Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. СТАТИКА

ЛЕКЦИЯ 7. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Кафедра теоретической механики

План лекции

И мудрое сферическое здание
народы и века переживет.
Осип Мандельштам

Введение

Расчет ферм

- Ферма. Основные понятия
- Определение реакций связей
- Определение усилий в стержнях методом вырезания узлов
- Определение усилий в стержнях методом сечений (Риттера)

Расчет составных конструкций

Заключение

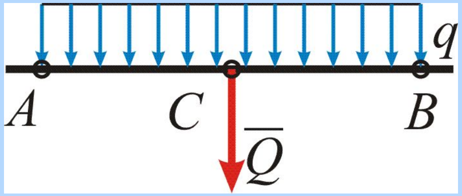
На предыдущих лекциях

Аксиомы статики

- равновесие абсолютно твердого тела под действием двух сил (аксиома 1)
- третий закон Ньютона (аксиома 4)
- аксиома отвердевания (аксиома 5)
- аксиома о связях

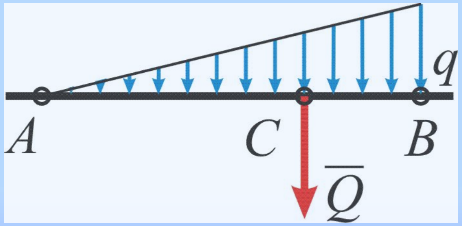
Распределенные нагрузки

- равномерно распределенная нагрузка



$L=AB$
$AC=CB=L/2$
$Q=q\cdot L$

- нагрузка, распределенная по линейному закону



$L=AB$
$CB=L/3$
$Q=q\cdot L/2$

На предыдущих лекциях

Связи и реакции связей

- гладкая поверхность
- гладкая поверхность с угловой точкой
- идеальная нить
- идеальный стержень
- подвижный цилиндрический шарнир
- неподвижный цилиндрический шарнир
- жесткая заделка

Уравнения равновесия плоской системы сил (одна из форм)

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_0\left(\vec{F}_k\right) = 0$$

Момент силы относительно точки на плоскости

$$M_0\left(\vec{F}\right) = F \cdot h$$

Цель лекции

Ознакомление с методом расчета равновесия конструкций

Идея метода

Система тел *будет находится в равновесии тогда и только тогда, когда в равновесии находится* ***каждое*** *из составляющих ее тел.*

Применение фермовых конструкций

Мосты

Опоры ЛЭП

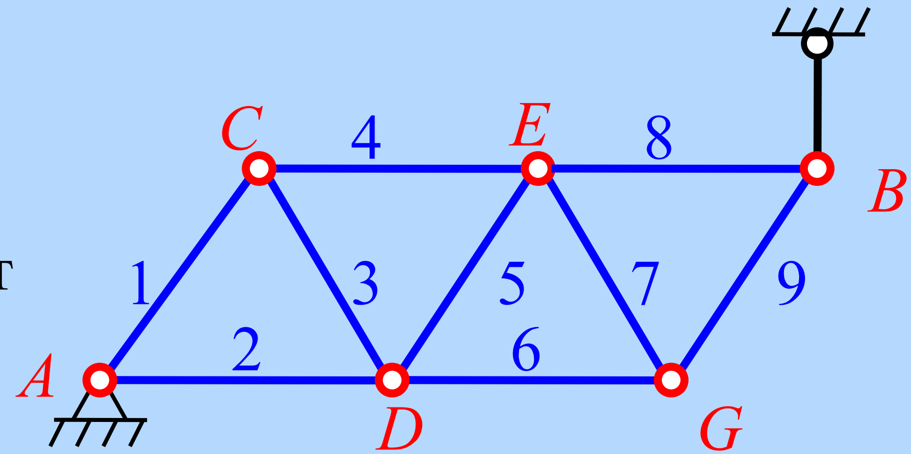
Подъемные краны

Металлические каркасы зданий

Расчет ферм

Ферма - жесткая, геометрически неизменяемая конструкция, состоящая из невесомых прямолинейных стержней, соединенных идеальными (без трения) шарнирами.

