



*Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный
Университет (Сибстрин)*

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. СТАТИКА

ЛЕКЦИЯ 8. РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ



Кафедра теоретической механики

План лекции

Каждым тяжелым телом побеждается сопротивление трения, равное четвертой части этого веса.

Леонардо да Винчи

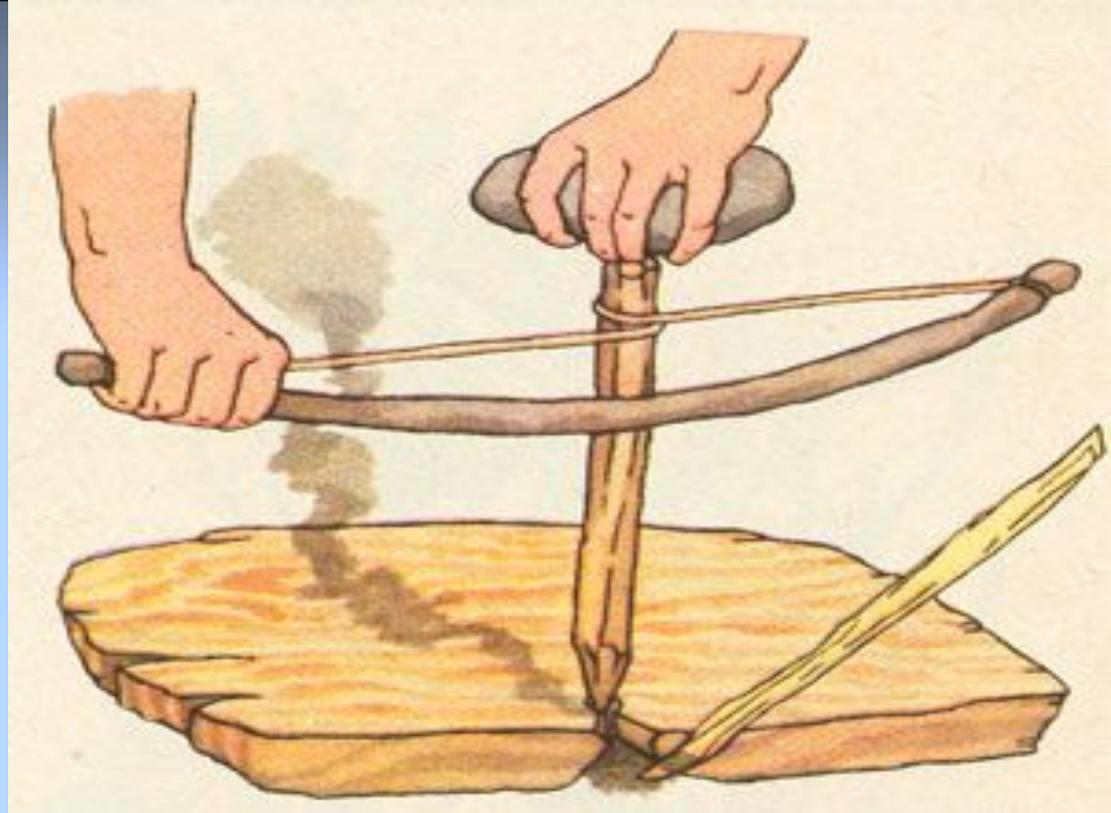
- Введение
- Равновесие при наличии трения скольжения
- Равновесие при наличии трения качения
- Какое движение (скольжение или качение) реализуется на практике
- Заключение

На предыдущей лекции

*Равновесие
системы тел*



Цель лекции



*Разобраться
с **реакцией** **связи шероховатой**
(не гладкой) **поверхности***

Что дает принцип освобождаемости от связей ?

То, что *реакция связи должна быть направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться.*

Однако, с шероховатой поверхностью не все так просто!

Что подсказывает опыт?

Если $F > F_{\max}$

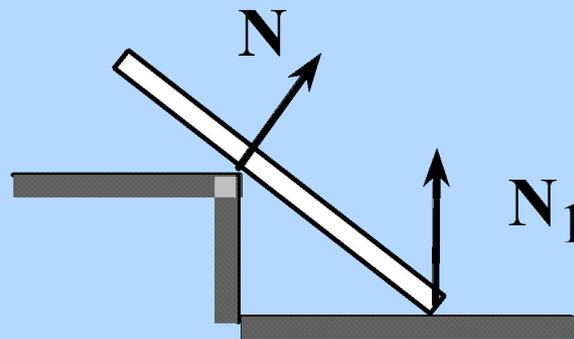
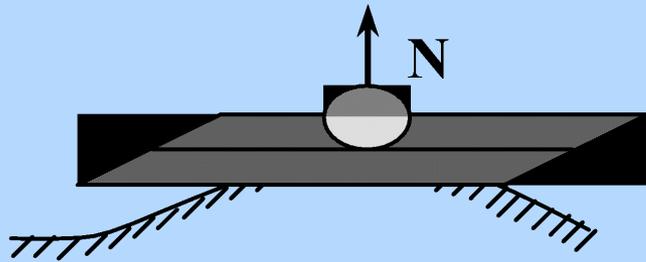
Тело начнет либо *скользить*, либо *катиться*.

