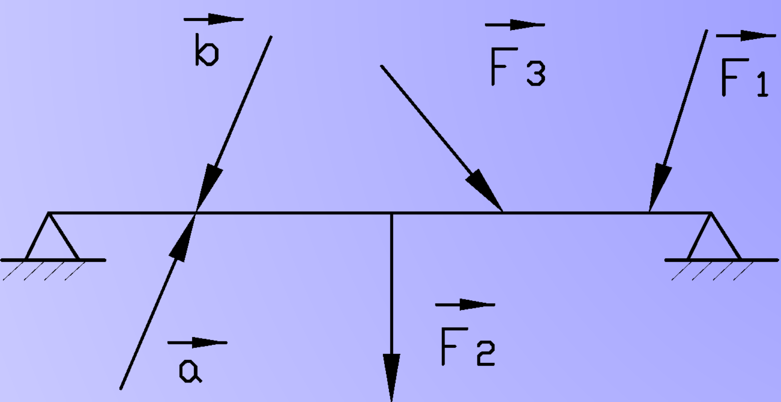
! Момент является величиной векторной, причем вектор момента перпендикулярен плоскости, в которой расположена пара сил, и направлен так, что если смотреть с вершины вектора момента, то направление момента в плоскости пары должно быть против часовой стрелки.

АКСИОМЫ СТАТИКИ

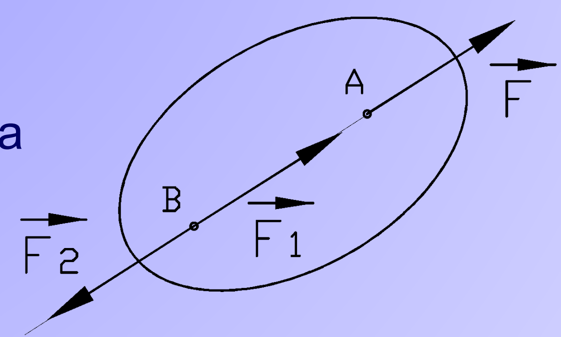


Аксиома 1. Для равновесия двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей их точки приложения.

Следствие: Если система сил имеет равнодействующую, то уравновешивающая сила и равнодействующая равны по модулю, лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны.

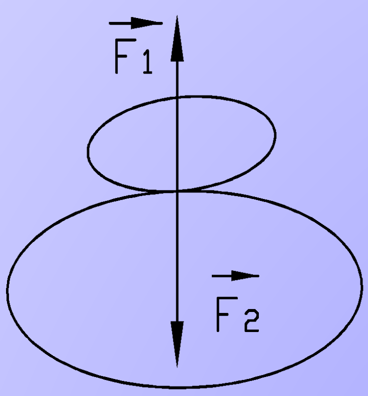


Аксиома 2. Не изменяя действия данной системы сил на абсолютно твердое тело, можно прибавить к этой системе сил или отнять от нее любую уравновешенную систему сил.



Следствие: Не изменяя действия данной системы сил на абсолютно твердое тело, точку приложения этой силы можно переносить по ее линии действия.

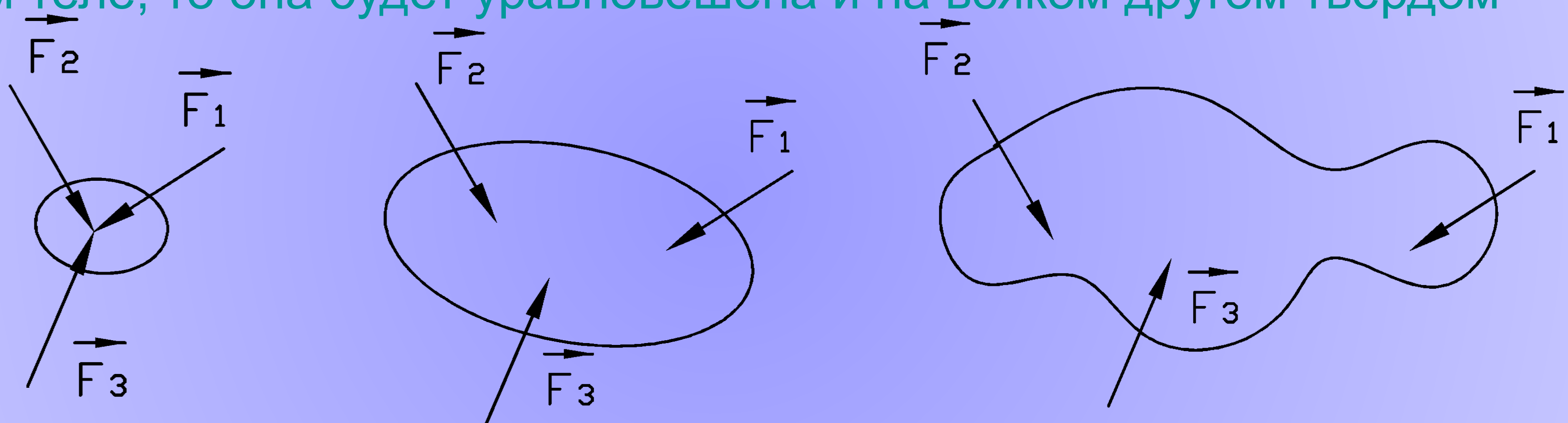
$$\vec{F} = \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



Аксиома 3. Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

! ***F1*** *и* ***F2*** не являются уравновешенной системой сил, т.к. они приложены к разным телам.

Аксиома 4. Если данная система сил уравновешена на некотором твердом теле, то она будет уравновешена и на всяком другом твердом теле.



Аксиома 5. Если деформируемое тело находится в равновесии, то при затвердевании тела равновесие его не нарушается.

Прежде чем перейти к аксиоме 6 рассмотрим несколько новых понятий:

Тело называют *свободным*, если оно может двигаться в любом направлении. Тело называют *несвободным*, если оно может перемещаться только в определенных направлениях, или не может перемещаться совсем.

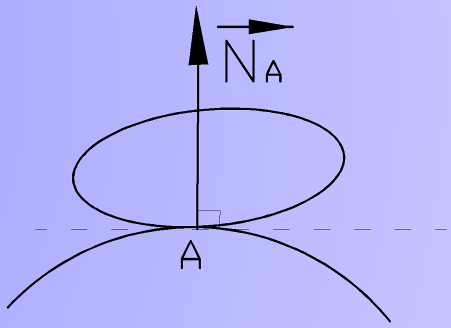
Материальные тела, препятствующие перемещению несвободных тел, называют <u>*связи*</u>, а силы, с которыми эти тела действуют на рассматриваемое тело – <u>*реакции связи*</u>. Как правило, направление реакции связи противоположно тому направлению, по которому связь препятствует движению данного тела.

<u>Аксиома связей</u> *(принцип освобождения от связей).* Всякое несвободное тело можно освободить от связей, заменив их реакциями, после чего можно рассматривать тело как свободное, находящееся под действием заданных сил и реакций связей.

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ СВЯЗЕЙ

1. Соприкосновение тел.

1.1. Тело опирается на гладкую поверхность в точке А.

