

# ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ

В конструкциях различных механизмов очень часто встречаются детали, работающие на совместное действие изгиба и кручения. Характерным примером таких деталей являются валы самых разнообразных устройств.

Силы, которые передаются на вал механизма, в общем случае приводят к появлению в поперечных сечениях вала крутящего момента  $T = M_x$ , изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ , а также поперечных сил  $F_y = F_z$ . Величиной касательных напряжений от изгиба обычно пренебрегают, поскольку она незначительна по сравнению с величиной касательных напряжений от кручения. Поэтому рассматривают фактически сочетание кручения с чистым изгибом.

Рассмотрим вал круглого поперечного сечения (рис.6). Используя принцип независимости действия сил, строим эпюры изгибающих моментов от нагрузок, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а также эпюру крутящих моментов. Составляя полученные эпюры, отметим, что опасными являются сечения I – I и II – II.

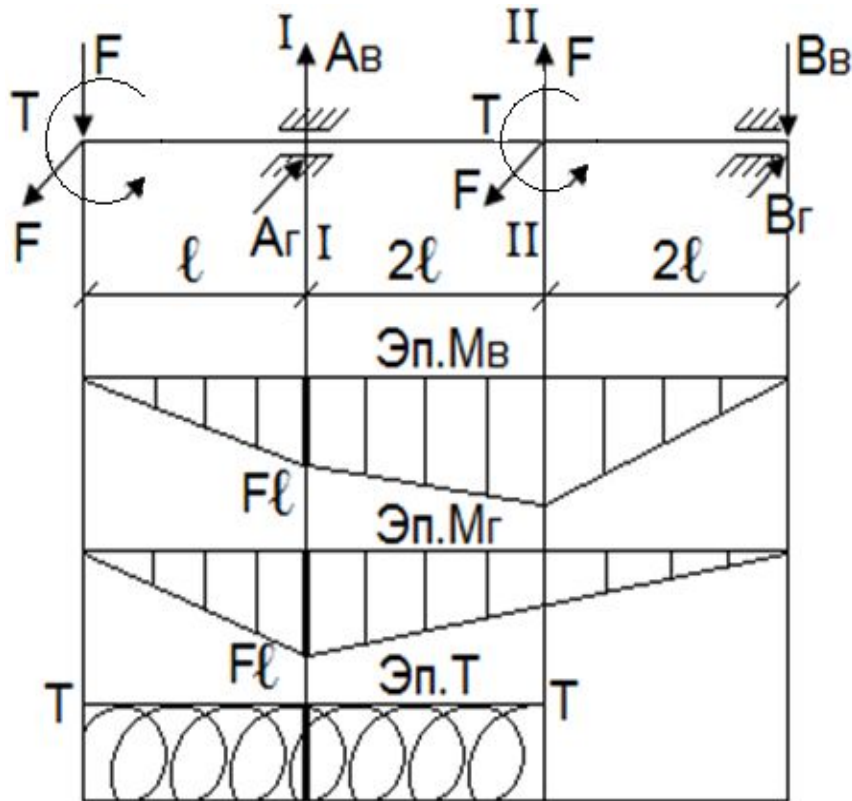


Рис.6.

В каждом сечении круглого вала имеет место прямой изгиб от действия результирующего изгибающего момента

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

Нормальные напряжения от этого момента достигают наибольших значений в крайних волокнах вала и определяются по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}.$$

В любой точке контура поперечного сечения вала действуют также максимальные касательные напряжения от кручения, связанные с величиной крутящего момента соотношением

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_w} = \frac{T}{2W}.$$

В формулах (15) и (16)  $W$  – осевой момент сопротивления сечения вала.

При изгибе с кручением элемент в опасной точке находится в плоском напряженном состоянии (рис.7).

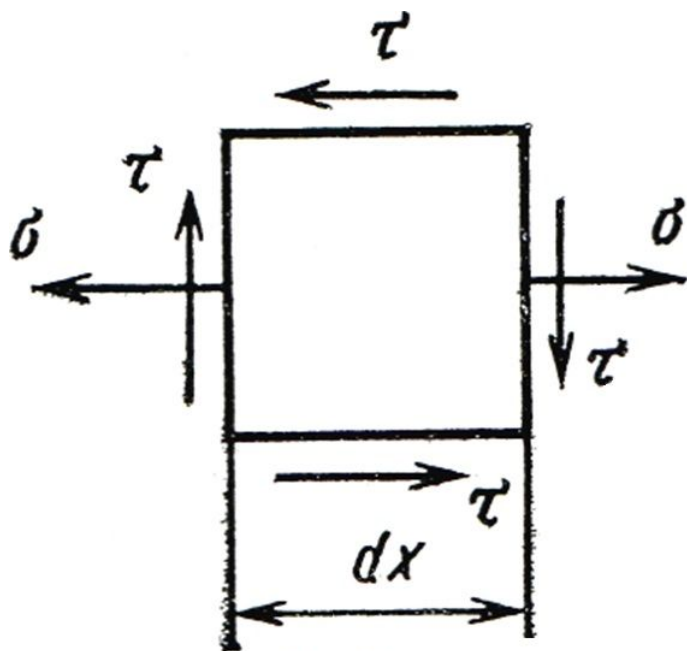


Рис.7.