Каким именно будет движение – в общем случае не очевидно !

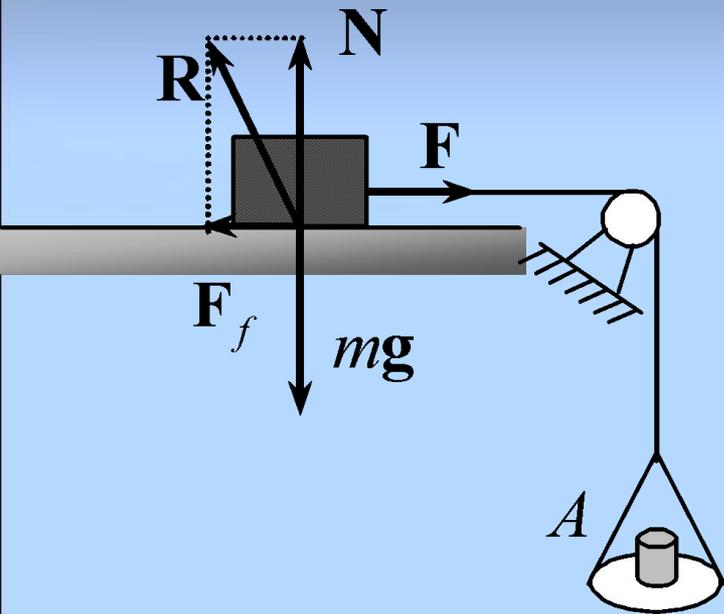
Трение скольжения

Для *гладкой поверхности* $\mathbf{R} = \mathbf{N}$

(реакция направлена по нормали к поверхности)



Поверхность шероховатая (не гладкая)



$\mathbf{F} \leq \mathbf{F}_{\max}$ - тело будет в покое

$\mathbf{F} > \mathbf{F}_{\max}$ - тело начнет скользить

Из принципа
освобождаемости от связи

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f$$

Реакция шероховатой поверхности имеет две составляющие:

\mathbf{N} - нормальную, и \mathbf{F}_f - касательную к поверхности.

Из *условия равновесия* $\mathbf{F}_f = \mathbf{F}$

\mathbf{F}_f - сила *трения скольжения*

Замечание 1

Природа возникновения **сил трения скольжения** сложна и не до конца изучена. Она связана как с шероховатостями, так и с диффузией.

Как описать \mathbf{F}_f Связаны ли \mathbf{F}_f и \mathbf{N}

Законы трения скольжения (Амонтона-Кулона)

- 1) \mathbf{F}_f направлена в сторону, противоположную той, куда активные силы стремятся сдвинуть тело.
- 2) **Модуль силы** \mathbf{F}_f $0 \leq F_f \leq F_f^{пред}$ $F_f^{пред} = f_s N$
- 3) f_s - **статический коэффициент трения скольжения**, зависит только от материалов соприкасающихся тел и не зависит от площади их соприкосновения.

Замечание 2

Законы трения носят приближенный характер и применимы для покоящихся тел.

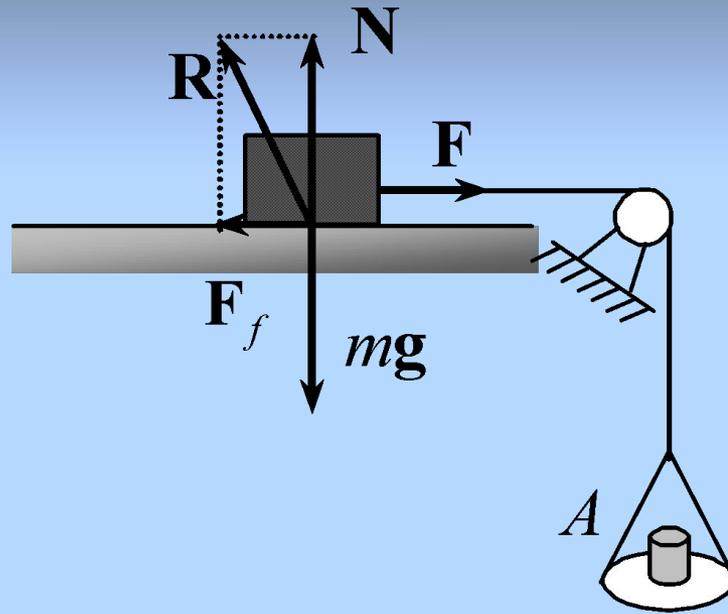
При движении $F_f = f_d N$

f_d - **динамический коэффициент трения скольжения**

Как правило

$$f_d < f_s$$

Экспериментальное определение f_s



$$F_f^{\text{пред}} = f_s N = f_s mg = P_{\text{грузика}} \Rightarrow f_s = P_{\text{грузика}} / mg$$