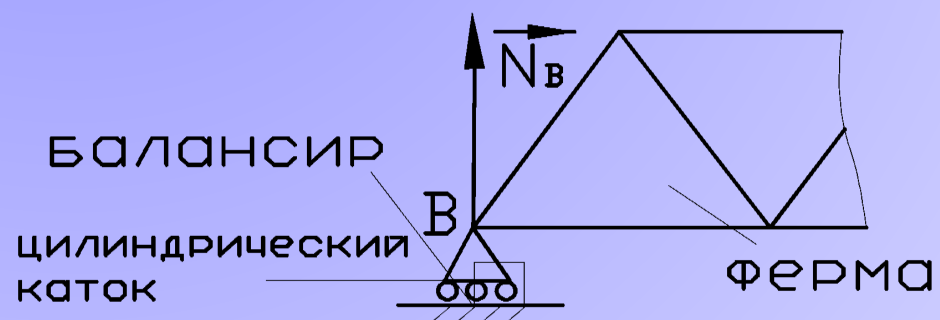


Реакции направлены по нормали к опорной поверхности

$\vec{N}$ - нормальная реакция

1.2. Подвижный каток (шарнир).

$\vec{N}_B$ направлена по нормали к опорной поверхности.

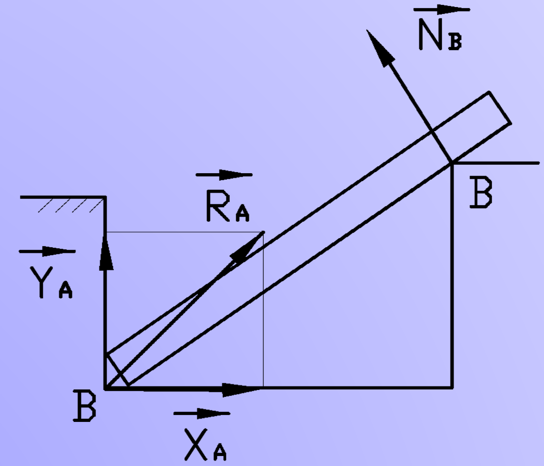


1.3. Тело опирается на двугранный угол

Реакция стенки Ra состоит из 2-х составляющих

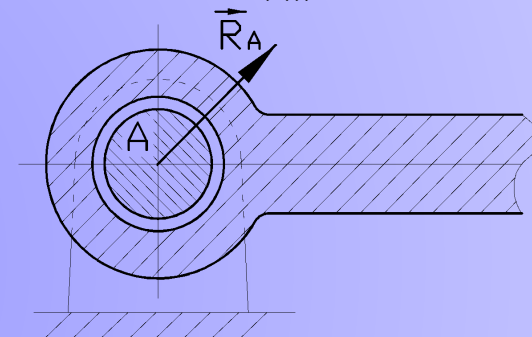
$$\overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{X_A} + \overrightarrow{Y_A}$$

$\overrightarrow{X_A}$ и $\overrightarrow{Y_A}$ перпендикулярны опорным поверхностям



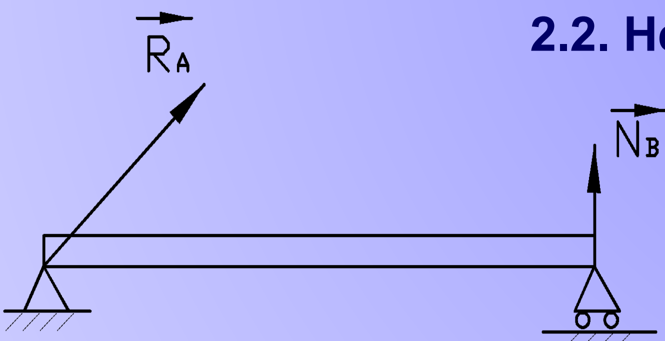
2. Шарнирное соединение тел

2.1. Цилиндрический шарнир



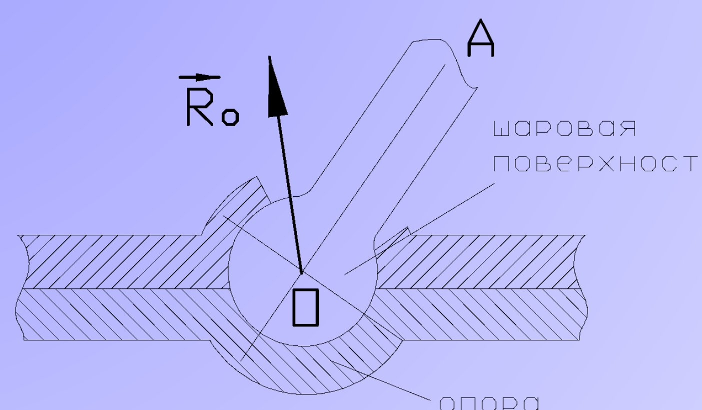
Ось *A* может быть неподвижна и подвижна.
Стержень *AB* может вращаться вокруг оси *A.*

$\overrightarrow{R_A}$ проходит через центр оси А и лежит в плоскости перпендикулярной оси.



2.2. Неподвижная шарнирная опора

$\overrightarrow{R_A}$ проходит через ось шарнира *A.*

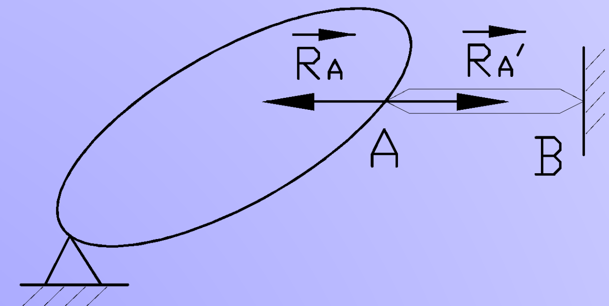


2.3. Сферический шарнир

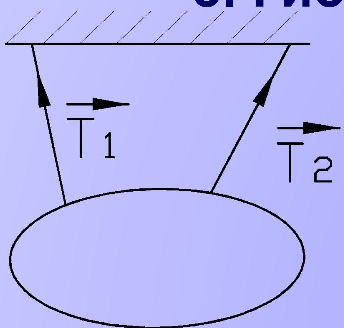
$\overrightarrow{R_O}$ проходит через центр шарнира О

2.4. Невесомый стержень, шарнирно закрепленный на концах

$\overrightarrow{R_A}$ направлена по оси стержня (по прямой, соединяющей точки *A* и *B*).



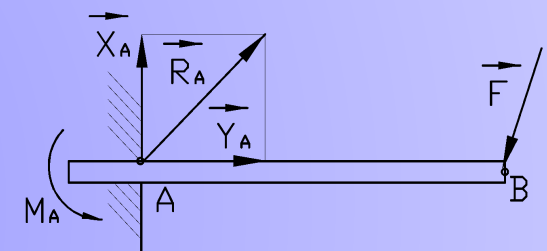
3. Гибкая связь (нить, канат, цепь)



$\overrightarrow{T}$ – натяжение нити приложена в точке присоединения нити к телу и направлена вдоль нити.