Прочность вала в опасном сечении проверяют по формулам приемлемых теорий прочности. Воспользуемся условием прочности, исходя из третьей теории:  $\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} [\sigma]$ .

Подставив в это условие выражения (15) и (16) для напряжений  $\sigma$  и  $\tau$ , получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{(18W)}.$$

Если исходить из четвертой теории прочности, то  $\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$ .

Осуществив подстановки, аналогичные предыдущим, имеем:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75T^2}}{W} (19) \leq [\sigma].$$

Условия прочности (18) и (19) можно заменить одной формулой:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W} (20) \leq [\sigma],$$

где  $M_{\text{ЭКВ}}$  – эквивалентный (приведенный) момент.

Для третьей теории прочности:  $M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M^2 + T^2}$ ;

Для четвертой теории прочности:  $M_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2}$ .

Заметим, что все приведенные формулы применимы и для расчета валов кольцевого сечения.

.

# Задача № 4

Для стержня круглого сечения, испытывающего совместное действие изгиба и кручения, требуется:

- составить расчетную схему;
- построить эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости;
- построить эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости;
- построить эпюру крутящих моментов;
- определить положение опасного сечения;
- из расчета на прочность определить диаметр стержня в опасном сечении.

**Исходные данные:**

$$\begin{array}{lll} F_1 = 16 \text{ кН}; & F_2 = ?; & F_3 = 25 \text{ кН}; \\ l = 0,7 \text{ м}; & a = 40 \text{ см}; & b = 25 \text{ см}; \\ c = 40 \text{ см}; & \sigma_T = 290 \text{ МПа}; & n_T = 1,4 \end{array}$$

## Решение:

1. Определяем силу  $F_2$  из расчета  $\Sigma T = 0$ :