Плоская ферма – стержни и шарниры лежат в одной плоскости



1, 2, … 9 – стержни *A, B, … G* – шарниры (узлы)

Расчет ферм

В общем случае каждый стержень фермы испытывает как продольные (сжатие и растяжение), так и поперечные нагрузки, изгибающие стержень.

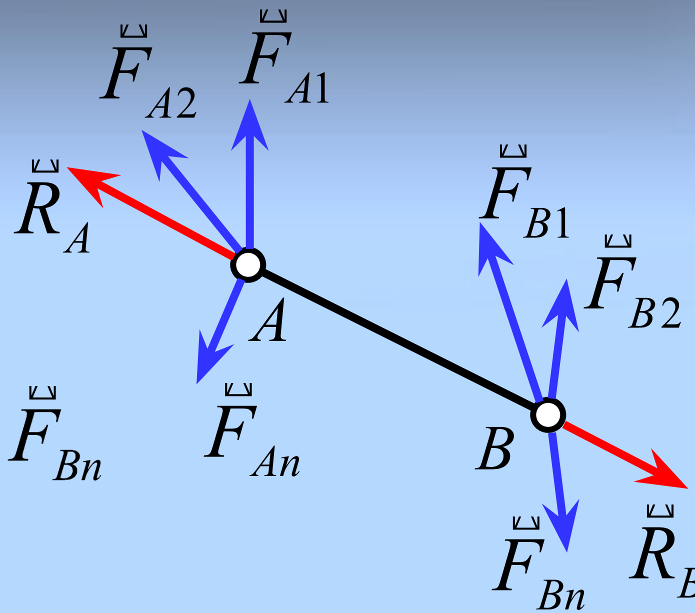
Поперечные – наиболее опасные, поэтому основная задача при конструировании ферм – минимизировать именно их.

Для этого
стержни должны быть соединены шарнирами.

Расчет ферм

Докажем, *что в идеализированной ферме, у которой все усилия приложены к узлам, стержни испытывают только продольные нагрузки*

Доказательство



1. Рассмотрим равновесие отдельного стержня *AB*

2. Силы

$$\bar{F}_{A1}, \bar{F}_{A2}, ..., \bar{F}_{An} \quad \text{и} \quad \bar{F}_{B1}, \bar{F}_{B2}, ..., \bar{F}_{Bn}$$

приложены к концам стержня и по аксиоме 3 могут быть заменены равнодействующими

$$\bar{R}_A \quad \text{и} \quad \bar{R}_B$$

3. Согласно аксиоме 1, для равновесия тела необходимо, чтобы силы

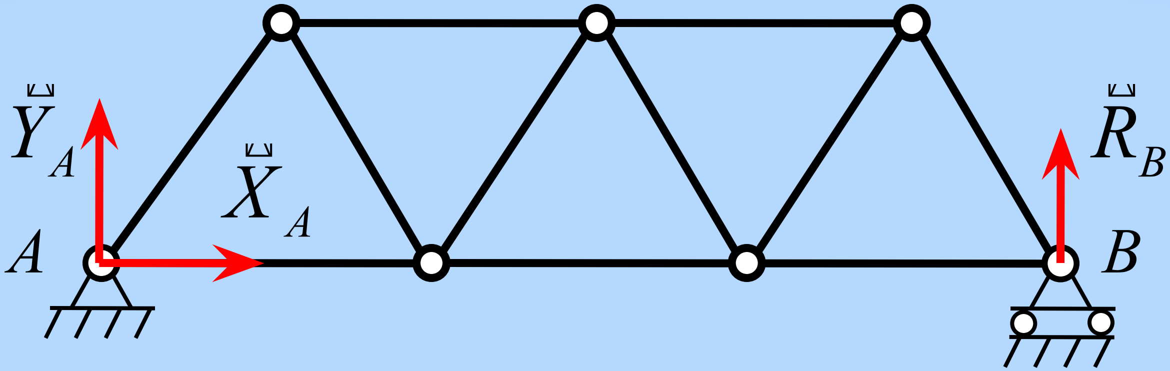
$$\bar{R}_A \quad \text{и} \quad \bar{R}_B$$

