

Лекция 3

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

Решение задачи определения **напряженно-деформированного состояния (НДС)** сооружения состоит из следующих частей:

- определение напряжений;
- определение опорных реакций и внутренних усилий;
- определение перемещений и деформаций.

При этом должны быть известны геометрические размеры и формы элементов сооружения, физические характеристики материала, внешняя нагрузка и особенности ее воздействия.

Расчет статически определимых систем является самой простой задачей, решаемой в строительной механике.

Статически определимой системой (СОС) называется система, внутренние усилия которой можно определять только из уравнений статики.

Особенности СОС:

- их внутренние усилия не зависят от упругих характеристик материала, форм сечений и площадей элементов;
- воздействие температуры, осадки опор, неточность изготовления элементов не вызывают внутренних усилий;
- если нет внешних нагрузок, все внутренние усилия равны нулю.

1. Определение опорных реакций

Сооружение, воспринимая внешнюю нагрузку, через свои элементы передает ее опорам, а в них возникают опорные реакции.

При определении опорных реакций используется **принцип освобождения от связей**: **всякое тело можно освободить от связей, заменив их реакциями**.

После этого из уравнений равновесия можно определять величины опорных реакций.

Уравнения равновесия плоской системы пишутся в трех формах:

$$1) \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M_A = 0$$

(ΣX и ΣY – суммы проекций сил на взаимно-пересекающиеся оси x и y , ΣM_A – сумма моментов всех сил относительно любой точки A);

$$2) \Sigma X = 0, \quad \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0$$

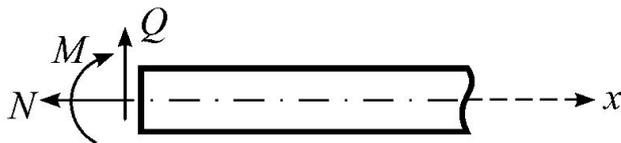
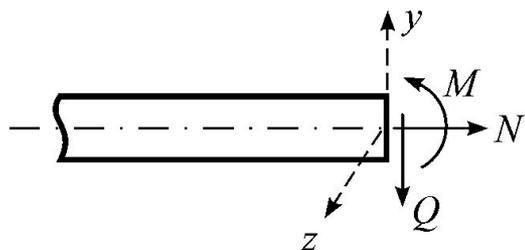
(точки A и B не должны лежать на одном перпендикуляре к оси x);

$$3) \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0, \quad \Sigma M_C = 0$$

(точки A , B , C не должны лежать на одной прямой).

2. Внутренние усилия стержневой системы

В элементах плоской стержневой системы возникают три внутренних усилия:



*N – продольная сила,
Q – поперечная сила,
M – изгибающий момент.*

Внутренние усилия вычисляются по формулам:

$$M = \sum_{\text{лев}} M_{iz} = - \sum_{\text{пр}} M_{jz}, \quad Q = \sum_{\text{лев}} P_{iy} = - \sum_{\text{пр}} P_{jy}, \quad N = \sum_{\text{лев}} P_{ix} = - \sum_{\text{пр}} P_{jx}.$$

В строительной механике используется следующее **правило знаков внутренних усилий**:

1) эпюра M изображается на стороне растянутого волокна. Ее знак обычно не устанавливается;

2) поперечная сила положительна, если вращает элемент по часовой стрелке, и отрицательна, если вращает элемент против часовой стрелки;

3) продольная сила положительна, если растягивает элемент, и отрицательна, если сжимает его.

Между Q и M существует дифференциальная зависимость (формула Журавского):

$$Q = \frac{dM}{dx} = \pm \operatorname{tg} \varphi.$$

Для определения знака Q по M ось эпюры M нужно повернуть до совпадения с ее касательной. Если поворот будет по часовой стрелке, Q берется со знаком «+», а если против часовой стрелки, то со знаком «-».

Эпюры поперечных сил Q и продольных сил N можно изображать на любой стороне от оси стержня со своими знаками.

Но эпюру изгибающего момента M нужно обязательно изображать на стороне растянутого волокна.