4. Жесткая заделка

Если на балку действуют заданные силы, то в заделке появляются две реакции: сила $\overrightarrow{R_A}$ и момент *Ma.*

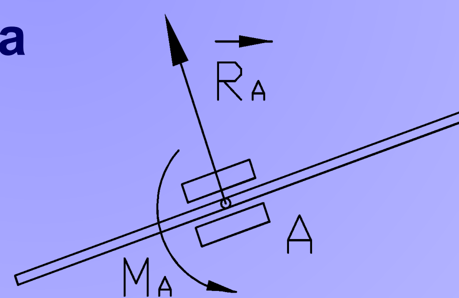


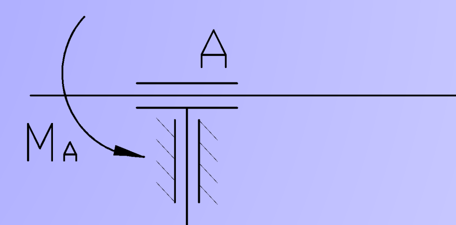
5. Скользящая опора

5.1. Простая скользящая опора

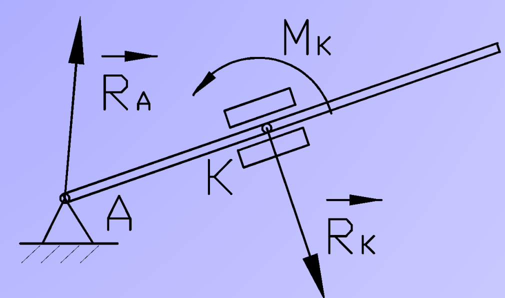
Возникают реакции $\overrightarrow{R_A}$ и *Ma.*

$\overrightarrow{R_A}$ перпендикулярна опоре.





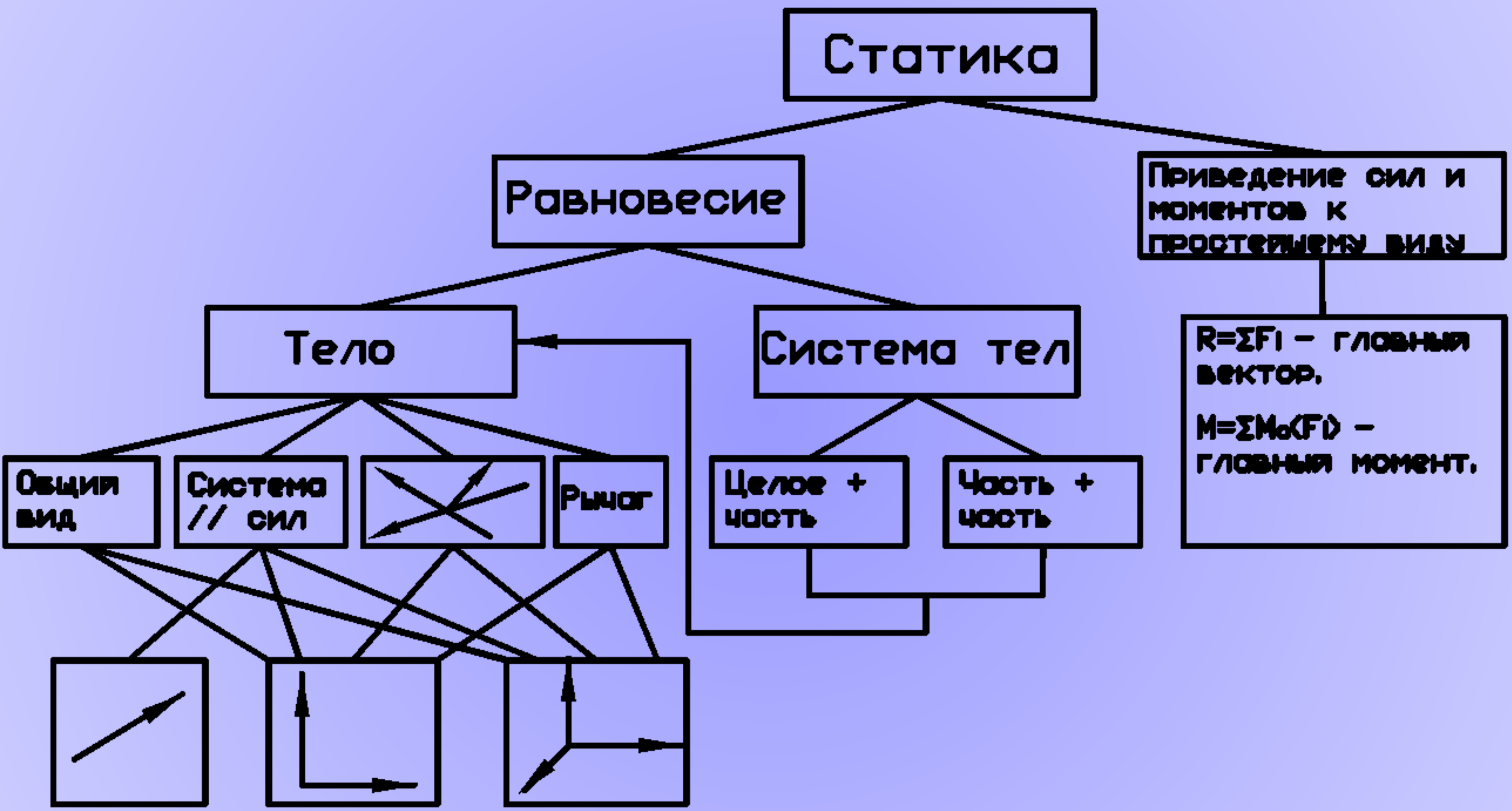
5.2. Скользящий шарнир



К – кулисный камень, *АК* - кулиса

Существуют также **комбинированные связи**.

ОБЩАЯ СТРУКТУРА СТАТИКИ



УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ Mo = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Аналитические (координатные) условия равновесия (1) можно получить в 3-х разных скалярных формах:

1) Основная форма.

Из (1) непосредственно следует:

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{iX}} = 0 \\ \sum \overrightarrow{F_{iY}} = 0 \\ \sum m_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

2) Вторая форма условий равновесия:

$$\begin{cases} \sum m_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum m_B(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum \overrightarrow{F_{iY}} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Причём ***AB*** не перпендикулярно ***Ox***, ***A*** и ***B*** – любые две не совпадающие точки на теле.

3) Третья форма условий равновесия:

$$\begin{cases} \sum m_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum m_B(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum m_C(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

точки ***A***, ***B***, ***C*** не лежат на одной прямой.

! Если на тело действует еще и система пар сил с моментами $m_1, m_2 \dots m_n$, то в условиях (2), (3), (4) выражения для моментов примут вид:

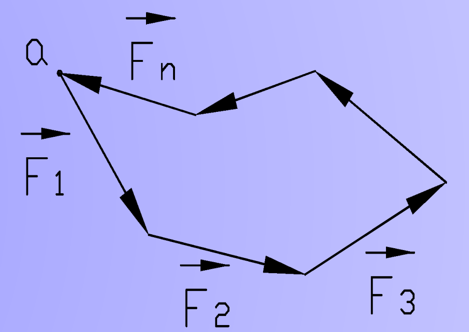
$$\sum m_O(\vec{F}_i) + \sum m_j = 0$$

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ (ССС)

Сходящейся называется система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке. В системе сходящихся сил не составляют уравнения моментов, так как плечи этих сил равны 0.

