

Прикладная механика

Теория механизмов и машин
Кинематический анализ
механизмов



Основные задачи кинематического анализа механизмов



- Определение положений звеньев, включая и определение траекторий отдельных точек звеньев
- Определение скоростей и ускорений звеньев и точек звеньев



Кинематический анализ состоит в определении движения звеньев механизма по заданному движению начальных звеньев.

- **Начальное звено** – это звено, которому приписывается одна или несколько обобщенных координат механизма.
- Законы движения начальных звеньев считаются известными. Также задана кинематическая схема механизма со всеми размерами.

Методы кинематического анализа



- Графический
- Графо-аналитический
- Аналитический



Графические методы

- Графические методы основаны на непосредственном построении траекторий движения наиболее характерных точек механизма, графическом дифференцировании графиков перемещений, скоростей.
- В настоящее время графические методы практически не применяются.

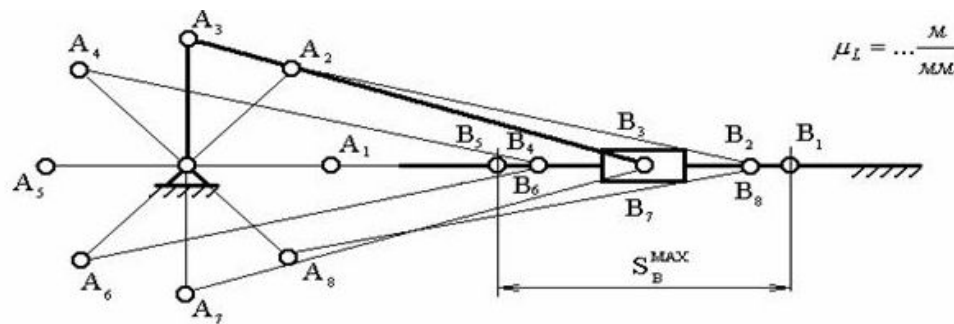


График перемещений точки В

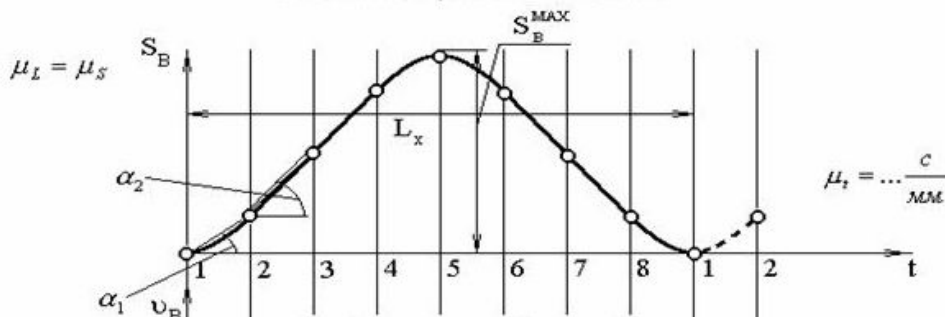


График скоростей точки В

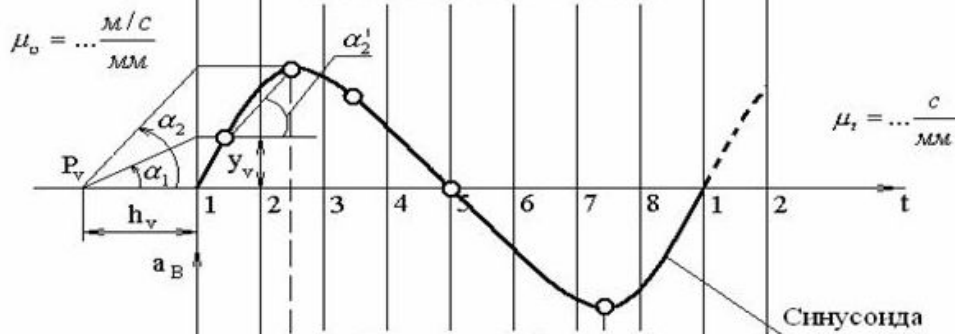