3. Методы определения внутренних усилий

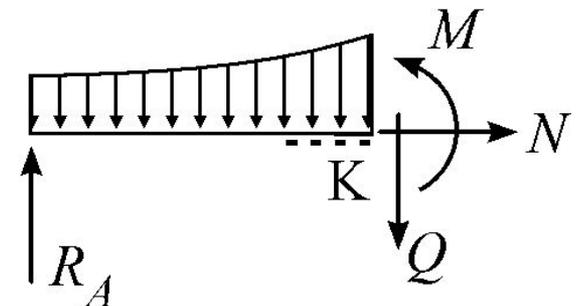
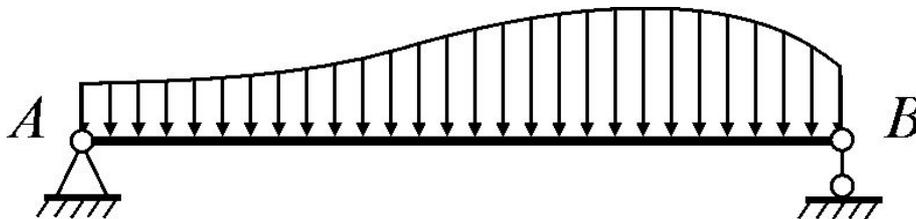
Внутренние усилия определяются методами простых сечений, совместных сечений, вырезания узла и замены связей.

3.1. Метод простых сечений

Этот метод позволяет рассматривать внутреннее усилие как внешнюю силу и определять его из уравнений статики (равновесия):

Алгоритм метода простых сечений:

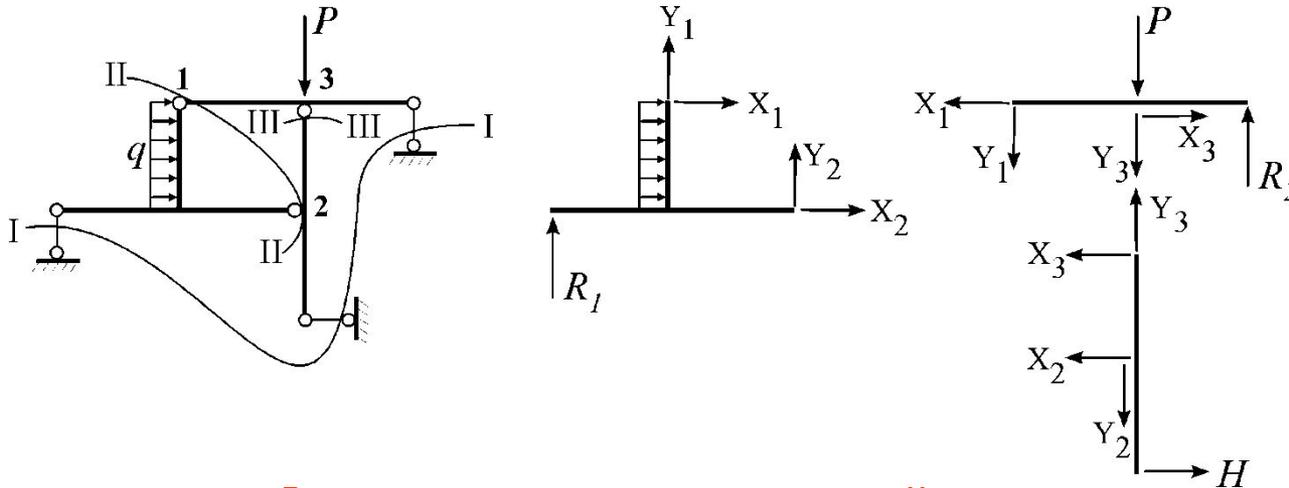
- 1) поделить систему на участки;
- 2) выбрать участок и провести поперечное сечение;
- 3) выбрать одну (наиболее простую) отсеченную часть;
- 4) составить три уравнения равновесия;
- 5) из них определить внутренние усилия M , Q , N ;
- 6) для данного участка построить эпюры M , Q , N ;
- 7) повторить пункты 2-6 для остальных участков.



3.2. Метод совместных сечений

Используется при расчете многодисковых систем.

Например, при расчете трехдисковой рамы проводятся три сечения *I, II, III*. Составив для каждого диска по три уравнения равновесия, из 9 уравнений определяются девять неизвестных реакций: опорные реакции R_1, R_2, H и междисковые реакции $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$.