были направлены вдоль стержня

- Таким образом, **утверждение доказано**

Расчет ферм

Ферму можно построить присоединяя к треугольной конструкции последовательно по два стержня и шарниру



У **статически определимых ферм** число реакций опор не более трех

Пусть ***k*** – число стержней, ***n*** – число узлов
Тогда **ферма будет статически определимая** при выполнении равенства

$$k = 2n - 3$$

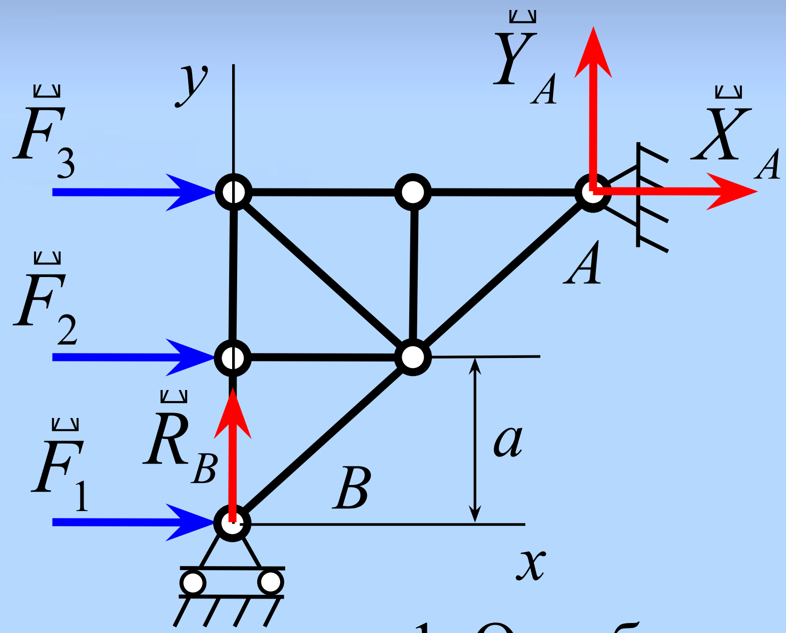
Расчет ферм

Для расчета ферм необходимо

- **Найти реакции опор с использованием аксиомы отвердевания и 3-х уравнений равновесия**

- **Определить усилия в стержнях фермы методом вырезания узлов или методом сечений (Риттера)**

Определение реакций опор фермы



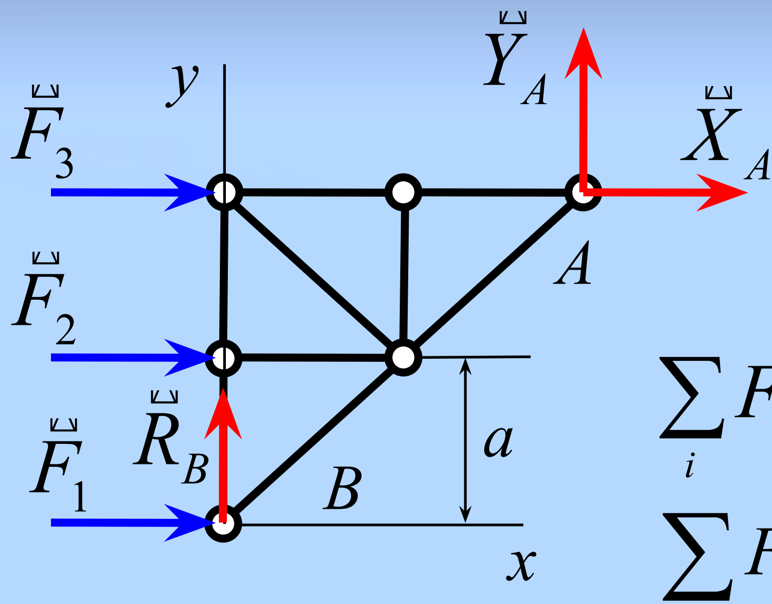
образованной одинаковыми равнобедренными треугольниками, силы параллельны оси x и равны

$$F_2 = F_2 = F_2 = 2 \text{ кН}$$

1. Освободимся от связи в точке A (неподвижный цилиндрический шарнир)
2. Заменим ее реакциями $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$