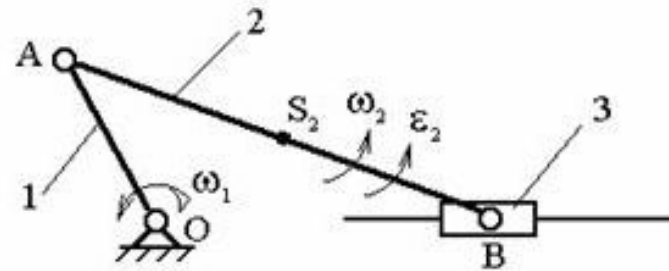
График ускорений точки В



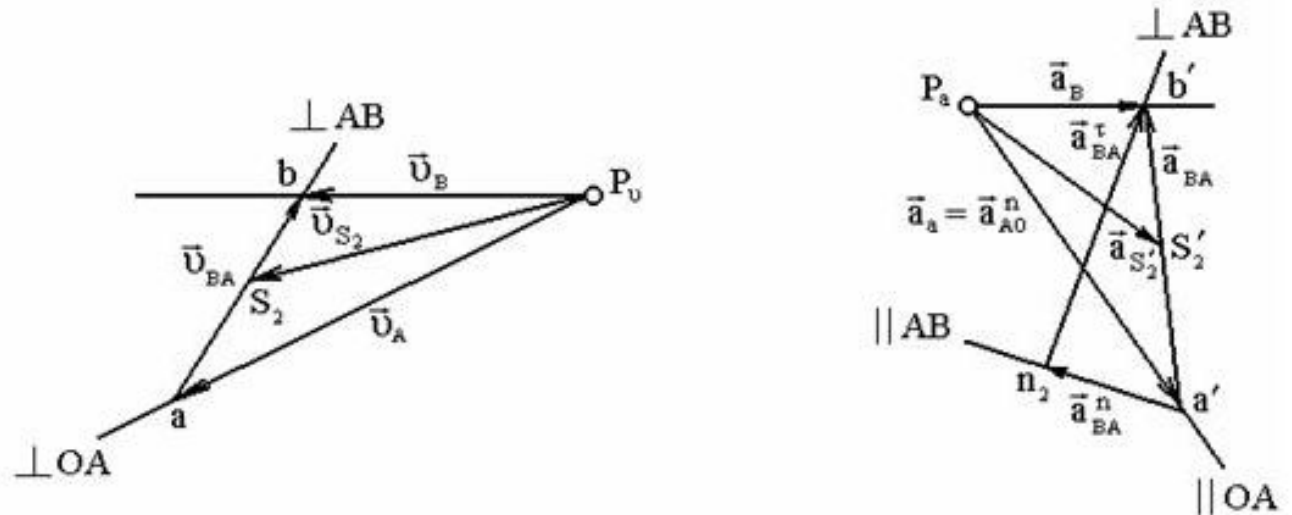


Графоаналитические методы

- К графоаналитическим методам относят методы построения планов скоростей и ускорений точек звеньев



План механизма (в масштабе длин μ_L)



Свойства планов скоростей и ускорений



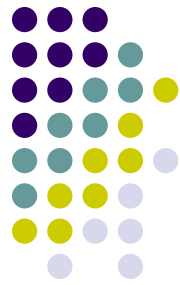
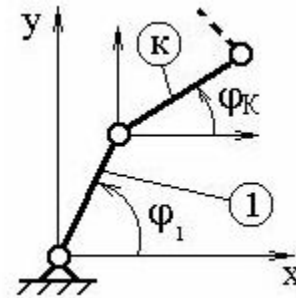
- Планом скоростей (ускорений) механизма называется чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и по направлению скоростям (ускорениям) различных точек механизма в данный момент.
- Сформулируем свойства планов скоростей и ускорений:
- 1) векторы абсолютных скоростей (ускорений) направлены из полюса;
- 2) векторы, соединяющие концы векторов абсолютных скоростей (ускорений), есть векторы относительных скоростей (ускорений);
- 3) точки, у которых скорости (ускорения) равны нулю, расположены в полюсе;
- 4) векторы относительных скоростей (полных относительных ускорений) образуют на плане скоростей (ускорений) фигуру, подобную жесткому контуру на плане механизма;
- 5) планы скоростей и ускорений позволяют определять величину и направление угловых скоростей и ускорений.