Алгоритм метода совместных сечений:

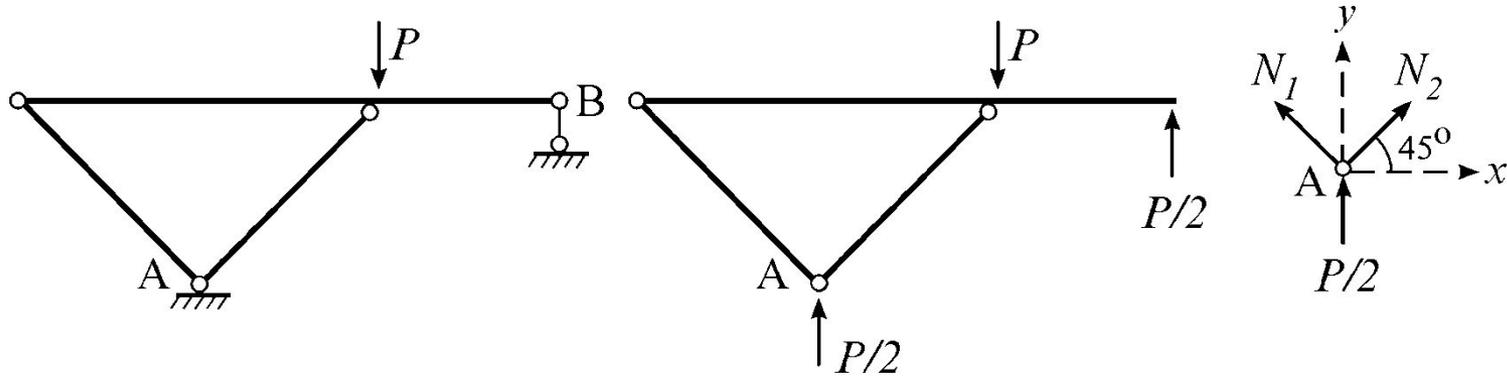
- 1) совместными сечениями разделить систему на части (диски);
- 2) обозначить опорные и междисковые реакции;
- 3) для каждого диска записать уравнения равновесия;
- 4) решить систему полученных уравнений и определить реакции;
- 5) каждый диск рассчитать отдельно и построить эпюры;
- 6) объединить все эпюры в общие эпюры M, Q, N .

3.3. Метод вырезания узла

Используется для определения усилий простых систем.

Его сущность: вырезается узел с не более чем двумя неизвестными усилиями; силы, действующие в узле проецируются на две оси; из этих уравнений определяются искомые усилия.

Рассмотрим пример:



После определения опорных реакций вырезается узел A и составляются уравнения равновесия:

$$\Sigma X = N_2 \cos 45 - N_1 \cos 45 = 0,$$

$$\Sigma Y = N_1 \sin 45 + N_2 \sin 45 + P/2 = 0.$$

Из них определяются искомые продольные силы:

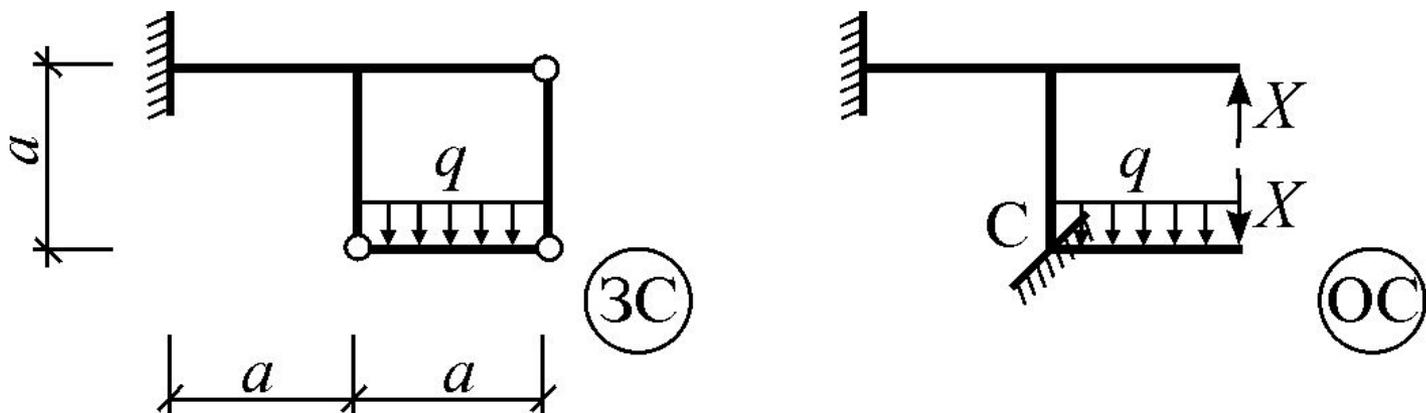
$$N_1 = N_2 = -\frac{P}{\sin 45}.$$

3.4. Метод замены связей

Используется при расчете сложных статически определимых систем, которые трудно рассчитать другими способами.