Условия равновесия: *1) В геометрической форме:*

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n\} \sim \vec{0}$$



2) В векторной форме: $\sum \vec{F}_i = 0$

3) В координатной (аналитической) форме: $F_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$

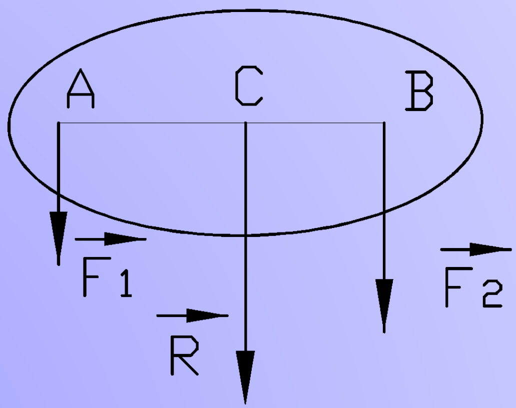
$$\begin{cases} \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \\ \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} \\ \sum F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} \end{cases}$$

СИСИТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

1. Сложение 2-х параллельных сил:

А) Силы направлены в одну сторону.

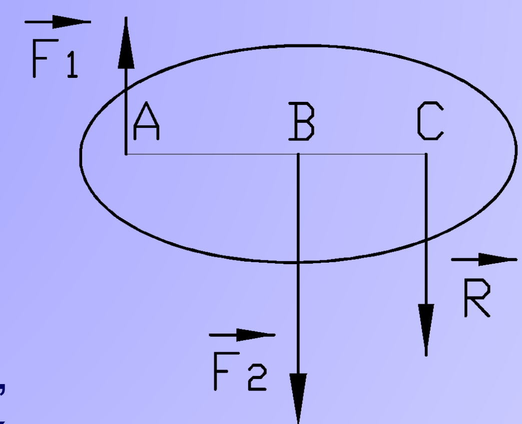
Равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону, а её линия действия проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.



$$\frac{AC}{F_2}=\frac{BC}{F_1}=\frac{AB}{R} \qquad (5)$$

В) Силы направлены в разные стороны.

Равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в разные стороны, равна по модулю разности модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил, на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.

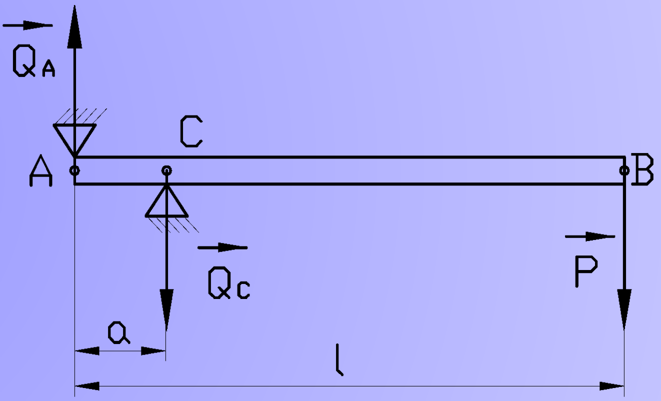


$$\frac{AC}{F_2}=\frac{BC}{F_1}=\frac{AB}{R} \qquad (6)$$

2. Разложение силы на две параллельные:

Задача может быть решена, если заданы линии действия сил или модуль и линия действия одной из сил.

Пример: В стену толщиной ***a* = 0,5 м**. заделана балка *AB* длинной ***l* = 2,5 м**. К концу *B* балки подвешен груз ***P* = 3 т**. Пренебрегая весом балки, определить силы давления на стену, считая, что они приложены в точке *A* и *C*.



Решение: Силы $\overrightarrow{Q_A}$ и $\overrightarrow{Q_C}$ направлены в разные стороны, т.к. $\vec{P}$ не лежит между ними.

Т.к. $\sum \overrightarrow{F_{iX}} = 0$ то $\vec{P} = \overrightarrow{Q_C} - \overrightarrow{Q_A}$

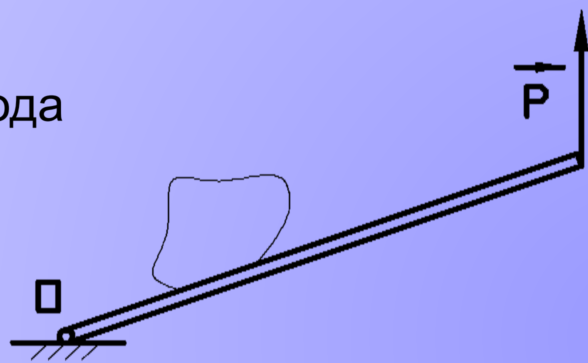
Из формулы (6) $\dfrac{l}{Q_C} = \dfrac{a}{P}$ отсюда:

$$Q_C = \frac{l}{a} \cdot P = \frac{2.5}{0.5} \cdot 3 = 15m. \qquad \overrightarrow{Q_A} = 12m.$$

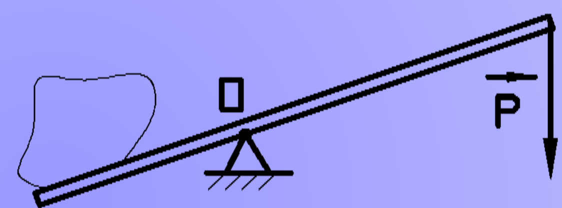
УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ РЫЧАГА

Рычагом называется твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси *O* под действием системы сил, расположенных в плоскости *Oxy*, перпендикулярной оси вращения.

Рычаг 1 рода

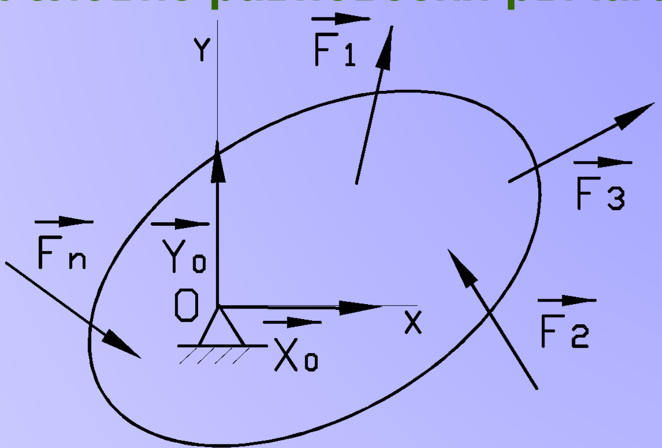


Рычаг 2 рода



Условие равновесия рычага (из системы 2):

$$\sum m_O(\vec{F_i}) = 0$$



Система уравнений для нахождения опорных реакций:

$$\begin{cases} X_O = -\sum F_{ix} \\ Y_O = -\sum F_{iy} \end{cases}$$

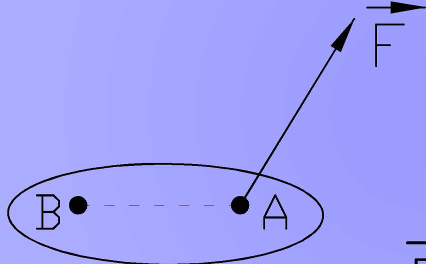
УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