Непредельный случай равновесия $\mathbf{F} < \mathbf{F}_{\text{max}}$

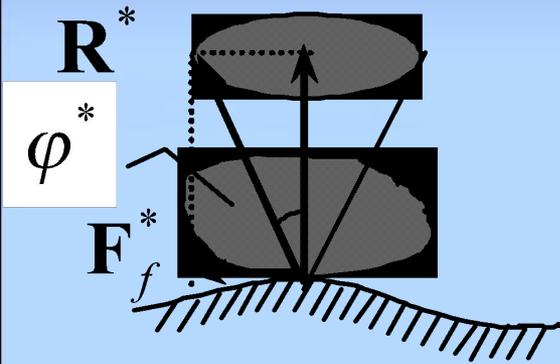
$$F_f \neq f_s N \quad F_f = F$$

Предельное равновесие $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{max}}$

$$F_f = f_s N = F_{\text{max}}$$

Геометрическая интерпретация

R - отклонена от нормали к поверхности
на угол φ



$$\operatorname{tg} \varphi = F_f / N \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi^{\text{пред}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi^{\text{пред}} = f_s$$

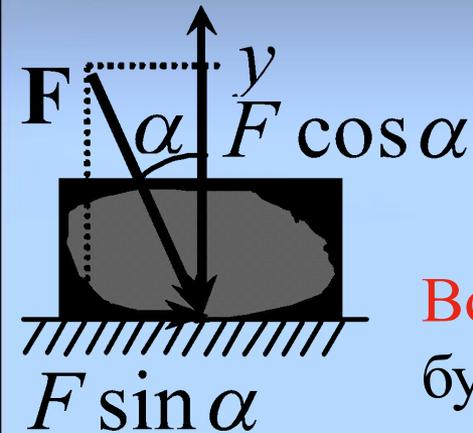
$\varphi^{\text{пред}}$ - называется **углом трения**

Конус с вершиной в точке касания и образующей, наклоненной к нормали под углом трения, называется **конусом трения**.

При непередельном равновесии **R**
расположен внутри конуса трения

При предельном равновесии **R**
лежит на поверхности конуса трения

Явление заклинивания



\vec{F} - равнодействующая всех активных сил, действующих на тело

α - угол, который она составляет с нормалью

Вопрос: Сдвинется ли тело, если мы \vec{F} будем увеличивать величину силу F не меняя α

Ответ: Сдвинется, если $\alpha > \varphi^{пред}$

И останется в покое, если $\alpha \leq \varphi^{пред}$

При любой, сколь угодно большой силе \vec{F}

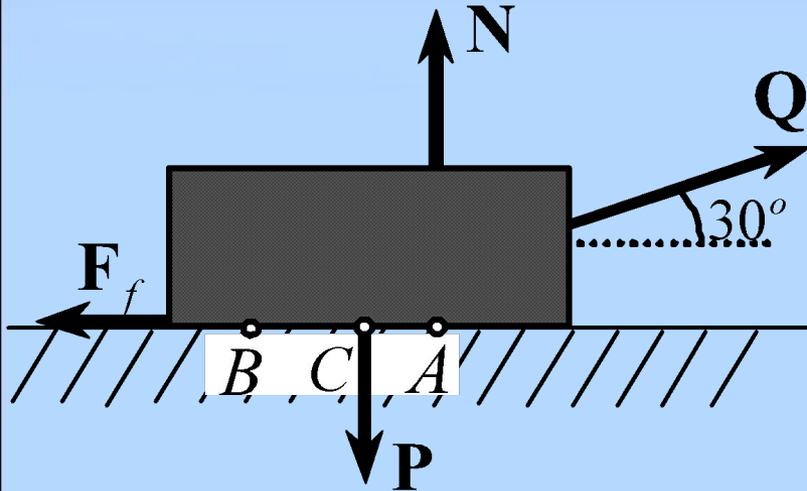
Для **доказательства** достаточно заметить, что при равновесии \vec{R} и \vec{F} есть, что сила \vec{R} не может находиться вне конуса трения.

Вывод: Если \vec{R} лежит внутри конуса, то сколько ее не увеличивай, тело не сдвинется (**заклинится**).