Его сущность: сложная система превращается в более простую путем перестановки одной связи в другое место; из условия эквивалентности заданной и заменяющей систем определяется усилие в переставленной связи; затем система рассчитывается известными способами.

Например, для расчета следующей рамы в заданной системе **3С** удалим правый вертикальный стержень и введем связь в левый шарнир. Тогда вместо шарнира получим припайку **С**, а стержни будут жестко связаны. Обозначив усилие в удаленной связи через X , получим основную систему **0С** :



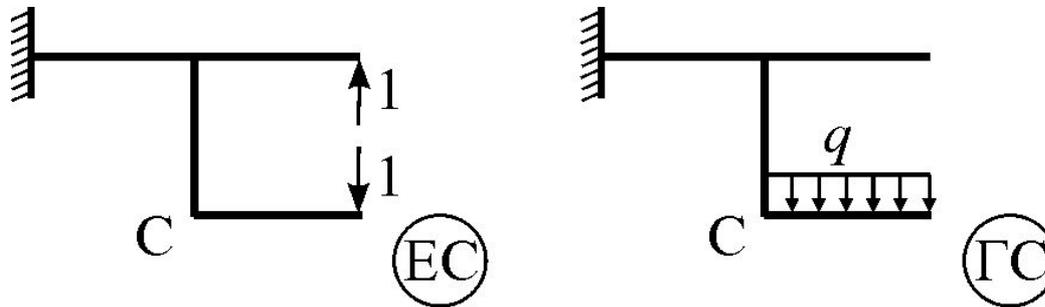
Условие эквивалентности заданной (ЗС) и основной (ОС) систем:

$$M_C = 0.$$

По принципу суперпозиции имеем: $M_C = M_{C,X} + M_{C,P} = 0$.

Теперь рассмотрим два состояния основной системы:

- 1) единичное состояние (**ЕС**) – прикладывается сила $X=1$;
- 2) грузовое состояние (**ГС**) – прикладывается нагрузка:



Предыдущее уравнение примет вид:

$$X + \overline{M}_{C,P} = 0,$$

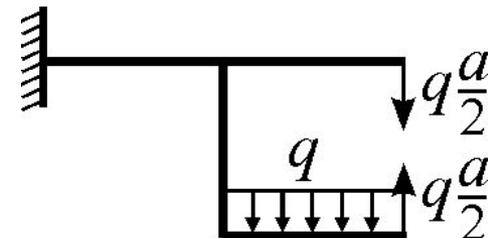
где $\overline{M}_C = 1 \cdot a = a$ – момент в точке C в единичном состоянии,

$M_{C,P} = qa^2/2$ – момент в точке C в грузовом состоянии.

Тогда неизвестное усилие будет:

$$X = -M_{C,P} / \overline{M}_C = -qa/2.$$

После этого можно перейти к расчету более простой системы:



В более сложных случаях переставляются несколько связей и записываются столько же условий эквивалентности:

$$s_{11}X_1 + s_{12}X_2 + \dots + s_{1n}X_n + S_{1P} = 0,$$

$$s_{21}X_1 + s_{22}X_2 + \dots + s_{2n}X_n + S_{2P} = 0,$$

.....

.....

$$s_{n1}X_1 + s_{n2}X_2 + \dots + s_{nn}X_n + S_{nP} = 0.$$

Здесь $1, 2, \dots, n$ – заменяемые связи; X_1, X_2, \dots, X_n – неизвестные внутренние усилия в этих связях.

Из этой системы уравнений определяются неизвестные силы.

Общий вывод. Расчет любой статически определимой системы приводит к решению системы n линейных уравнений с n неизвестными. Если определитель полученной системы уравнений отличен от нуля ($det \neq 0$), внутренние усилия будут конечными величинами. Если же определитель равняется нулю ($det = 0$), то внутренние усилия определить нельзя. В этом случае – данная система мгновенно изменяема.