Аналитические методы

- Метод преобразования координат (метод Ю.Ф.Морошкина)
- Метод замкнутого векторного контура (метод В.А.Зиновьева)

Понятия и определения



- **Функция положения** - это аналитическая зависимость положения или координаты K -го звена (φ_K , X_K или Y_K) от положения ведущего (входного) звена φ_1 , т.е. $\varphi_K(\varphi_1)$, $X_K(\varphi_1)$ или $Y_K(\varphi_1)$, где φ_K , X_K и Y_K – координаты, определяющие положение K -го звена (ведомого), а угол φ_1 – угол, характеризующий положение ведущего звена

- **Аналог скорости.**

- Угловая скорость K -го звена определяется зависимостью

- $$\omega_K = \frac{d\varphi_K}{dt} = \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} \quad (3)$$

- где $\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}$ – *аналог скорости* K -го звена (первая передаточная функция) для вращающегося звена, величина безразмерная;

- $\frac{dx_K}{d\varphi_1}$ $\frac{dy_K}{d\varphi_1}$ *аналоги скорости* K -го звена, движущегося поступательно,

величины безразмерные.



- **Аналог ускорения.** Угловая скорость K -го звена определяется зависимостью, получаемой дифференцированием уравнения (3) по dt .

$$\varepsilon_K = \frac{d\omega_K}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} + \omega_1 \frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2} \frac{d\varphi_1}{dt} = \varepsilon_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2}$$

- При дифференцировании предполагается, что угловая скорость K -го звена определяется зависимостью

$$\omega_K = \omega_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}$$

- а угол является функцией угла : $\varphi_K = f(\varphi_1)$

- Величина $\frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2}$ – **аналог ускорения K -го звена**, совершающего вращательное движение,

- Величины $\frac{d^2x_K}{d\varphi_1^2}$ и $\frac{d^2y_K}{d\varphi_1^2}$ – аналоги ускорения K -го звена,двигающегося поступательно, в проекциях на оси X и Y .



- Величину $\frac{d\varphi_x}{d\varphi_1}$ называют ещё **передаточным отношением**, так как выражение можно преобразовать, умножив и разделив его на величину dt :

$$\frac{d\varphi_x}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_x dt}{d\varphi_1 dt} = \frac{\omega_x}{\omega_1}$$

- Отношение угловых скоростей в механике называют передаточным отношением . $U_{x-1} = \frac{\omega_x}{\omega_1}$
- Аналог скорости звена также называют **первой передаточной функцией**.



Функции положения	Задача о скоростях	Задача об ускорениях
<p>Определить функции положения:</p> $\varphi_K(\varphi_1)$ $x_K(\varphi_1)$ $y_K(\varphi_1)$	<p>Определение аналогов скоростей</p> $\frac{d\varphi_K}{d\varphi_1}, \frac{dx_K}{d\varphi_1}, \frac{dy_K}{d\varphi_1}$ <p>Вычисление скоростей</p> $\omega_K = \omega_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1},$ $v_{Kx} = \omega_1 \frac{dx_K}{d\varphi_1},$ $v_{Ky} = \omega_1 \frac{dy_K}{d\varphi_1}$	<p>Определение аналогов ускорений</p> $\frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2}, \frac{d^2x_K}{d\varphi_1^2}, \frac{d^2y_K}{d\varphi_1^2}$ <p>Вычисление ускорений</p> $\varepsilon_K = \varepsilon_1 \frac{d\varphi_K}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2\varphi_K}{d\varphi_1^2};$ $a_{Kx} = \varepsilon_1 \frac{dx_K}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2x_K}{d\varphi_1^2};$ $a_{Ky} = \varepsilon_1 \frac{dy_K}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2y_K}{d\varphi_1^2}.$

Метод замкнутых векторных контуров



Используем метод замкнутых векторных контуров (рис. 3.7).