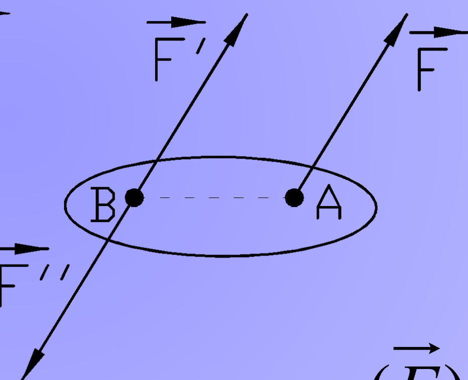
$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{iX}} = 0 \\ \sum \overrightarrow{F_{iY}} = 0 \\ \sum \overrightarrow{F_{iZ}} = 0 \\ \sum m_{OX}(\overrightarrow{F}_i) = 0 \\ \sum m_{OY}(\overrightarrow{F}_i) = 0 \\ \sum m_{OZ}(\overrightarrow{F}_i) = 0 \end{cases}$$

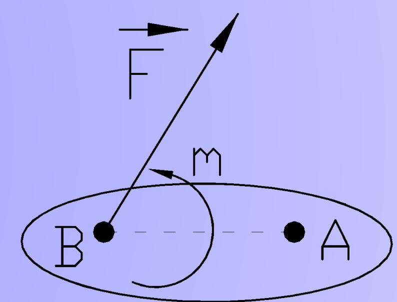
ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ

Теорема 1. Силу, приложенную к твердому телу, можно не изменяя оказываемого действия, переносить параллельно ей самой в любую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.

$$\overrightarrow{F'} // \overrightarrow{F''} // \overrightarrow{F}$$







$$\left|\overrightarrow{F'}\right| = \left|\overrightarrow{F''}\right| = \left|\overrightarrow{F}\right|$$

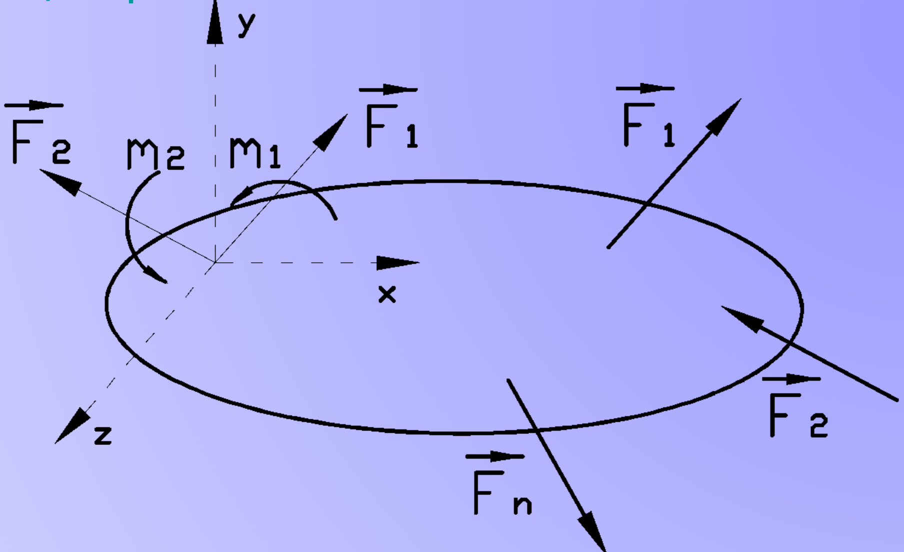
$$m = m_B(\overrightarrow{F})$$

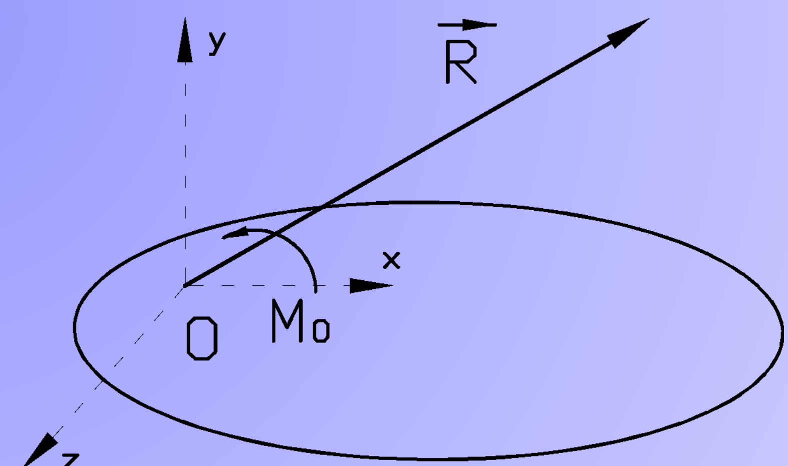
$$\left\{\overrightarrow{F}\right\} \to \left\{\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}, \overrightarrow{F''}\right\} \to \left\{\overrightarrow{F}, m\right\}$$

Величину, равную сумме всех сил системы в центре приведения называют ***главным вектором*** системы сил $\vec{R}$

Величина, равная сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения, называется ***главным моментом*** системы сил относительно центра приведения M_O

Теорема 2. Всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой R, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом Mo, равным главному моменту системы относительно центра O.





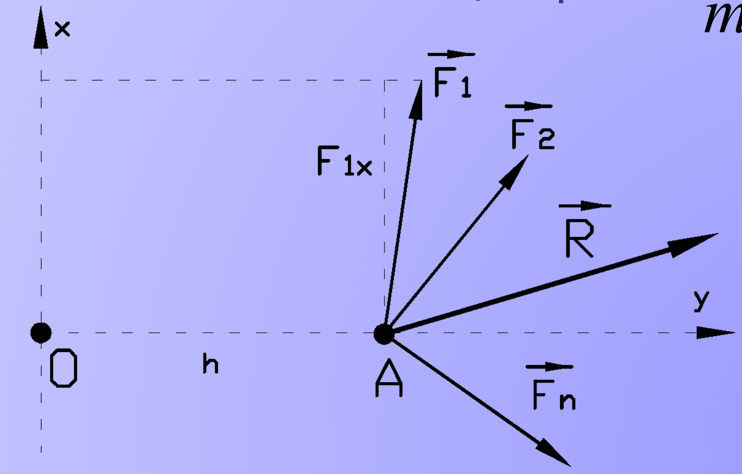
$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i \qquad M_O = \sum m_O(\vec{F}_i)$$

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n\} \sim \{\vec{R}, M_O\}$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.

$$m_O(\vec{R}) = \sum m_O(\vec{F_i})$$



$$\sum m_o(\vec{F_{iy}}) = 0$$

$$m_O(\vec{F_i}) = F_{ix} \cdot h \qquad R_x \cdot h = h \cdot \sum F_{ix}$$

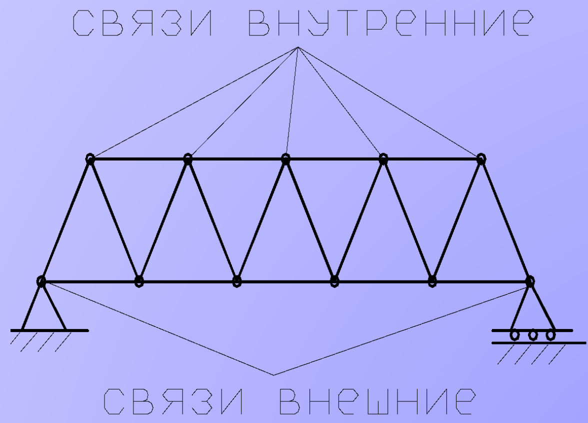
$$m_O(\vec{R}) = \sum m_o(\vec{F_i})$$

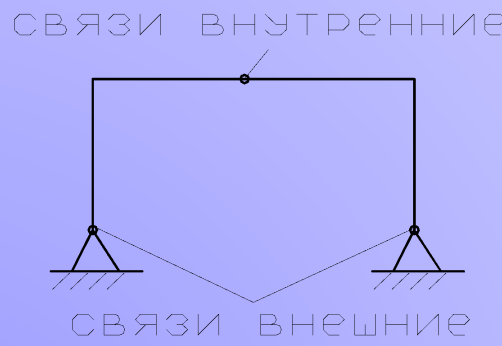
СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Статически определённой задачей называется задача, для которой число неизвестных реакций связей не превышает числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции. Системы тел, для которых это имеет место, называют *статически определимыми системами.*