3. Освободимся от связи в точке B (подвижный цилиндрический шарнир).
4. Заменим ее реакцией $\vec{R}_B$

Определение реакций опор фермы



5. Запишем три уравнения равновесия для плоской системы сил

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad F_1 + F_2 + F_3 + X_A = 0$$

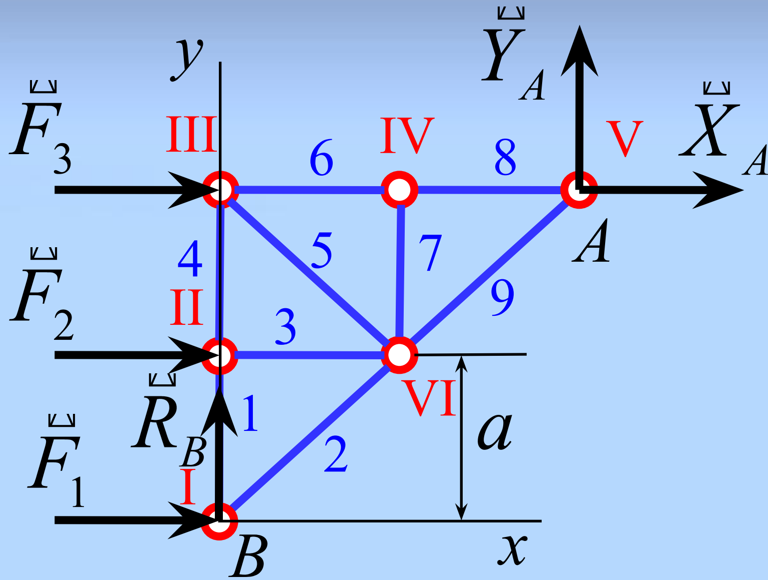
$$\sum_i F_{iy} = 0 \qquad R_B + Y_A = 0$$

$$\sum_i m_A = 0 \qquad F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot a - R_B \cdot 2a = 0$$

6. Решая уравнения, находим

$\boxed{X_A = -6 \text{ кН}}$ $\boxed{Y_A = -3 \text{ кН}}$ $\boxed{R_B = 3 \text{ кН}}$

Метод вырезания узлов



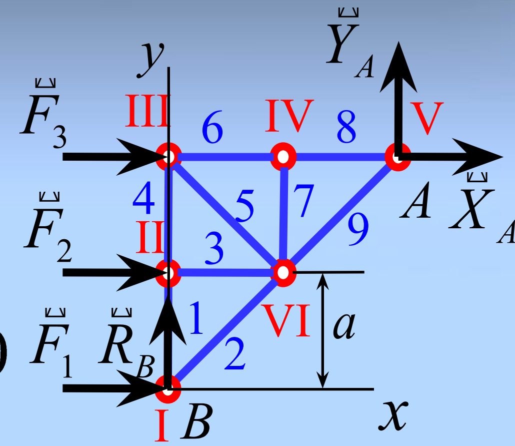
1.Пронумеруем все стержни фермы арабскими цифрами: 1, 2, 3, … 9

2. Пронумеруем узлы фермы римскими цифрами: I, II, III, … IV

3. Рассмотрим равновесие каждого из узлов и составим уравнения равновесия (считаем условно все стержни растянутыми и направляем реакции соединительных шарниров от узлов).

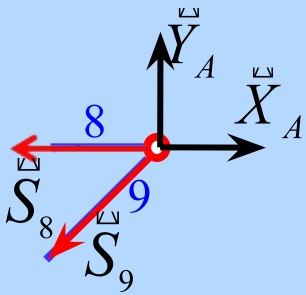
При этом учитываем 3-й закон Ньютона: для каждого из стержней усилия со стороны узлов равны по величине и направлены в разные стороны.

Метод вырезания узлов



Начнем расчет с узла V, в котором сходятся 2-а стержня с неизвестными усилиями.