Задача 1

Дано

$$P = 10 \text{ кН} \quad f_s = f = 0,6$$



Определить величину силы Q чтобы сдвинуть груз с места

Решение

Составим уравнения предельного равновесия груза, при $F_f^* = fN$

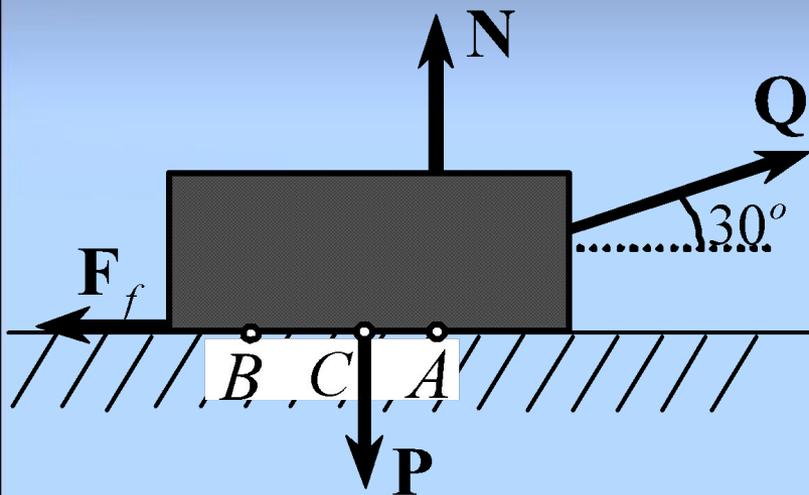
$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad -F_f^* + Q \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad N - P + Q \sin 30^\circ = 0$$

Решая их, получаем

$$Q = fP / (\cos 30^\circ + f \sin 30^\circ) = 5,2(\text{кН})$$

Задача 1. Замечание



Если **контакт** между соприкасающимися поверхностями **не точечный**, то **N** является уравновешивающей сил давления груза на поверхность и **точка A** ее приложения заранее не известна!

Ее можно найти, воспользовавшись уравнением моментов

$$\sum_i M_B(\mathbf{F}_k) = 0 \quad N \cdot AB - P \cdot CB = 0 \quad \Rightarrow \quad AB = P \cdot CB / N$$

Практический **вывод**:

В случае неточечного контакта между соприкасающимися поверхностями уравнениями моментов обычно не пользуются.

Задача 2

Дано:

$$Q, \alpha, \varphi^{\text{пред}} = \varphi^*, \alpha > \varphi^*$$

Определить P при равновесии

Решение:

Очевидно, ответ будет иметь вид

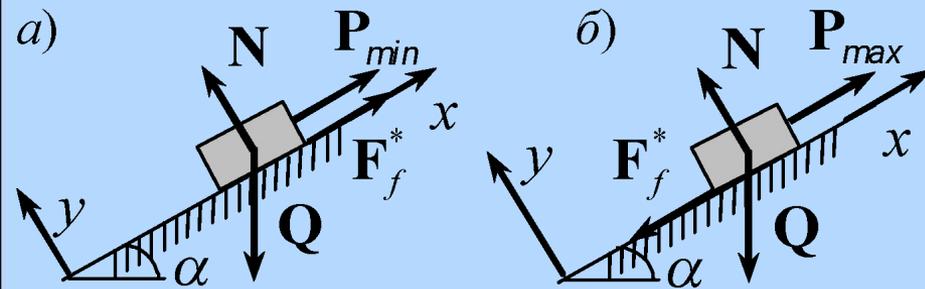
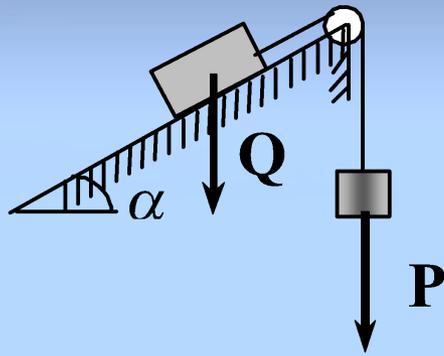
$$P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$$

При $P = P_{\min}$

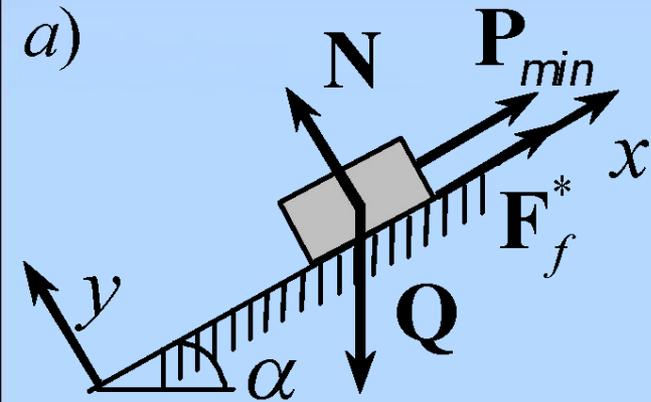
F_f - направлена вверх, по наклонной плоскости

