РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК НА ИЗГИБ

Балки, внутренние усилия в которых не могут быть найдены из одних только уравнений равновесия, называются ***статически неопределимыми***.

Для расчета таких балок кроме уравнений статики необходимо составлять дополнительные уравнения, называемые ***уравнениями перемещений*** (или ***уравнениями деформаций***).

Они получаются из рассмотрения деформаций балки.

Рассмотрим, например, балку, изображенную на рис.1,а. Число неизвестных опорных реакций равно четырем: три реакции заделки и одна реакция подвижной опоры. Уравнений статики – три. Таким образом, лишних неизвестных – одно. Балка один раз статически неопределима.

Для расчета заданную статически неопределимую балку мысленно превращаем в статически определимую, удаляя лишние связи и заменяя их действие неизвестными реакциями.

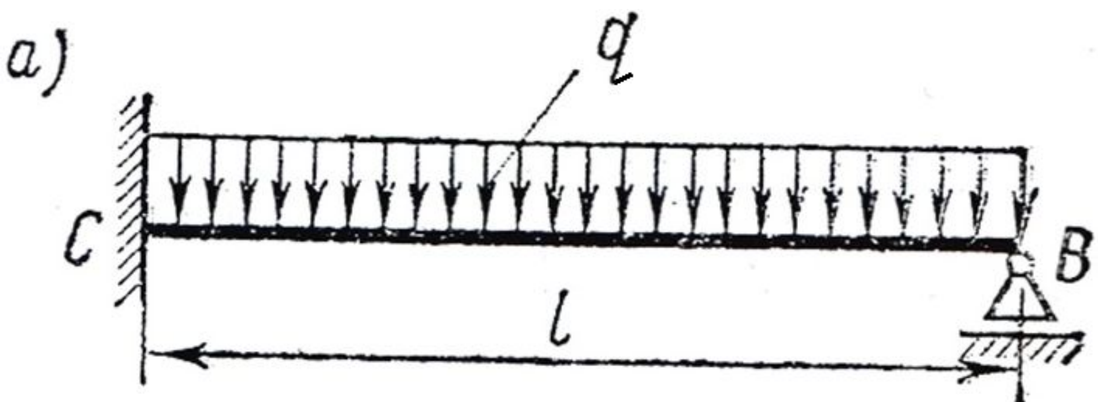


Рис.1,а

Полученную таким образом статически определимую систему называют ***основной системой***. Чтобы основная система не отличалась от заданной, необходимо потребовать, чтобы в основной системе перемещения сечений в местах удаленных связей равнялись нулю по направлению приложенных здесь неизвестных реакций.

Эти уравнения, выражающие условия совместимости перемещений основной системы со связями, наложенными на данную статически неопределимую систему, и дадут возможность решить поставленную задачу. Эти уравнения так и называются **уравнениями совместимости** или (**совместности деформаций**).

Для одной и той же статически неопределимой балки основная система может быть выбрана несколькими способами. Например, можно удалить подвижную опору, заменив ее неизвестной силой X_1 (рис.1,б). Уравнение деформации в этом случае будет выражать условие, что для обеспечения эквивалентности заданной и основной системы вертикальное перемещение правого конца балки (точки B) под действием нагрузки q и силы X_1 должно быть равно нулю.