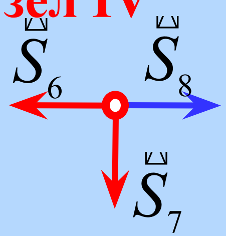
Узел V



$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad X_A - S_8 - S_9 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad Y_A - S_9 \sin 45^\circ = 0$$

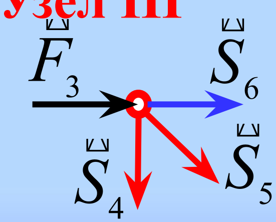
Узел IV



$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad S_8 - S_6 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad S_7 = 0$$

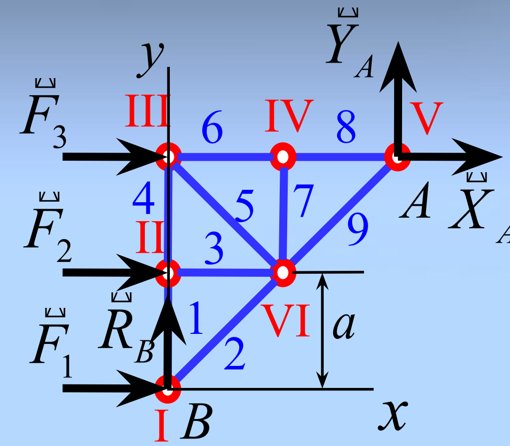
Узел III



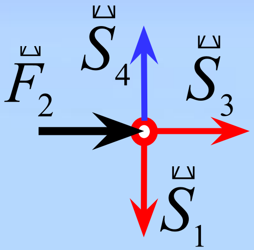
$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad S_6 + F_3 + S_5 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad -S_4 - S_5 \sin 45^\circ = 0$$

Метод вырезания узлов



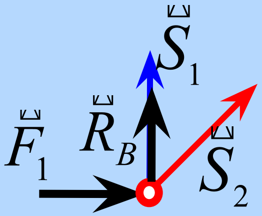
Узел II



$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad \vec{F}_2 + S_3 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad S_4 - S_1 = 0$$

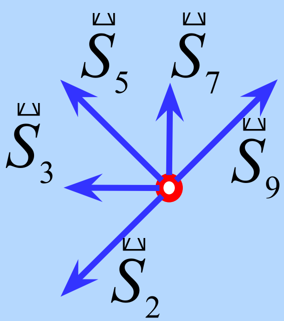
Узел I



$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad F_1 + S_2 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad S_1 + R_B + S_2 \sin 45^\circ = 0$$

Узел VI



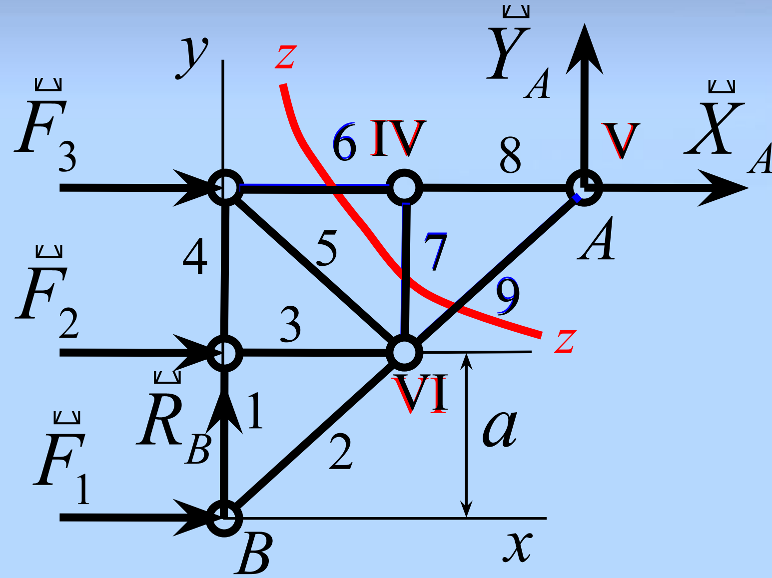
$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad -S_3 - S_2 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ + S_9 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad S_7 - S_2 \sin 45^\circ + S_5 \sin 45^\circ + S_9 \sin 45^\circ = 0$$

Последний узел (узел VI) можно использовать для проверки решения: уравнения при подстановке найденных усилий в стержнях должны удовлетворяться тождественно

Метод сечений (Риттера)