При $P = P_{\max}$

F_f - направлена вниз, по наклонной плоскости



Задача 2. Продолжение 1



$$P = P_{\min}$$

уравнения **равновесия** имеют вид

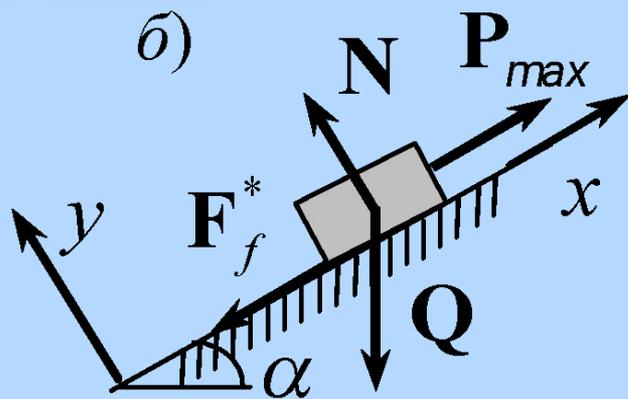
$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad P_{\min} + fN - Q \sin \alpha = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad N - Q \cos \alpha = 0$$

так как $f = \operatorname{tg} \varphi^*$, то

$$\begin{aligned} P_{\min} &= Q \sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi^* Q \cos \alpha = \frac{Q}{\cos \varphi^*} (\sin \alpha \cos \varphi^* - \sin \varphi^* \cos \alpha) = \\ &= Q \sin(\alpha - \varphi^*) / \cos \varphi^* \end{aligned}$$

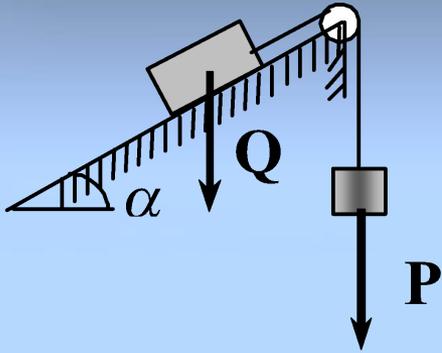
Задача 2. Продолжение 2



$$P = P_{max}$$

$$P_{max} = Q \sin(\alpha + \varphi^*) / \cos \varphi^*$$

Задача 2. Замечание



Для гладкой поверхности

$$P_{\max} = P_{\min} = Q \operatorname{tg} \alpha \quad P = Q \operatorname{tg} \alpha$$

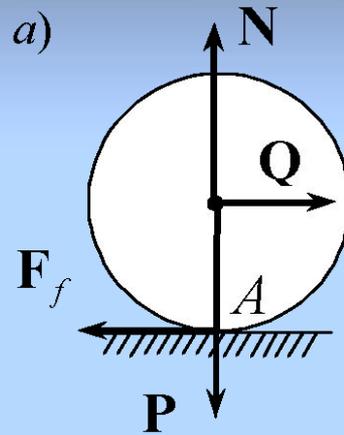
Малое отклонение (даже случайное) от этой величины вызвало бы движение груза. Иными словами, для *гладкой поверхности положение равновесия неустойчиво*.

Шероховатая же поверхность содержит конечный интервал значений $P \in [P_{\min}, P_{\max}]$

Для которых тело находится в равновесии, причем этот интервал тем шире, чем больше шероховатость.

Трение придает устойчивость равновесию, а коэффициент трения f_s характеризует запас устойчивости.

Трение качения



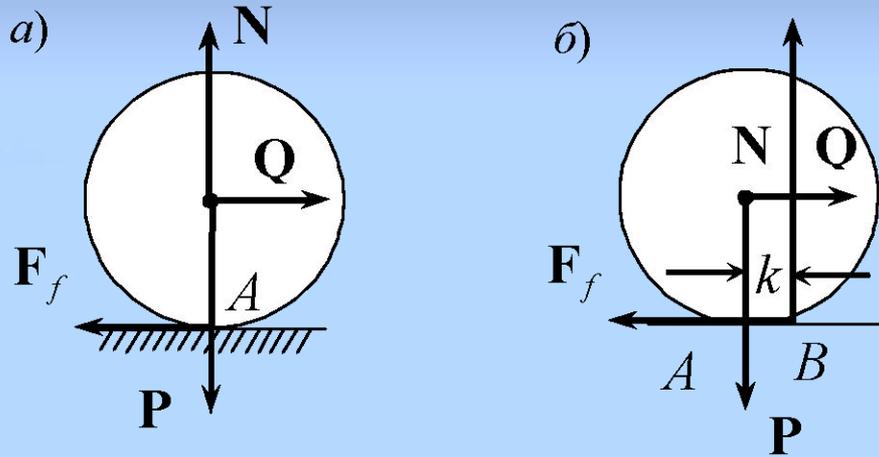
Опыт подсказывает, что диск покатится лишь при $Q > Q_{\max}$
При $Q \leq Q_{\max}$ будет покой.