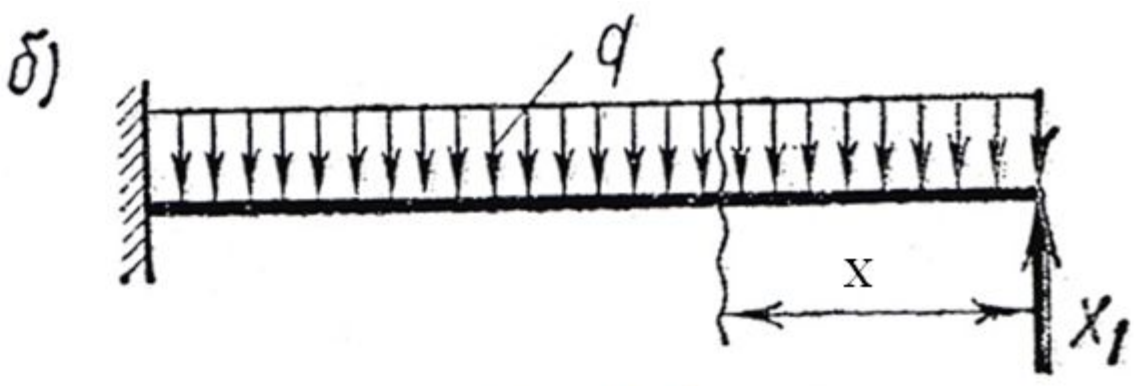


Рис.1,б

Во втором варианте основной системы (рис.1,в) удалена связь, препятствующая повороту левого сечения (заделка заменена шарнирно неподвижной опорой).

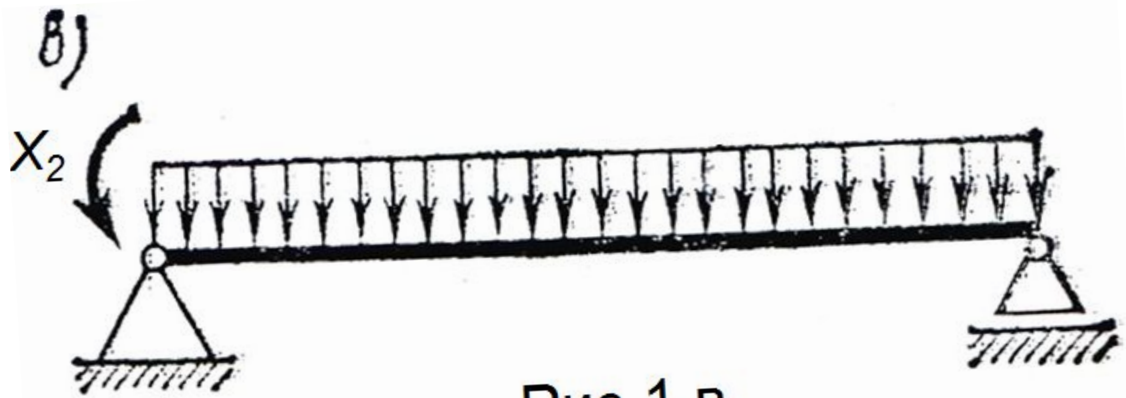


Рис.1,в

Ее действие заменено неизвестным моментом X_2. Дополнительное уравнение выражает условие, что угол поворота сечения в точке С под действием нагрузки q и момента X_2 равен нулю.

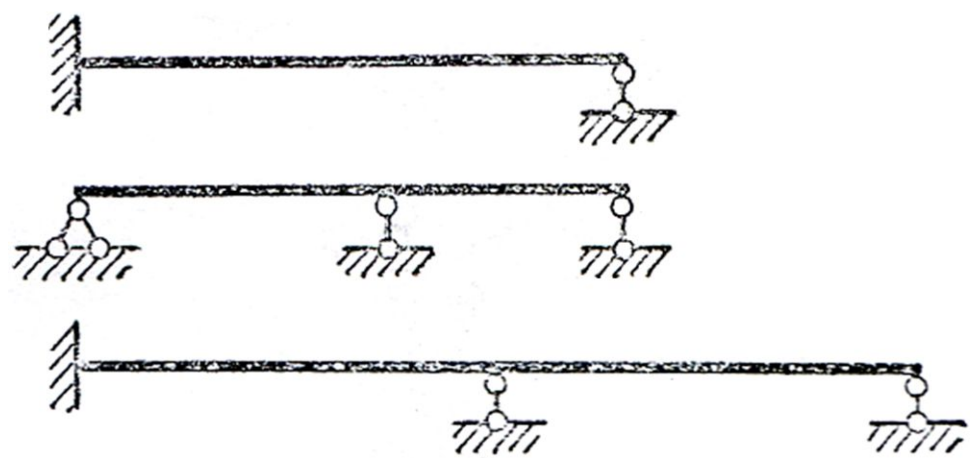
Выбор той или иной основной системы не оказывает влияния на окончательный результат расчета. Окончательные эпюры M и Q будут одинаковы независимо от выбора основной системы.