Удобен если требуется определить усилия в каких-то отдельных стержнях фермы, например, 6, 7, 9 (число стержней должно быть не более трех)

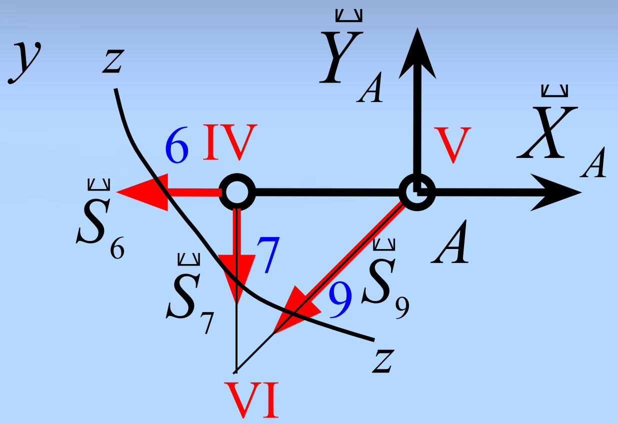


Последовательность действий

1. Проведем сквозное сечение *z–z* через стержни 6,7,9.

2. Пользуясь принципом отвердевания, рассмотрим равновесие одной из частей фермы, например, правой. Для этого составляем **3 уравнения моментов сил** относительно точек в которых пересекаются 2 стержня с неизвестными усилиями - IV, V(*A*), VI.

Метод сечений (Риттера)



$$\sum_i m_A = 0: \quad S_7 = 0$$

$$\sum_i m_{\mathrm{IV}} = 0: \quad aY_A - aS_9 \sin 45° = 0$$

$$\sum_i m_{\mathrm{VI}} = 0: \quad aY_A + aS_6 - aX_A = 0$$

Решив систему уравнений находим усилия в стержнях 6,7,9
Полученные результаты можно использовать для проверки результатов, полученных методом вырезания узлов.
Всегда, если значение усилия в стержне получено со знаком «–», то стержень не растянут, а сжат.

Примеры составных конструкций

Стоунхендж, Англия,
2440-2100 гг. до н. э.

Триумфальные ворота
Москва,
1829-1834 гг.

1-ый панельный дом
Новосибирск, 1960 г.

Дмитровский
мост,
Новосибирск,
1971-1780 гг.

Расчет составных конструкций

Последовательность действий

1. Освободившись от связей рассматриваем равновесие каждого из тел конструкции.
2. Составляем для каждого тела уравнения равновесия (наряду с активными силами учитываем силы реакций внешних и внутренних связей).

Такой способ расчета конструкции называют *методом расчленения*.

Статически определимая конструкция

Если общее число независимых уравнений больше или равно общему числу неизвестных (реакций связей), то такая конструкция называется статически определимой.

Для плоской конструкции, состоящей из двух тел, мы можем составить шесть независимых уравнений равновесия (по 3 для каждого из двух тел) и определить из них шесть неизвестных.