Из условий равновесия $F_f = Q$, $N = P$

Вместе с тем $\sum_i M_A(\mathbf{F}_i) = 0 \Rightarrow Q = 0$

Противоречие с опытом!

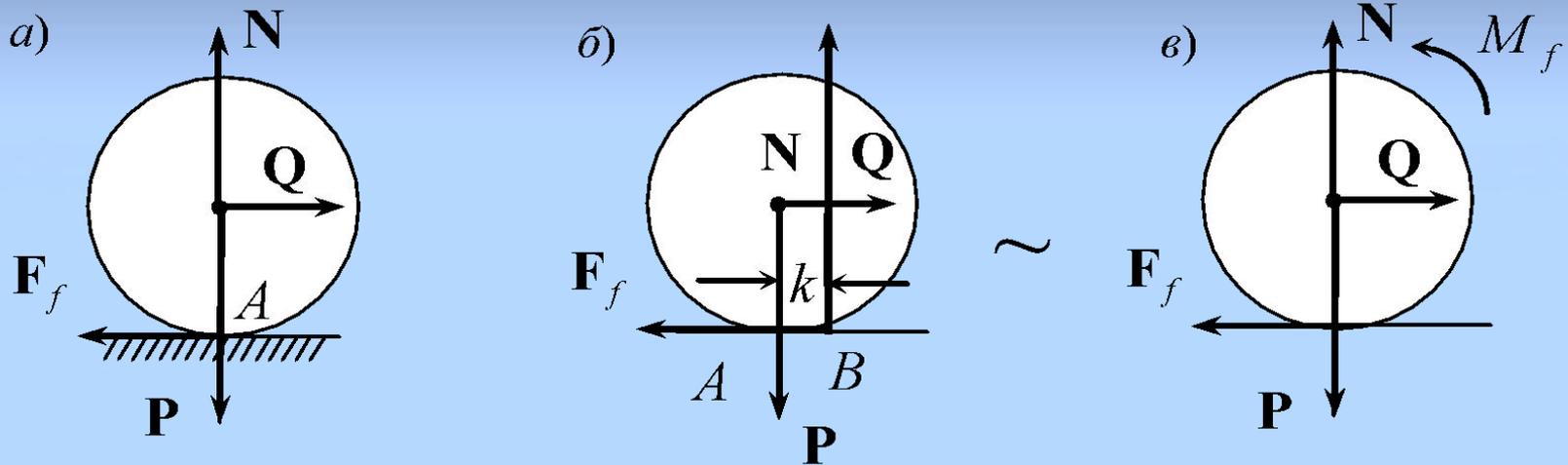
Трение качения 2



Причина: Реальные тела – не абсолютно твердые.
Контакт – по площадке **AB** (рис. б).

$$Q_{\max} R = Nk \quad k - \text{коэффициент трения качения}$$

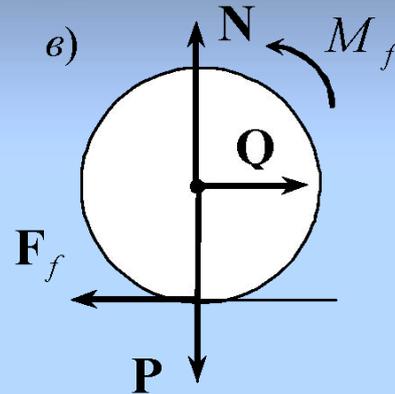
Трение качения 3



Лемма о параллельном переносе силы:
(Рис. б) ~ (Рис. в)

M_f — *момент сопротивления качению*

Аналог закона Амонтона-Кулона



1. **Направление** M_f — противоположную той, куда активные силы стремятся повернуть тело.
2. **Величина** M_f : $0 \leq M_f \leq M_f^{пред}$, $M_f^{пред} = kN$
3. **k** — зависит лишь от свойств материалов соприкасающихся тел.

Замечания

Замечание 1. В случае качения реакция шероховатой стенки состоит из силы $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f$ и момента \mathbf{M} . Т.е. в полном соответствии с принципом освобожденности от связи!