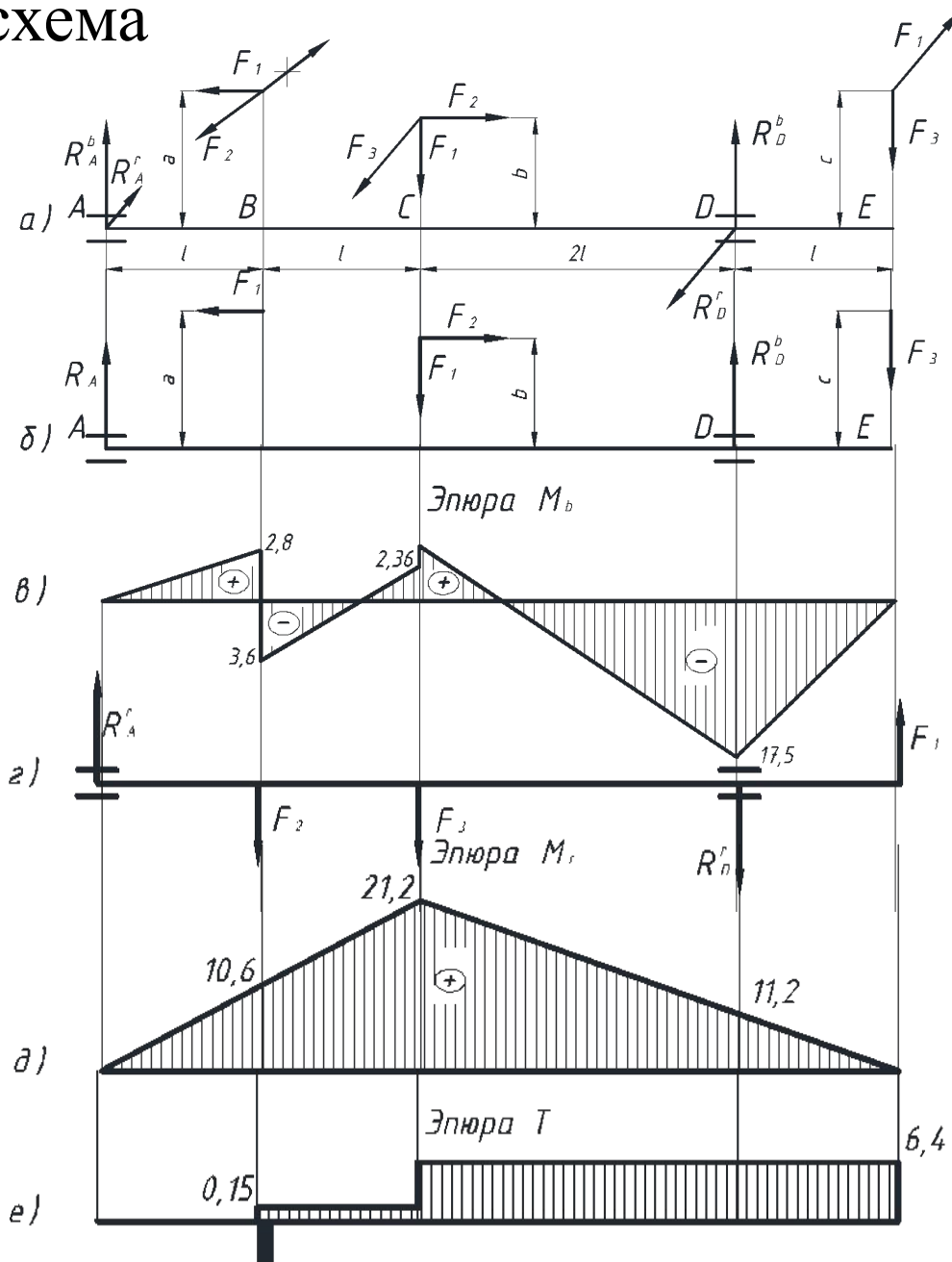
$$-F_2 * a + F_3 * b - F_1 * c = 0$$

откуда

$$F_2 = \frac{F_3 * b - F_1 * c}{a} = \frac{25 * 0,25 - 16 * 0,40}{0,40} = -0,375$$

Значит сила  $F_2$ , создающая крутящий момент, повернута в обратном направлении.

## 2. Расчетная схема



3. Определяем вертикальные реакции в опорах  $A$  и  $D$  и строим эпюру изгибающих моментов  $M^b$  в вертикальной плоскости по схеме б (рис, в).

$$\sum M_A = F_1 * a - F_1 * 2l - F_2 * b + R_D^b * 4l - F_3 * 5l = 0$$

откуда

$$R_D^b = \frac{F_1(2l - a) + F_2 * b + F_3 * 5l}{4l} =$$
$$= \frac{16(2 * 0,7 - 0,4) + 0,375 * 0,25 + 25 * 5 * 0,7}{4 * 0,7} = 36,98 \text{ кН}$$

$$\sum M_D = -R_A^b * 4l + F_1 * a + F_1 * 2l - F_2 * b - F_3 * l = 0$$

откуда

$$R_A^b = \frac{F_1(a + 2l) - F_2 * b - F_3 * l}{4l} =$$
$$= \frac{16(0,4 + 2 * 0,7) - 0,375 * 0,25 - 25 * 0,7}{4 * 0,7} = 4,02 \text{ кН}$$



**Проверка:**  $\Sigma F_b = 0$

$$R_A^b - F_1 + R_D^b - F_3 = 4,02 - 16 + 36,98 - 25 = 0$$

4. Определяем горизонтальные реакции в опорах  $A$  и  $D$  и строим эпюру изгибающих моментов  $M^F$  в горизонтальной плоскости по схеме г. Эпюра  $M^F$  условно совмещена с плоскостью чертежа (рис. д).

$$\Sigma M_A = -F_2 * l - F_3 * 2l - R_D^z * 4l + F_1 * 5l = 0$$

откуда

$$R_D^z = \frac{F_1 * 5 - F_2 - F_3 * 2}{5} =$$
$$= \frac{16 * 5 - 0,375 - 25 * 2}{5} = 5,92 \text{ кН}$$

$$\Sigma M_D = -R_A^z * 4l + F_2 * 3l + F_3 * 2l + F_1 * l = 0$$

откуда

$$R_A^z = \frac{F_2 * 3 + F_3 * 2 + F_1}{4} =$$

$$= \frac{0,375 * 3 + 25 * 2 + 16}{4} = 15,2 \text{ кН}$$

**Проверка:**  $\Sigma F_z = 0$

$$R_A^z - F_2 - F_3 - R_D^z + F_1 = 15,2 - 0,375 - 25 - 5,97 + 16 = 0$$

5. Определяем суммарные изгибающие моменты в сечениях В, С и D, как наиболее нагруженные:

$$M_{\Sigma}^B = \sqrt{6,4^2 + 10,6^2} = 12,4 \text{ кНм};$$

$$M_{\Sigma}^C = \sqrt{2,36^2 + 21,2^2} = 21,3 \text{ кНм};$$

$$M_{\Sigma}^D = \sqrt{17,5^2 + 11,2^2} = 20,8 \text{ кНм};$$

6. Строим эпюру крутящих моментов (рис. е)

7. Наиболее опасными сечениями являются сечения С и D, где действуют примером одинаковые изгибающие моменты  $M_{\Sigma}^C = 21,3$  кНм,  $M_{\Sigma}^D = 20,8$  кНм, и один и тот же крутящий момент  $T = 6,4$  кНм.

8. Для подбора сечения применяем четвертую гипотезу прочности для сечения С, как наиболее опасного:

$$W_x = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75 * T^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{21,3^2 + 0,75 * 6,4^2}}{207} * 10^6 = 106,32 * 10^3 \text{ мм}^3$$

где  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{290}{1,4} = 207 \text{ МПа}$

откуда

$$d = \sqrt[3]{W_x / 0,1} = \sqrt[3]{106,32 * 10^3 / 0,1} = 47,4 \text{ мм}$$

Принимаем  $d = 50$  мм.