Метод расчета статически неопределимых систем (метод сил)

При расчете статически неопределимых систем по методу сил в качестве неизвестных принимают усилия, заменяющие действие отброшенных (лишних) связей.

Лишние связи – это связи, лишние с точки зрения обеспечения неподвижности бруса как жесткого целого. На плоскости неподвижность бруса может быть обеспечена тремя соответствующими образом наложенными связями. Такие связи называют *необходимыми*.

В пространстве неподвижность бруса обеспечивается шестью связями.



Введение дополнительных опорных закреплений (связей). повышает прочность и жесткость балки.

Вместе с тем необходимо иметь в виду, что даже при незначительном смещении одной опоры относительно другой в направлении, перпендикулярном к оси балки, напряжения в ней резко возрастают. К таким смещениям могут привести и осадка опор в процессе эксплуатации конструкции, и погрешности ее монтажа.

Вследствие этого многоопорные оси и валы (являющиеся статически неопределимыми балками) применяют сравнительно редко – процесс сборки, к которому предъявляют требования весьма высокой точности, получается очень трудоемким.

Последнее может быть следствием износа подшипников, общей деформации машины и ряда других причин.

Порядок расчета статически неопределимых систем по методу сил

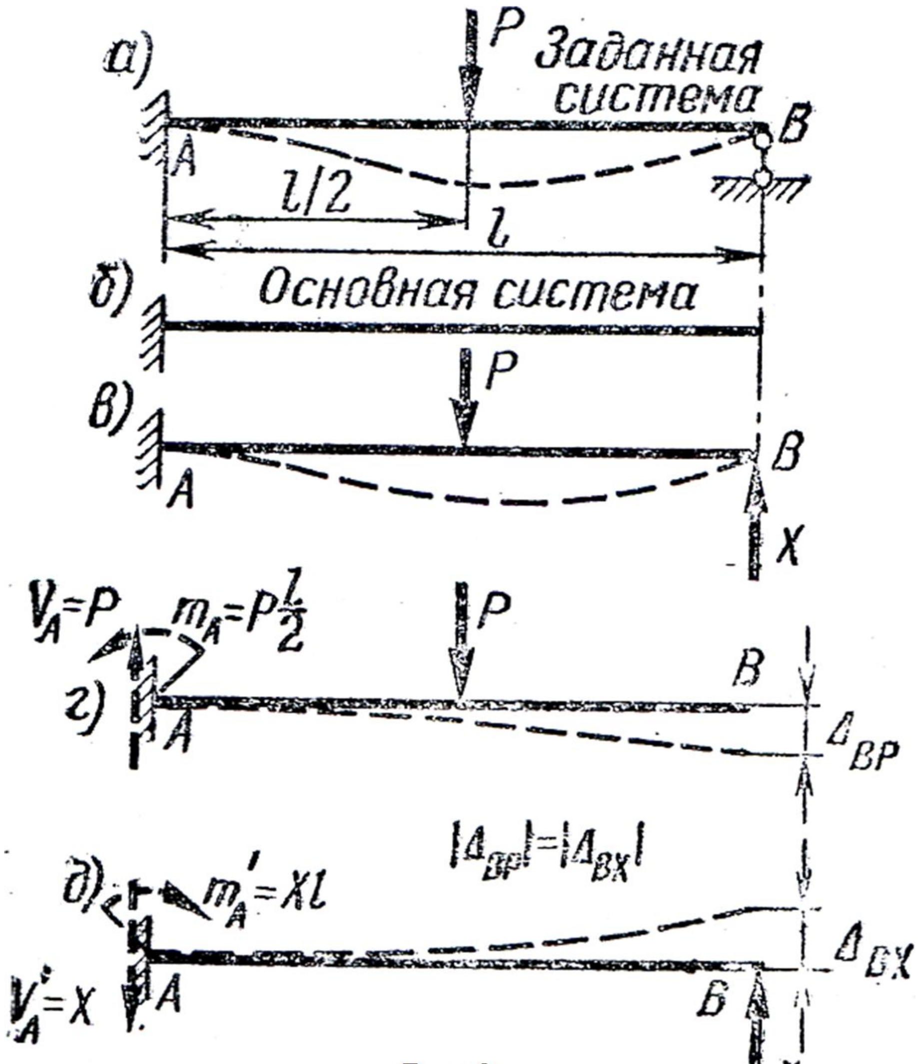


Рис.2

1. Вначале определяется степень статической неопределимости системы путем подсчета числа лишних связей.

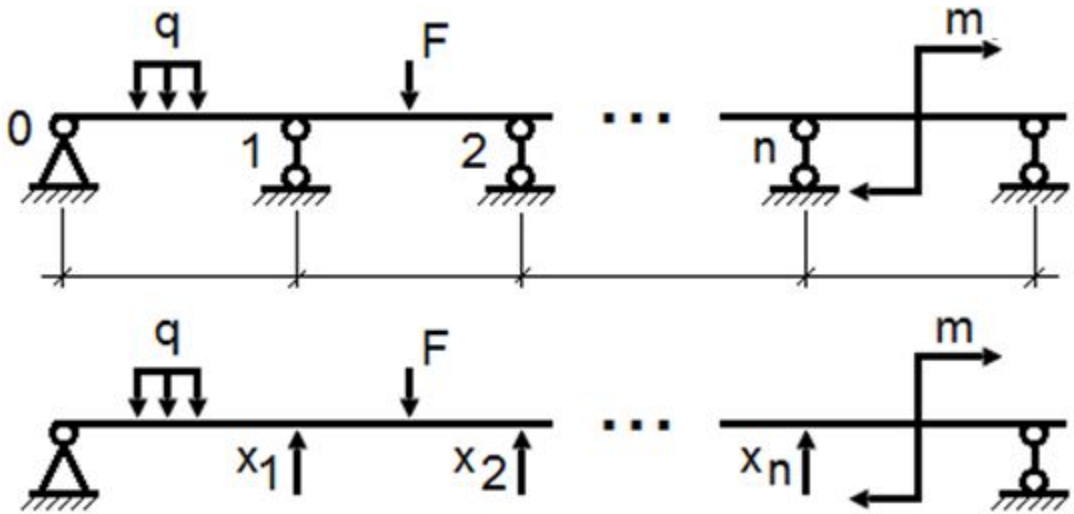
2. Затем выбирается *основная система*, которая получается из заданной системы после удаления лишних связей. Удаленные связи заменяются лишними неизвестными усилиями.

3. Составляются уравнения деформаций (точнее, перемещений), которые выражают условия совместимости перемещений основной системы с заданной статически неопределимой системой. Если перемещения по направлению отброшенных связей в основной системе должны быть равны нулю, то уравнения перемещений выражают равенство нулю этих перемещений.

4. Решаются полученные уравнения.

5. После определения лишних неизвестных находятся внутренние усилия в элементах статически неопределимой системы (изгибающие моменты, поперечные силы и т.д.).