Замечание 2. Чем тверже тело, тем меньшее усилие требуется, чтобы покатыть тело. Например, вагон могут катить 4 человека, а грузовой автомобиль нет, хотя он значительно легче.

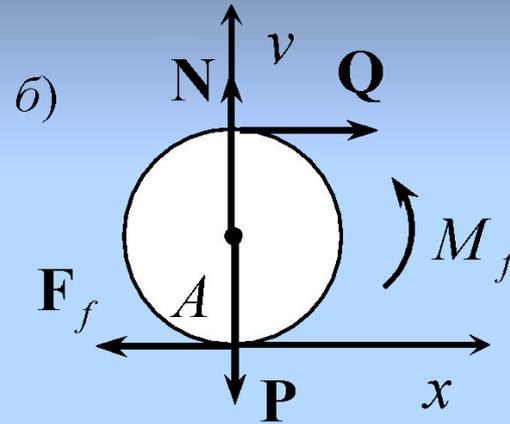
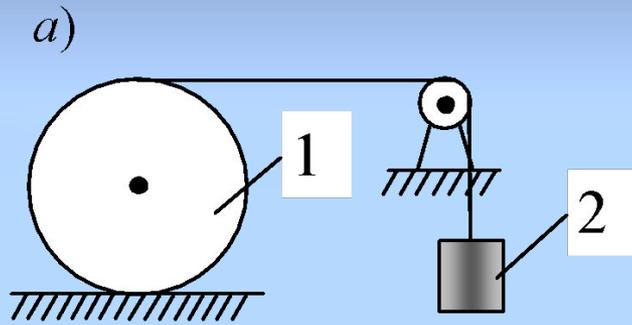
Задача 3

Дано:

$$P = 80 \text{ Н}$$

$$R = 0.5 \text{ м}$$

$$Q = 80 \text{ Н}$$



Определить:

наименьший k , при котором *каток останется в покое*

Замечание:

Предполагается, что *каток не будет скользить*

$$F_f^{\max} = f_s N > Q$$

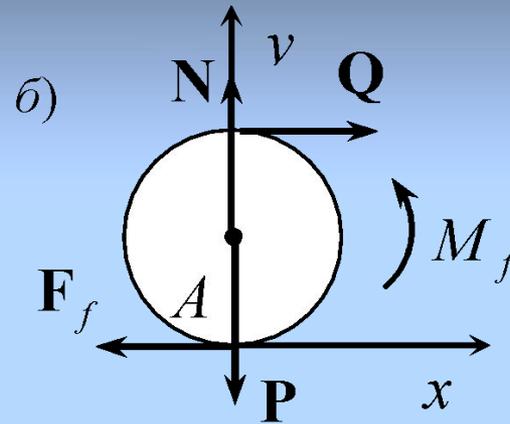
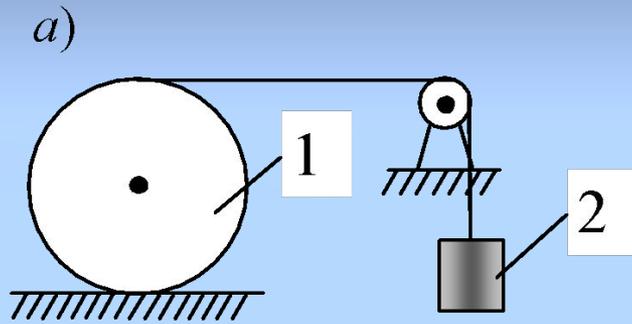
Задача 3

Дано:

$$P = 80 \text{ Н}$$

$$R = 0.5 \text{ м}$$

$$Q = 80 \text{ Н}$$



Решение:

Система сил, действующих на каток, показана на (рис. б).

Уравнение моментов относительно точки **A**

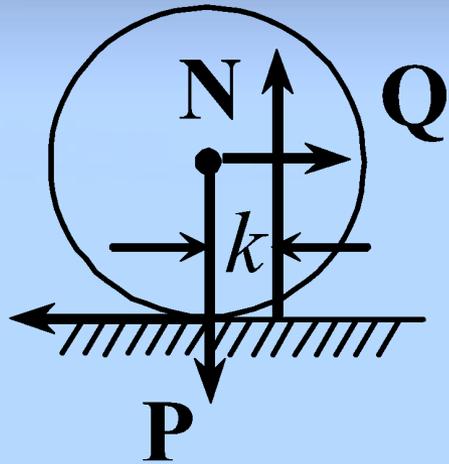
$$-Q \cdot 2R + M_f = 0$$

$$M_f = kN \quad \text{т.к. равновесие предельное} \quad k = 2QR / N$$

Так как $N=P$, то $k=0,008 \text{ м}$

Замечание: Рис.а задачи определяет простейший способ нахождения k (при этом Q *наименьший вес груза*, при котором *каток начнет катиться*).