Пример расчета двухсоставной конструкции

<u>состоящей</u>

из однородных балок *AB* и *CD*

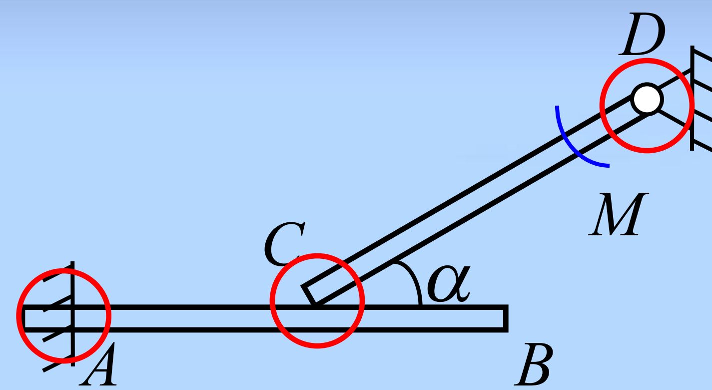
весом P и длиной l, $AC = 0.7 \cdot l$

<u>Необходимо определить</u>

реакции жесткой заделки *A*,

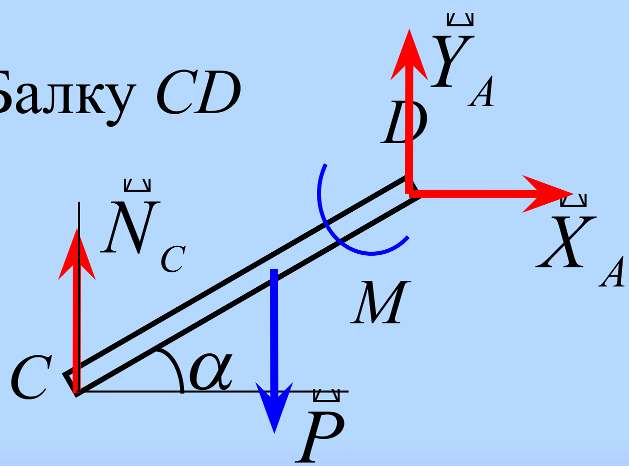
шарнирной опоры *D*,

давление в точке *C* на балку *AB*

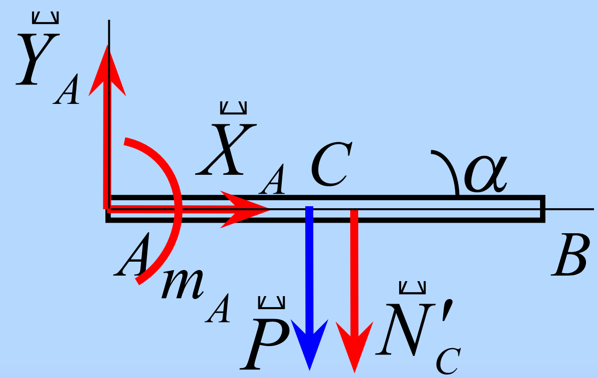


Освобождаемся от связей и расчленяем конструкцию на две части:

Балку *CD*



Балку *AB*

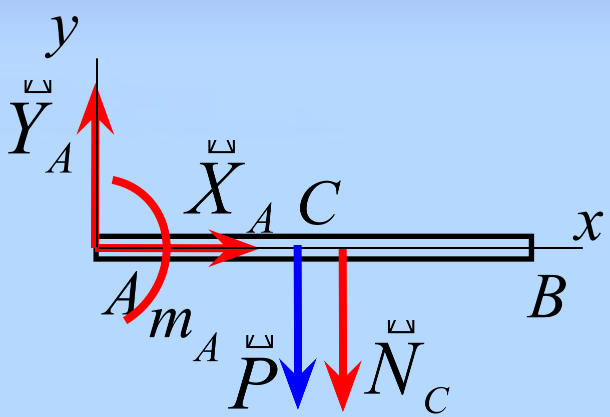


По 3-му закону Ньютона

$$\vec{N}'_C = \vec{N}_C$$

Уравнения равновесия

Балки AB

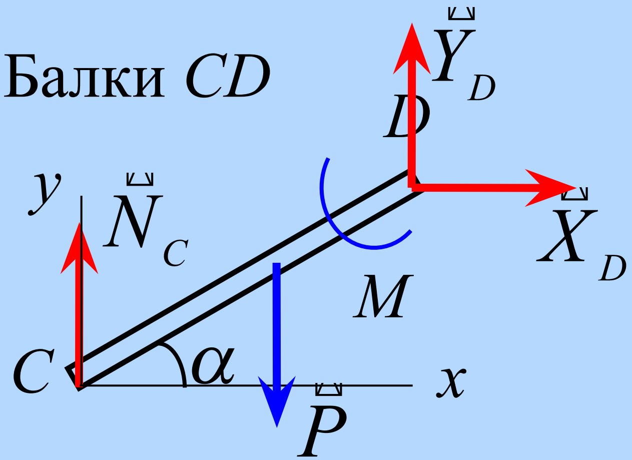


$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad X_A = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad Y_A - N_C - P = 0$$

$$\sum_i m_A = 0: \quad m_A - P \cdot 0.5l - N_C \cdot 0.7l = 0$$

Балки CD



$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad X_D = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: \quad Y_D + N_C - P = 0$$