Метод сил. Канонические уравнения



$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \ \dots\ , \Delta_{n-1} = 0, \Delta_n = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \dots + \Delta_{1n} + \Delta_{1q} + \Delta_{1m} + \Delta_{1F} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \dots + \Delta_{2n} + \Delta_{2q} + \Delta_{2m} + \Delta_{2F} = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

1ый – индекс, показывающий, в направлении какого неизвестного усилия определяется перемещение;
2ой – индекс, указывающий, от какого усилия определяется перемещение.

$$\begin{aligned} &\Delta_{11} = \delta_{11} \cdot x_1, \Delta_{12} = \delta_{12} \cdot x_2 \\ &\Delta_{1n} = \delta_{1n} \cdot x_n, \ \Delta_{1f} = \Delta 1q + \Delta 1m + \Delta 1F \end{aligned} \qquad (3)$$

Уравнения перемещений при расчете статически неопределимых систем методом сил записываются в определенной (***канонической***) форме.

Если заданная статически неопределимая система имеет *n* лишних неизвестных, то система *n* канонических уравнений для определения этих неизвестных в общем виде записывается так:

$$\delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \ldots + \delta_{1n} \cdot x_n + \Delta_{1f} = 0$$
$$\delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \ldots + \delta_{2n} \cdot x_n + \Delta_{2f} = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$\delta_{n1} \cdot x_1 + \delta_{n2} \cdot x_2 + \ldots + \delta_{nn} \cdot x_n + \Delta_{nf} = 0$$

В первом уравнении δ_{11} – перемещение точки приложения первого лишнего неизвестного по собственному направлению, вызванное действием единичного значения этого неизвестного. Произведение $\delta_{11} \cdot x_1$ представляет собой перемещение той же точки по тому же направлению, вызванное силой x_1.

Второй член $\delta_{12} \cdot x_2$ есть перемещение той же точки по тому же направлению, вызванное силой x_2 и т.д.

Член Δ_{1f} есть перемещение в том же месте и потому же направлению, вызванное внешней нагрузкой.

В целом вся левая часть первого уравнения представляет собой суммарное перемещение точки приложения силы X_1 по направлению этой силы, вызванное всеми силами. Это перемещение приравнивается к нулю, так как в заданной системе оно отсутствует.

Второе уравнение выражает то условие, что суммарное перемещение точки приложения силы X_2 по направлению этой силы от всех воздействий равно нулю.

Обратимся еще раз к той же, что и ранее, один раз статически неопределимой балке (рис.3,а). Выберем основную систему, как в первом случае (рис.2,б).

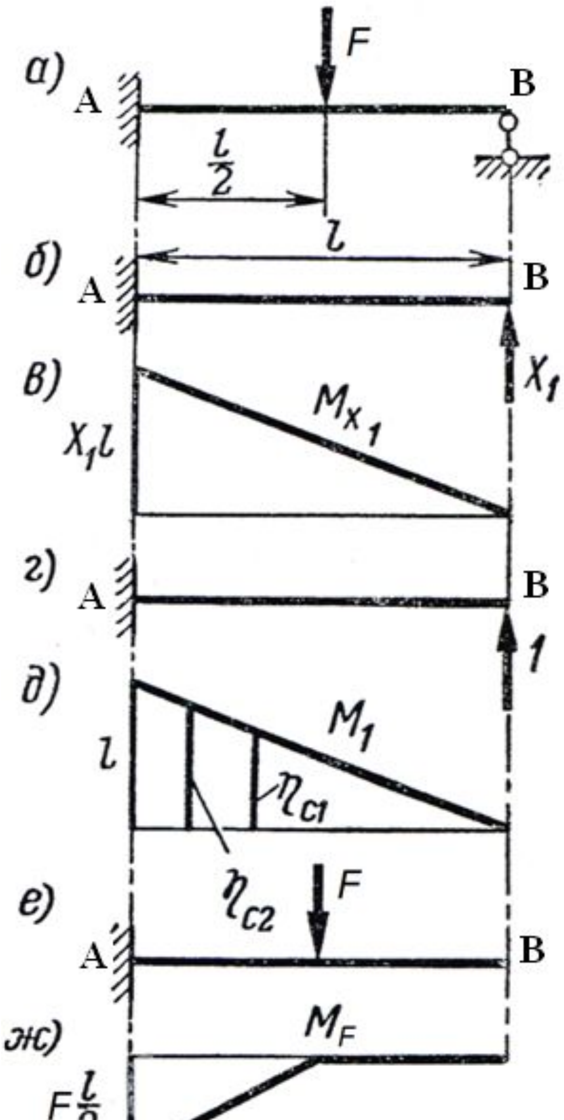


Рис. 3

Нагружаем основную систему искомой реакцией и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов (рис.3,б,в).