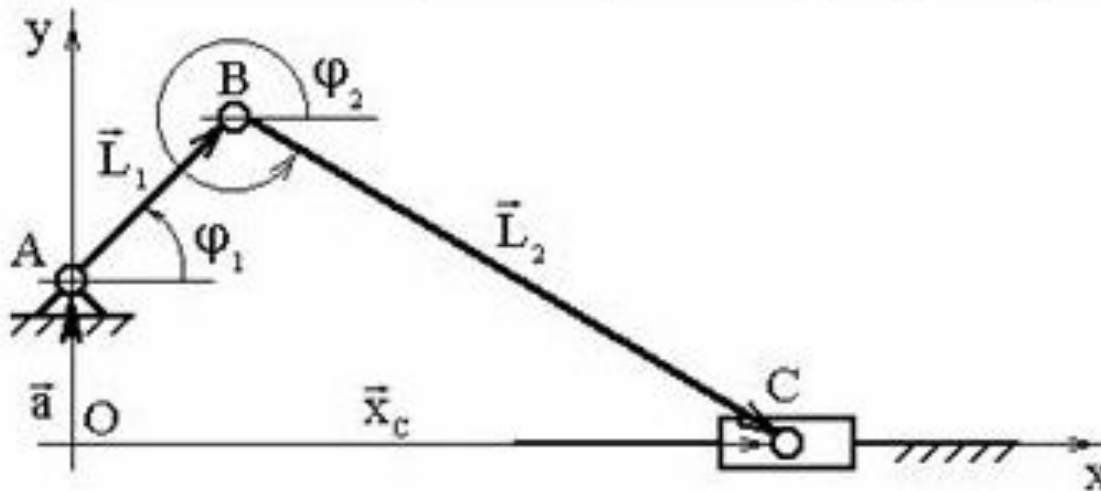


Рис. 3.20. Замкнутый векторный контур кривошипно-ползунного механизма

Рассмотрим замкнутый векторный контур.

Составим векторное уравнение: $\vec{a} + \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{x}_c$

Спроектируем векторное уравнение на оси X и Y

$$\begin{cases} L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2 = x_c; \\ a + L_1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin \varphi_2 = 0. \end{cases}$$



- Решение задачи о положениях

- Определим функции положения ползуна С и шатуна 2.

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2} \quad x_c = L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos(\arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2})$$

- Решение задачи о скоростях

- Определим аналог скорости ползуна и шатуна, для чего продифференцируем зависимости $x_c(\varphi_1)$ и $\varphi_2(\varphi_1)$

$$\frac{dx_c}{d\varphi_1} = -L_1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin(\arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2}) \frac{L_1 \cos \varphi_1}{L_2 \cos(\arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2})}$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{L_1 \cos \varphi_1}{L_2 \cos(\arcsin \frac{a + L_1 \sin \varphi_1}{L_2})}$$

Тогда угловая скорость шатуна $\omega_2 = \omega_1 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$

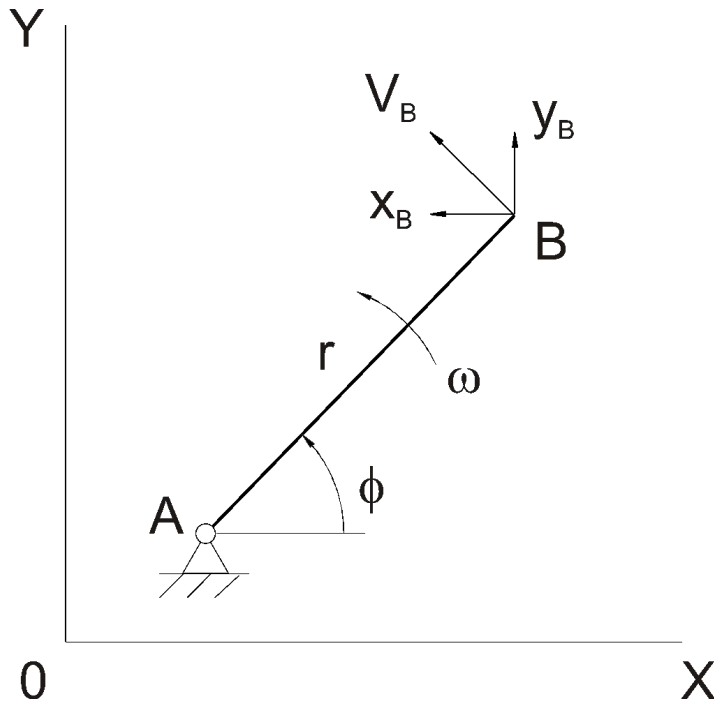
ползуна $v_c = \omega_1 \frac{dx_c}{d\varphi_1}$