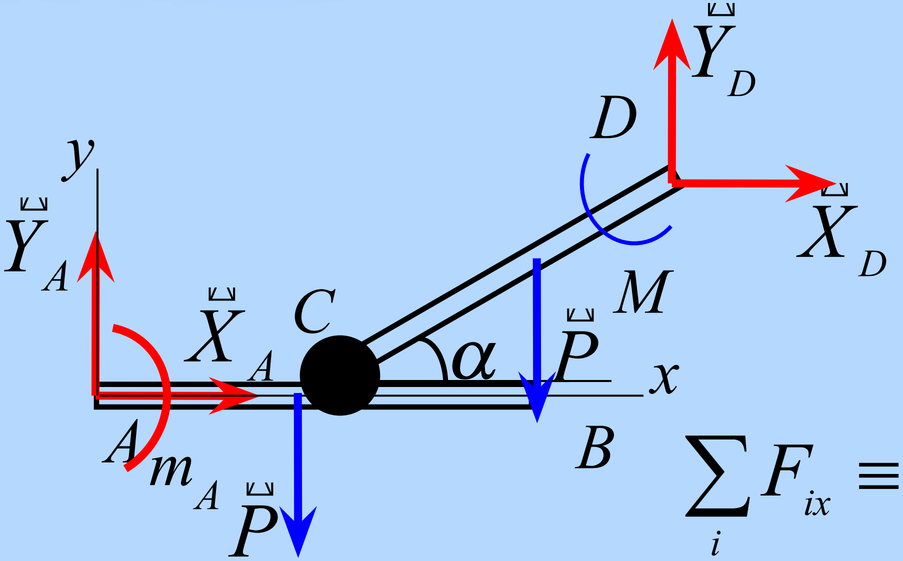
$$\sum_i m_D = 0: \quad M + P \cdot 0.5l\cos\alpha -$$

$$- N_C \cdot l\cos\alpha = 0$$

Решая полученные уравнения, находим неизвестные реакции связей: $X_A,\ Y_A,\ m_A,\ N_C,\ X_D,\ Y_D$

Проверка

решения проводится с применением аксиомы отвердевания, вследствие чего связь в точке C считаем «замороженной». Расчетная схема с учетом этого примет вид



Для нее при подстановки решения

$$X_A,\ Y_A,\ m_A,\ N_C,\ X_D,\ Y_D$$

должны тождественно удовлетворятся уравнения :

$$\sum_i F_{ix} \equiv 0: \quad X_A + X_D \equiv 0$$

$$\sum_i F_{iy} \equiv 0: \quad Y_A + Y_D - 2P \equiv 0$$

$$\sum_i m_A \equiv 0: \quad m_A + M - X_D \cdot l\sin\alpha + Y_D \cdot (0.7 + \cos\alpha)l -$$

$$- P \cdot 0.5l - P \cdot (0.7 + 0.5\cos\alpha)\,l \equiv 0$$

Заключение

1. Сегодня мы освоили метод расчета конструкций, основанный на идее, что система тел находится в равновесии тогда и только тогда, когда в равновесии находится каждое из составляющих ее тел
2. С применением этого метода для конкретных примеров нами были произведены расчеты реакций опор и усилий в стержнях фермы и реакций опор двухсоставной конструкции.
3. В примерах рассматривали отдельно равновесие каждой части двухсоставной конструкции, каждого узла (метод вырезания узлов) или части (метод Риттера) фермы.

Вопросы для самоконтроля

1. Привести примеры использования ферм в строительной технике.
2. Какова последовательность расчета ферм?
3. Какие методы расчета усилий в стержнях фермы Вы знаете?
4. Как проводят сечение при расчете методом Риттера?
5. В чем заключается преимущество метода Риттера?
6. В чем заключается метод расчленения?
7. Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для плоской системы сил?
8. Что понимают под статически определимой конструкцией?

Тема следующей лекции

Равновесие при наличии трения

«Если принять во внимание действие силы трения в месте контакта лыж со снегом, то для удержания равновесия лыжник должен сместить центр тяжести назад от линии перпендикуляра к склону.»

Самоучитель горнолыжника

Спасибо за внимание!