Для определения перемещения $\Delta_{B1} = \Delta_{11}$ прикладываем к основной системе единичную силу в месте и по направлению искомого перемещения (рис.3,г) и строим эпюру M_1 (рис.3,д).

По общему правилу для нахождения Δ_{11} следует перемножить эпюры M_{x1} и M_1, но эти эпюры совершенно тождественны, т.е. очевидно, что достаточно построить эпюру M_1.

Перемещение от силы X_1 больше, чем перемещение от единичной силы, приложенной взамен X_1 (это δ_{11}), в X_1 раз, т.е. $\mathbf{\Delta_{11} = X_1\, \delta_{11}}$.

Перемещение δ_{11} определяется путем умножения единичной эпюры моментов самой на себя, т.е. площадь этой эпюры (в рассматриваемом примере $\omega_1 = (1/2)\cdot\ell\cdot\ell$) умножается на ординату этой же эпюры, соответствующую ее центру тяжести (здесь $\eta_{1C} = (2/3)\cdot\ell$). Величина δ_{11} *существенно положительна*.

Для определения перемещения Δ_{1F} от заданной нагрузки прикладываем к основной системе эту нагрузку (силу F) и строим соответствующую эпюру моментов M_F (рис.3,е,ж). Единичная эпюра моментов уже построена (рис. 3,д) и для нахождения Δ_{1F} достаточно перемножить эпюры M_F и M_1.

Окончательно уравнение перемещений, выражающее равенство нулю перемещения в направлении отброшенной связи (от совместного действия заданной нагрузки и реакции этой связи), записывают в виде:

$$\mathbf{X_1\,\delta_{11} + \Delta_{1F} = 0}$$

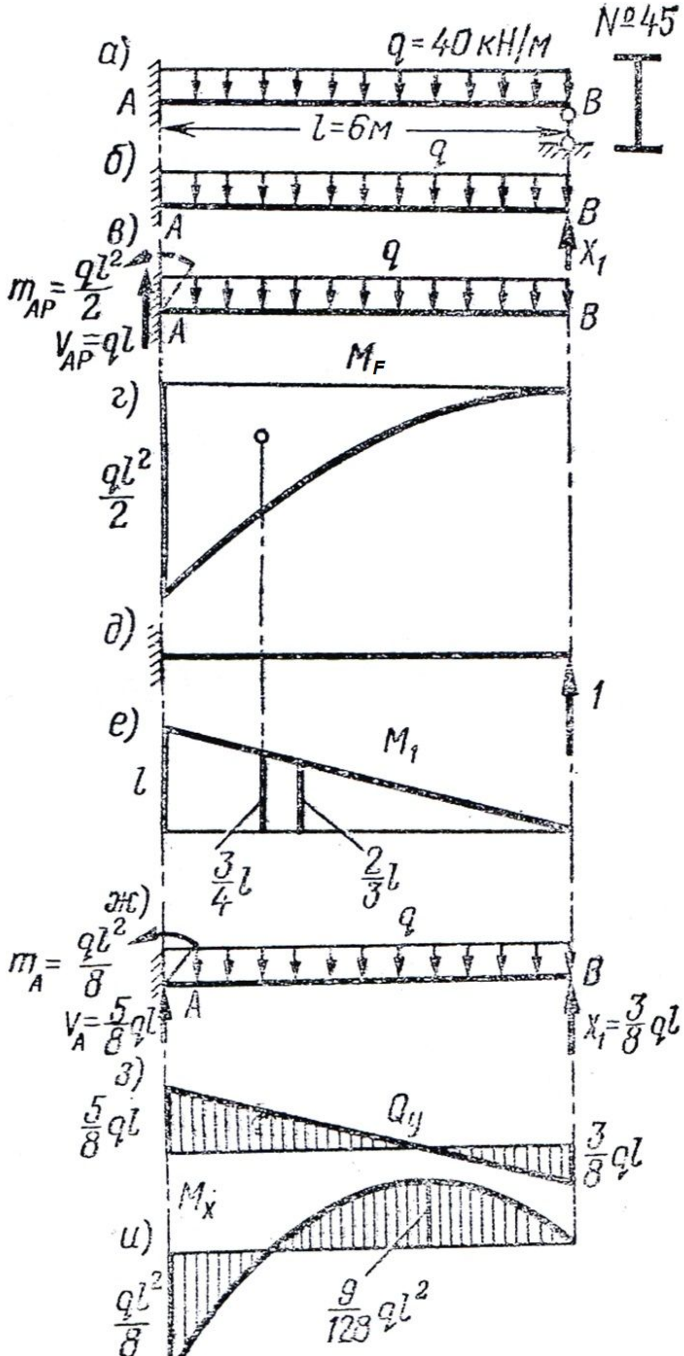


Рис. 4

Пример 1. Проверить прочность заданной балки (рис.4) при $[\sigma]=150$ Н/мм^2.

Решение. Для проверки на прочность надо найти наибольший изгибающий момент (построить эпюр M_X), а это в свою очередь требует определения опорных реакций, которые в данном случае нельзя найти из уравнений статики – балка один раз статически неопределима.

Основную систему выбираем, отбрасывая шарнирно подвижную опору. Основная система с заданной нагрузкой и лишней неизвестной показана на рис.4,б. Для определения перемещений, входящих в каноническое уравнение $\mathbf{X_1\, \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0}$

(индекс F надо понимать как символ любой заданной нагрузки, а не обязательно сосредоточенной силы F), нагружаем основную систему заданными силами (рис.4,в), строим эпюру M_F (рис.4,г); затем прикладываем к основной системе единичную силу (рис.4,д) и строим эпюру M_1 (рис.4,е).

Умножая эпюру M_1 саму на себя, находим:

$$\boldsymbol{\delta_{11} = 1/EJ_x \cdot(1/2 \cdot\ell \cdot\ell \cdot 2/3 \cdot\ell) = \ell^3 / 3EJ_x}\,.$$

Перемножая эпюры M_F и M_1, получаем:

$$\boldsymbol{\Delta_{1F} = -\ 1/EJ_x \cdot(1/3 \cdot q\ell^3/2 \cdot 3/4 \cdot\ell) = -\ q\ell^4 / 8EJ_x}\,.$$

Подстановка значений δ_{11} и Δ_{1F} в каноническое уравнение дает:

$$\boldsymbol{X_1 \cdot \ell^3 / 3EJ_x - q\ell^4 / 8EJ_x = 0},$$

откуда $\boldsymbol{X_1 = 3/8 \cdot q \cdot \ell}$.

Основная система, нагруженная заданными силами и найденной реакцией X_1, показана на рис.4,ж. Строим для нее эпюры Q_y и M_x (рис.4,з,и). Эпюра M_x построена в более крупном масштабе, чем эпюра M_F.