Статически неопределенная задача - задача, в которой число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции. Системы тел, для которых это имеет место, называют *статически неопределимыми системами*.

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

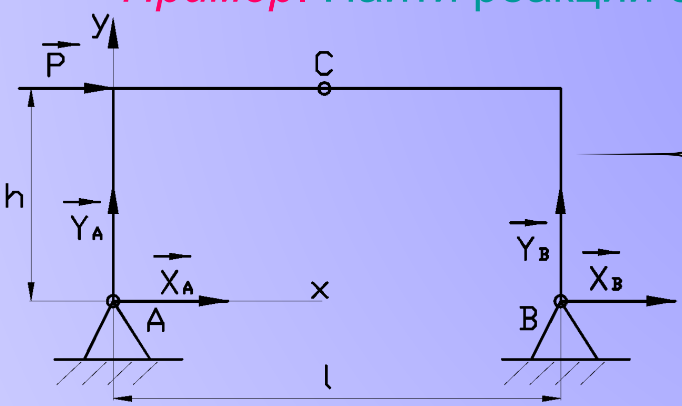




Связи внутренние соединяют части данной конструкции.

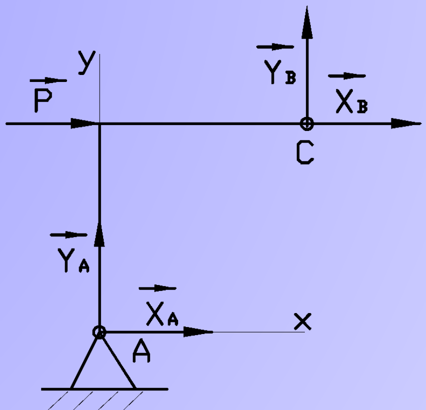
Связи внешние соединяют конструкцию с телами, в неё не входящими, в т.ч. с опорами.

Пример. Найти реакции опор трёхшарнирной арки.



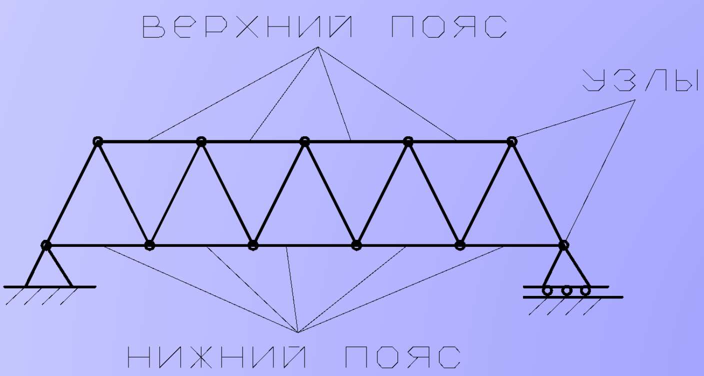
$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{iX}} = X_A + X_B + P = 0 \\ \sum \overrightarrow{F_{iY}} = Y_A + Y_B = 0 \\ \sum m_A(\vec{F}_i) = Y_B \cdot l - P \cdot h = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{iX}} = X_A + X_C + P = 0 \\ \sum \overrightarrow{F_{iY}} = Y_A + Y_C = 0 \\ \sum m_A(\vec{F}_i) = P \cdot h - X_C \cdot h + Y_C \cdot \dfrac{l}{2} = 0 \end{cases}$$



Расчет ферм

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединённых на концах шарнирами.



В жёстких плоских фермах (без лишних стержней) число стержней ***к*** и число узлов ***n*** связанны соотношением:

$$k = 2n - 3$$

Если стержней меньше – ферма не жёсткая.
Если стержней больше – ферма статически неопределима.

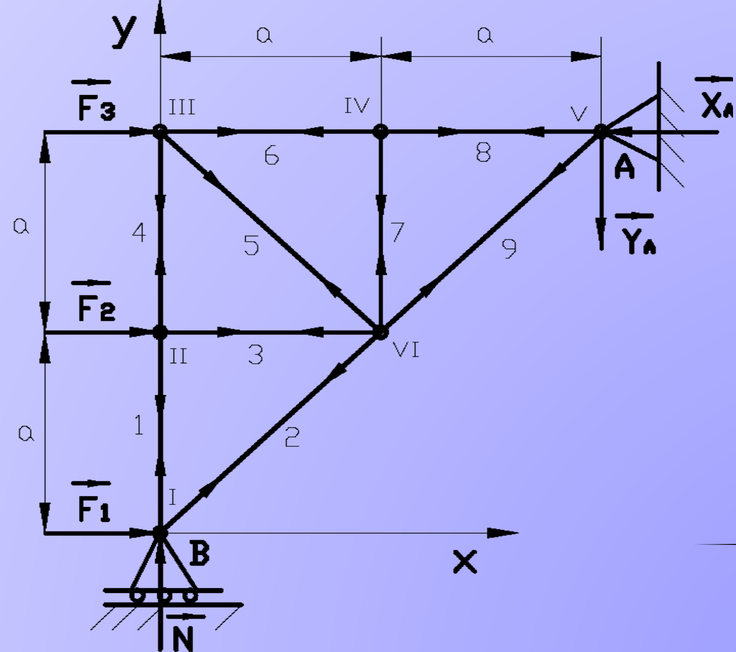
Расчёт ферм сводится к определению:
- реакций опор,
- усилий в стержнях.

Методы определения усилий в стержнях

Метод вырезания узлов: ***Суть метода*** – рассмотрение условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы.