Алгоритмический метод векторного анализа



- Кинематический анализ механизма ведется в следующем **порядке**: **сначала исследуется движение начальных звеньев, а затем выполняется кинематический анализ отдельных групп Ассур в порядке их присоединения при образовании механизма.**
- В этом случае в каждой структурной группе будут известны положения, скорости и ускорения тех элементов кинематических пар, к которым присоединяется данная группа.
- Каждому классу групп Ассур соответствует определенный способ кинематического анализа.

Алгоритм анализа механизма 1-го класса



Дано: $\{r, \varphi, \omega, \varepsilon, x_A, y_A\}$

Найти: $\{x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B\}$

$$V_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2}$$

$$a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2}$$

Алгоритм для механизма 1 класса



$$x_B = x_A + r \cdot \cos \varphi$$

$$y_B = y_A + r \cdot \sin \varphi$$

$$\dot{x}_B = -r \cdot \omega \cdot \sin \varphi$$

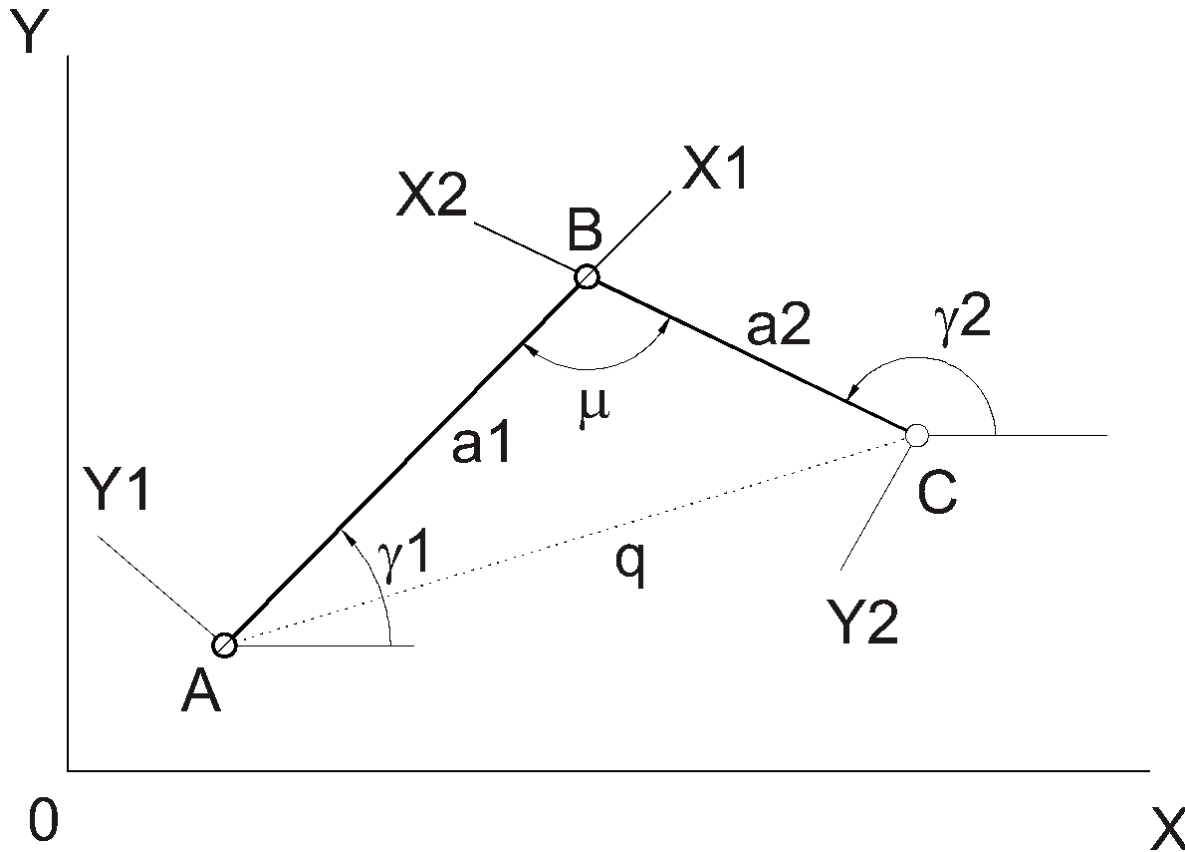
$$\dot{y}_B = r \cdot \omega \cdot \cos \varphi$$