Какое движение (скольжение или качение) реализуется на практике?



Будем увеличивать силу Q

Вопрос: Диск покатится или заскользит ?

Пока диск в покое $F_f = Q$, $M_f = QR$

Причем $F_f \leq f_s N$, $M_f \leq kN$

Т.е. в покое $Q \leq f_s N$, $Q \leq (k/R)N$

Следовательно, **режим движения** будет определяться **соотношением** f_s и k/R

Ответ:

Если $k/R < f_s$ то диск покатится,
если же $k/R > f_s$ то заскользит.

Пример. Колёса автомобиля

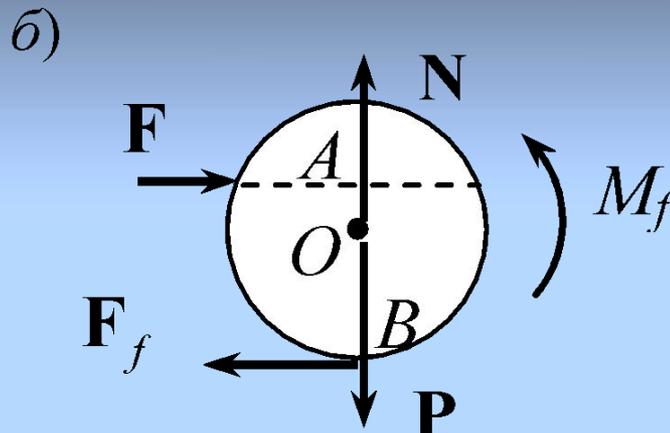
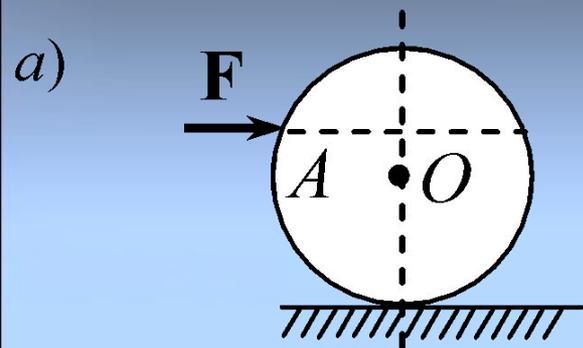
Для колес обычно $k / R < f$

и они катятся **без проскальзывания**.

Но иногда $k / R > f$

и тогда **колеса проскальзывают** (зимой – по льду, летом – по глинистой дороге после дождя).

Задача 4.



Дано:

$$k = 0,006 \text{ м}$$

$$f = 0,2$$

$$R = 0,6 \text{ м}$$

$$OA = 0,4 \text{ м}$$

Определить:

Наибольшую F при равновесии ?

Решение

Из условий равновесия получаем

$$\sum_i \mathbf{F}_{ix} = 0 \quad F_{\max}^{ск} = F_f^{пред} = fN = fP = 0,4 \text{ кН}$$

$$\sum_i M_P(\mathbf{F}_i) = 0 \quad M_f^{пред} = kN = kP = F_{\max}^{кач} \cdot AB \Rightarrow F_{\max}^{кач} = 0,012 \text{ кН}$$

Максимальная сила, при которой каток еще будет **в покое**

$$F_{\max} = F_{\max}^{кач} = 12 \text{ кН} \quad (\text{при } F > 12 \text{ кН каток начнет катиться})$$

Заключение

В случае скольжения:

- реакция шероховатой поверхности $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f$ имеет две составляющие: нормальную \mathbf{N} и касательную \mathbf{F}_f к поверхности:

- $F_f < f_s N$ в случае неопредельного равновесия,
- $F_f = f_s N$ в случае предельно равновесия.

В случае качения:

- реакция состоит из силы $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f$ и момента M_f
- $M_f < kN$ в случае неопредельного равновесия,
 - $M_f = kN$ в случае предельного равновесия.

В случае, когда тело может и скользить и катиться:

- если $k / R < f$, тело заскользит,
- если $k / R > f$, тело покатится.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите особенности реакции шероховатой поверхности.
2. Что такое сила трения покоя?
3. Что такое сила трения скольжения?
4. Сформулируйте закон трения Амонтона-Кулона.
5. Как измерить коэффициент трения?
6. Что такое угол трения?
7. Что такое конус трения?
8. Какой коэффициент трения больше – покоя или скольжения?
9. Как связан коэффициент трения с углом трения?
10. Что такое трение качения?
11. Сформулируйте закон трения качения?
12. В каком случае диск покатиться, а когда заскользит?

Тема следующей лекции

Кинематика. Лекция 1.

*Способы задания движения точки.
Траектория и скорость точки.*