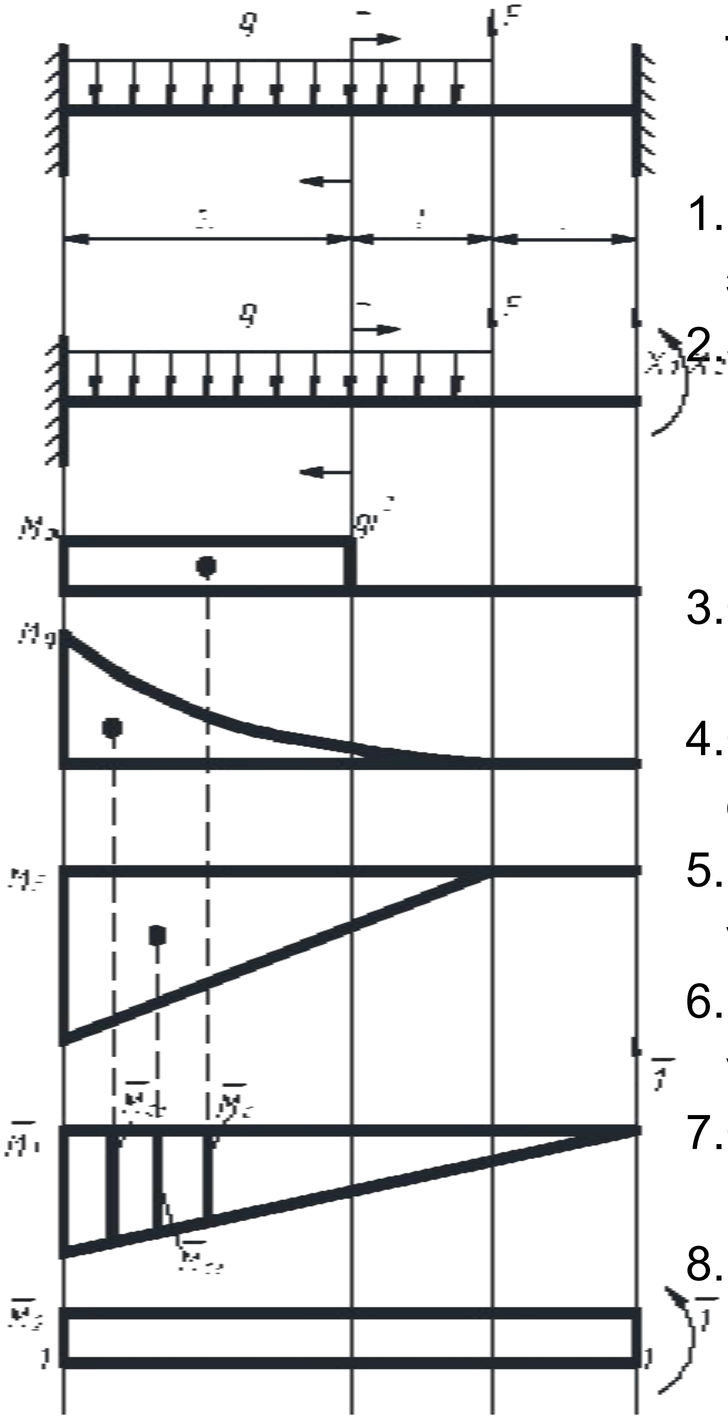
Построив эпюры, получаем, что реакция заделки равна $(5/8)\cdot q\ell$ и реактивный момент равен $(1/8)\cdot q\ell^2$.

Опасное сечение в заделке. Наибольшее напряжение

$$\boldsymbol{\sigma_{max} = M_{x,\,max} / W_x = (1/8)\cdot q\ell^2 / W_x = 40\cdot(6\cdot 10^3)^2 / 8\cdot 1231\cdot 10^3 = 145{,}8\ \text{Н/мм}^2},$$

где W_x = 1231 см^2 принято для двутавра №45 по таблице сортамента.

Балка недогружена на 2,80%.



<u>Пример 2</u>. Дано: q, F, m, L, σ_T , n_T .

Решение: Система дважды статически неопределимая

1. Выбираем основную систему. Изображаем эквивалентную систему.
2. Записываем канонические уравнения:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

3. Строим эпюры изгибающих моментов внешних нагрузок.
4. Строим эпюры изгибающих моментов от единичных нагрузок.
5. Подсчитываем коэффициенты в канонических уравнениях.
6. Подставляем полученные значения в исходные уравнения и находим X_1 и X_2 .
7. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
8. Производим расчеты на прочность и определяем размер поперечного сечения.