Пример: На ферму (см. рис.) действуют силы параллельные *Ox* и равные

$$F_1 = F_2 = F_3 = F = 2m$$



1) Проверка статической определимости:

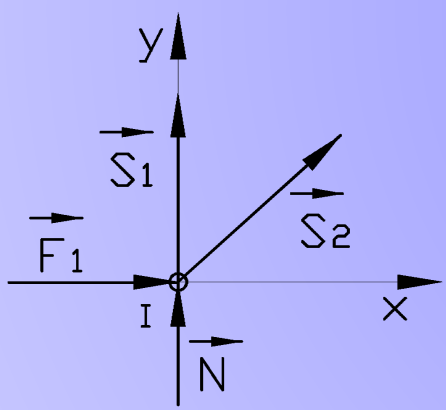
узлов – *n = 6*; стержней – *k = 9*.

$$k = 2\cdot n - 3 = 2\cdot 6 - 3 = 9$$

2) Найдем реакции опор:

$$\begin{cases}\sum F_X = F_1 + F_2 + F_3 - X_A = 0\\ \sum F_Y = N - Y_A = 0\\ \sum m_A(\vec{F}) = F_2\cdot a + F_1\cdot 2a - N\cdot 2a = 0\end{cases}$$

3) Определим усилие в стержнях:

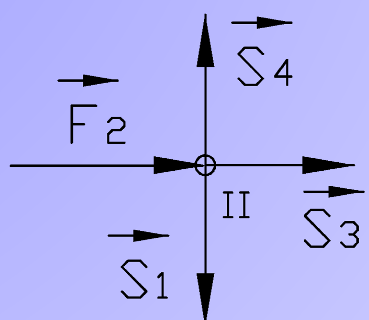


Для узла 1 составим уравнения равновесия.

$$\begin{cases}\sum F_{Xi} = F_1 + S_2\cdot\cos 45^\circ = 0\\ \sum F_{Yi} = N + S_1 + S_2\cdot\sin 45^\circ = 0\end{cases}$$

Рассмотрим равновесие узла *2.*

$$\begin{cases}\sum F_{Xi} = F_2 + S_3 = 0\\ \sum F_{Yi} = S_4 - S_1 = 0\end{cases}$$

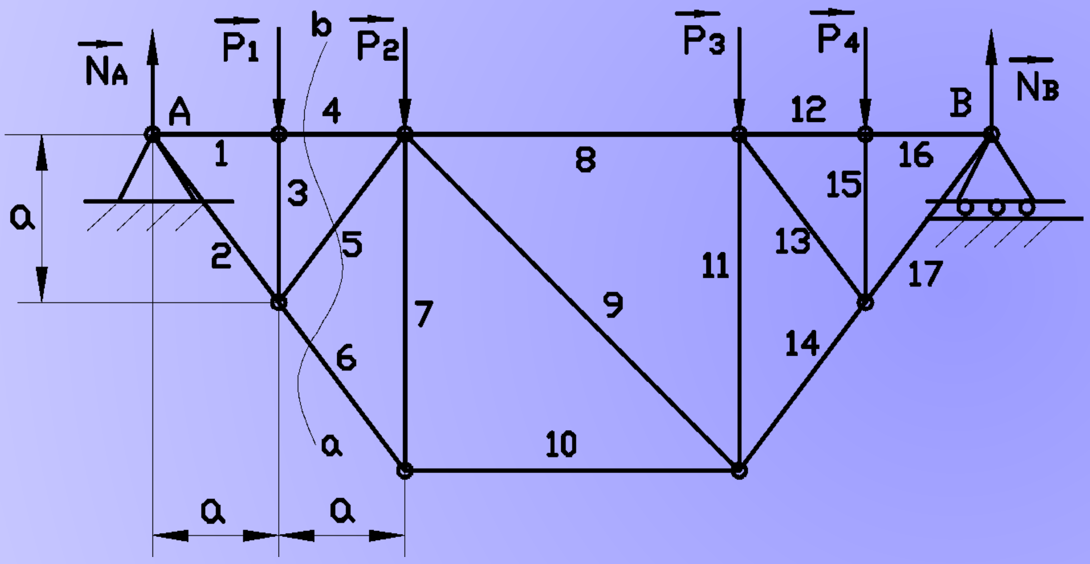


Продолжим расчёт, пока не найдём все усилия в стержнях.

Метод Риттера (метод сечений).

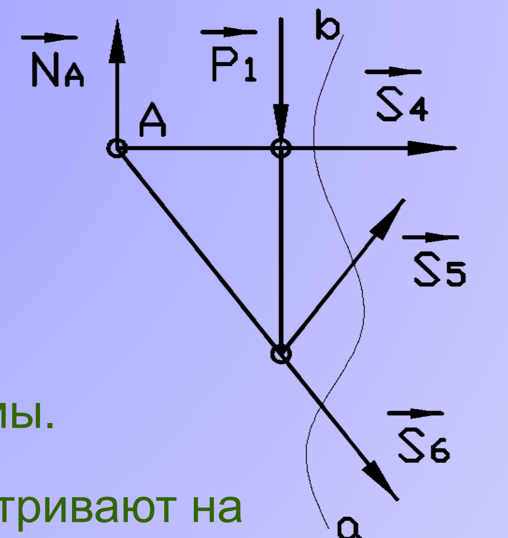
Суть метода – ферму делят на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых надо определить усилие, и рассматривается равновесие одной из этих частей.

Пример: Определить усилие в стержне 6 фермы.



Пункты 1) и 2) – аналогичные методу вырезания узлов

3) Проведем сечение *а-в* через стержни 4, 5 и 6 и рассмотрим равновесие левой части.



$$\sum m_C(\vec{F}_i) = P_1 \cdot a - N_A \cdot 2a + S_6 \cdot CK = 0$$

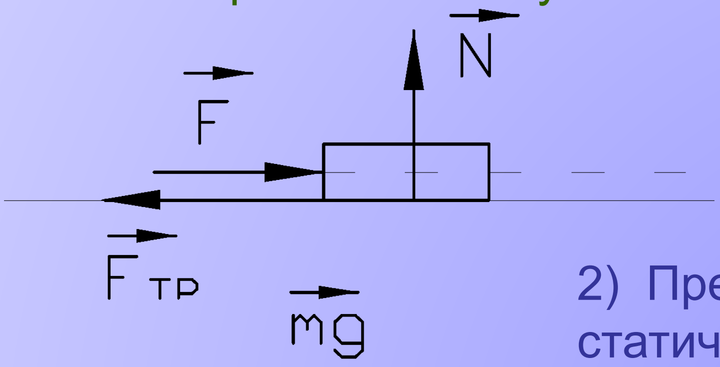
Аналогично найдём и другие усилия в стержнях фермы.

Метод диаграмм (Максвела-Кремоне) подробно рассматривают на строительных специальностях.

ТРЕНИЕ

Трение скольжения. Угол трения.

Экспериментально установлены следующие законы трения скольжения:



1) При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает *сила трения*, направленная в противоположную сторону.

2) Предельная сила трения равна произведению статического коэффициента трения ***fo*** на нормальное давление (нормальную реакцию):

$$F_{тр.пр} = f_0 \cdot N$$

fo – определяется опытным путем:

Дерево по дереву fo = 0.4 – 0.7; (дуб по дубу fo = 0.54 – 0.62)

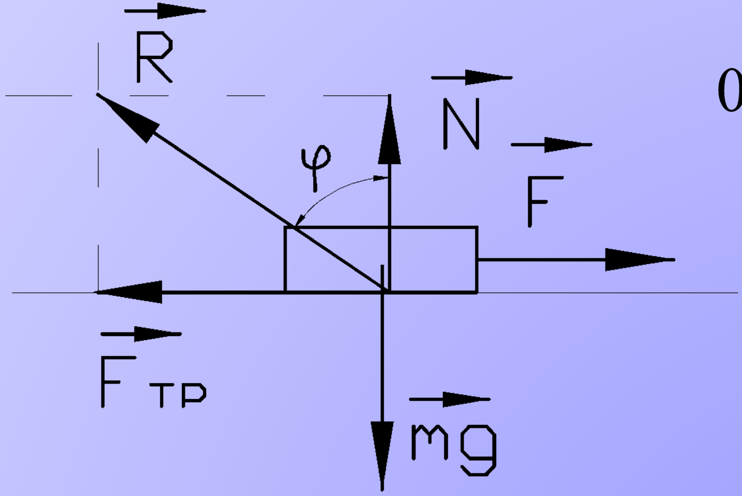
Металл по металлу fo = 0.15 – 0.25; (сталь по стали – 0.15)

3) При равновесии сила трения покоя $F_{тр.} \leq F_{тр.пр}$

4) Величина *Fтр.пр*. в широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

При движении тела *Fтр*. зависит от динамического коэффициента трения f, который, как правило, зависит от скорости движения тела и определяется опытным путем.