$$\ddot{x}_B = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi - r \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi$$

$$\ddot{y}_B = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi + r \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi = \omega t$$
$$d\varphi/dt = \omega$$

Алгоритм анализа механизма для группы Ассура 2-го класса



Будем считать $M=-1$, если при обходе треугольника ABC по часовой стрелке мы последовательно встретим вершины A, B, C

Дано: $a_1, a_2, x_A, y_A, x_C, y_C, M$ (M – коэффициент сборки)

Найти: $\varphi_A, \dot{\varphi}_A, \ddot{\varphi}_A, \varphi_C, \dot{\varphi}_C, \ddot{\varphi}_C$

Алгоритм анализа механизма для группы Ассура 2-го класса



Для решения задачи о положениях звеньев данной группы воспользуемся векторным уравнением замкнутости контура

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

При проецировании данного уравнения на оси координат получим

$$a_1 \cdot \cos \gamma_1 = x_C - x_A + a_2 \cdot \cos \gamma_2 \quad (1)$$

$$a_1 \cdot \sin \gamma_1 = y_C - y_A + a_2 \cdot \sin \gamma_2$$

Алгоритм анализа механизма для группы Ассура 2-го класса



Расчет геометрических параметров

$$q = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

Проверка условия $|a_1 - a_2| < q < a_1 + a_2$

Если условие не выполняется, то двухповодковая группа не существует

$$\mu = \arccos \frac{a_1^2 + a_2^2 - q^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2}$$

$$\cos \gamma_1 = \left[(x_C - x_A) \cdot (a_1 - a_2 \cdot \cos \mu) + M \cdot (y_C - y_A) \cdot a_2 \cdot \sin \mu \right] \cdot q^{-2} \quad (2)$$

$$\sin \gamma_1 = \left[(y_C - y_A) \cdot (a_1 - a_2 \cdot \cos \mu) - M \cdot (x_C - x_A) \cdot a_2 \cdot \sin \mu \right] \cdot q^{-2}$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 - M \cdot \mu$$

Алгоритм анализа механизма для группы Ассура 2-го класса



Определение кинематических параметров

Вычисляемые кинематические параметры группы определяются путем двукратного дифференцирования по времени уравнений (1) и (2), связывающих ее геометрические параметры

При первом дифференцировании (1) получаются два уравнения, линейных относительно двух искомых скоростей, а при втором дифференцировании – два уравнения, линейных относительно двух искомых ускорений. (второе дифференцирование на слайде не представлено)

$$-a_1 \cdot \dot{\gamma}_1 \cdot \sin \gamma_1 = \dot{x}_C - \dot{x}_A - a_2 \cdot \dot{\gamma}_2 \cdot \sin \gamma_2$$

$$a_1 \cdot \dot{\gamma}_1 \cdot \cos \gamma_1 = \dot{x}_C - \dot{x}_A + a_2 \cdot \dot{\gamma}_2 \cdot \cos \gamma_2$$

$$\dot{\gamma}_1 = -M \cdot [(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \cos \gamma_2 + (\dot{x}_C - \dot{x}_A) \sin \gamma_2] \cdot (a_1 \cdot \sin \mu)^{-1}$$

$$\dot{\gamma}_2 = -M \cdot [(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \cos \gamma_1 + (\dot{x}_C - \dot{x}_A) \sin \gamma_1] \cdot (a_2 \cdot \sin \mu)^{-1}$$