С учетом трения реакция связи получает вторую составляющую Fтр., которая отклоняет полную реакцию связи от нормали к поверхности на некоторый угол φ



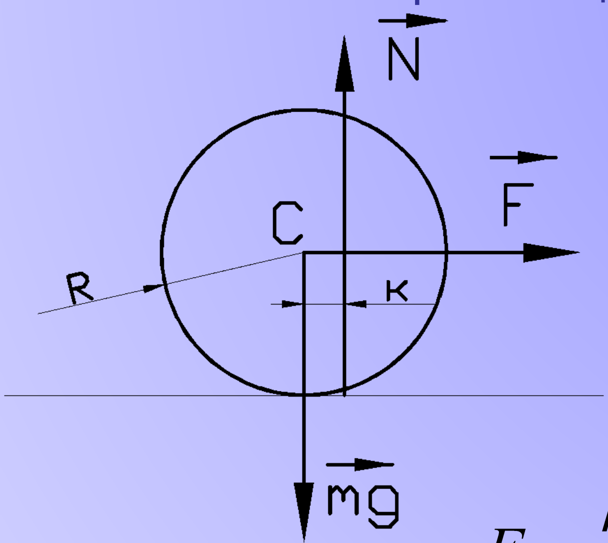
$0 \le \varphi \le \varphi_0$ - предельное значение (угол трения)

$$tg\varphi_0 = \frac{F_{mp}}{N} \quad \text{или} \quad tg\varphi_0 = f_0$$

Обычно рассматривается предельное положение равновесия, когда сила трения достигает наибольшего значения ***Fmp.пр***. и она рассматривается как внешняя сила.

1.12.2 Трение качения

Трение качения - особый вид сопротивления, возникающий, когда одно из тел катится по поверхности другого тела без проскальзывания.



$$F = \frac{k}{R} \cdot N$$

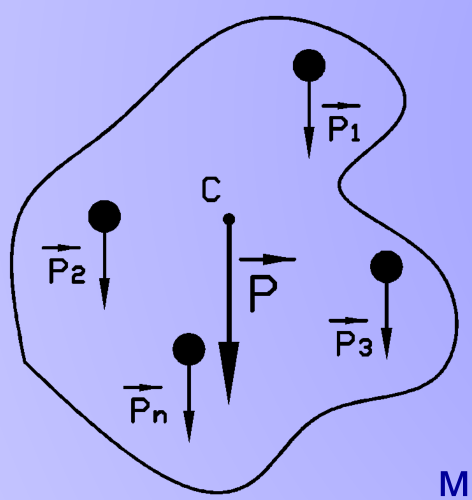
Рассмотрим цилиндрический каток. На него действуют две взаимно уравновешивающие силы: сила тяжести *m**g*** и нормальная реакция плоскости ***N*** = –*m**g***. Если под действием горизонтальной силы ***F***, приложенной к центру катка *С*, он катится по плоскости без скольжения, то силы *m**g*** и ***N*** образуют пару сил, препятствующую качению катка. Плечо пары ***к***, называется коэффициентом трения качения.

1.13 ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Цент тяжести твердого тела

Силой тяжести (силой веса) называют равнодействующую силы притяжения Земли и центробежной силы, возникающей при вращении тела вместе с Землей.

Центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую походит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела в пространстве.



Равнодействующая $P = \sum P_i$

По теореме Вариньона:

$$P \cdot x_C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \ldots + P_n \cdot x_n = \sum P_i \cdot x_i$$

$$\boldsymbol{x_C = \frac{\sum x_i p_i}{P}} \qquad \boldsymbol{y_C = \frac{\sum y_i p_i}{P}} \qquad \boldsymbol{z_C = \frac{\sum z_i p_i}{P}}$$

Вес $\boldsymbol{p_i}$ любой частицы тела пропорционален ее массе

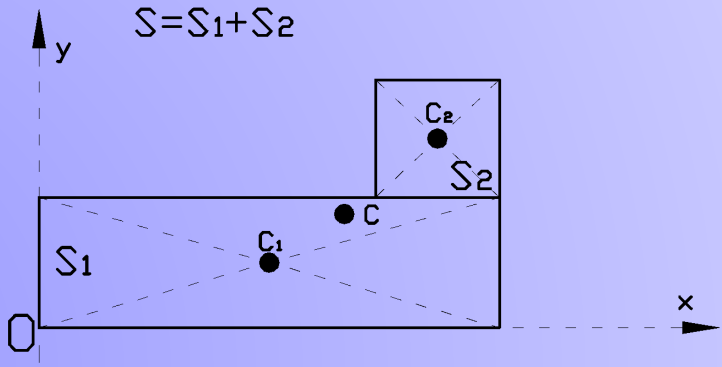
$$x_C = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M} \qquad y_C = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M} \qquad z_C = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{M}$$

Центр тяжести – точка геометрическая, которая может лежать и вне пределов тела (кольцо, уголок, тавр и т.д.).

Способы определения центра тяжести тел

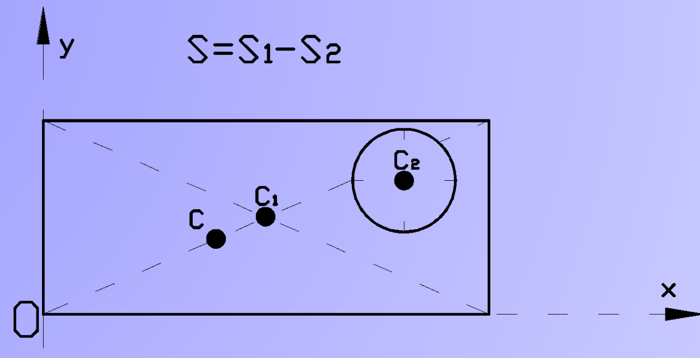
1) Симметрия. Если однородное тело имеет плоскость (ось, центр) симметрии, то ц.т. лежит в плоскости (на оси, в центре) симметрии.

2) Разбиение. Тело разбивается на конечно число частей, ц.т. которых известен. Общий ц.т. находим по формулам:



$$x_C = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2}{S} \qquad y_C = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2}{S}$$

3) Дополнение. Частный случай. Если тело имеет вырезы, то находим ц.т. тела без вырезов и ц.т. вырезанной фигуры.



$$x_C = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2}{S} \qquad y_C = \frac{S_1 \cdot y_1 - S_2 \cdot y_2}{S}$$

4) Интегрирование. Применяется если тело неоднородное.