

Тема. Колебания линейных распределенных систем

Семинар 11. Изгибные колебания стержня

В технической теории изгибные колебания стержня описывают уравнением при $p = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho F \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0 \quad (10.1)$$

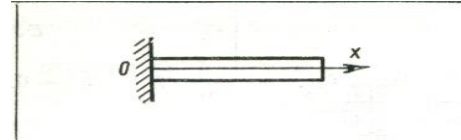
Если стержень имеет постоянные по длине характеристики $EJ = \text{const}$, $\rho F = \text{const}$, то уравнение для исследования собственных колебаний будет следующим:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10.2)$$

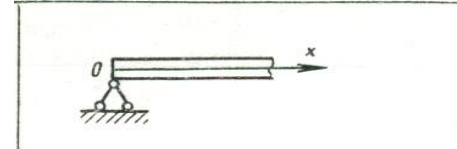
Функция $w(x, t)$ на концах стержня должна удовлетворять краевым условиям, соответствующим характеру закрепления концов стержня.

Основные типы краевых условий для изгибных колебаний стержней

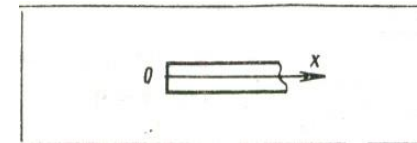
$$1. w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$



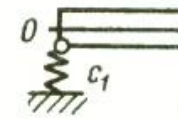
$$2. w = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$



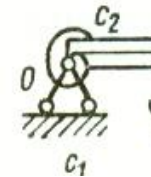
$$3. \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$



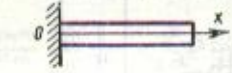
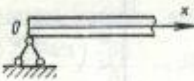
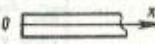
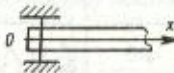
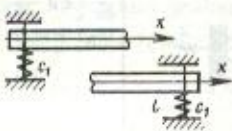
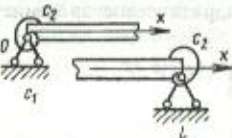
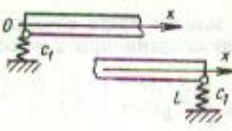
$$4. \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - c_1 w = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

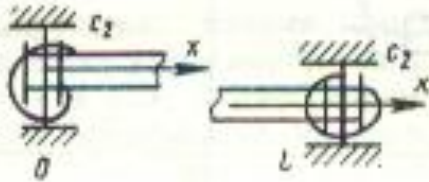
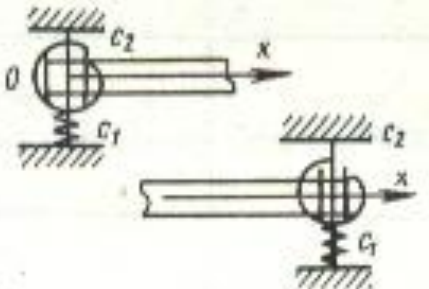
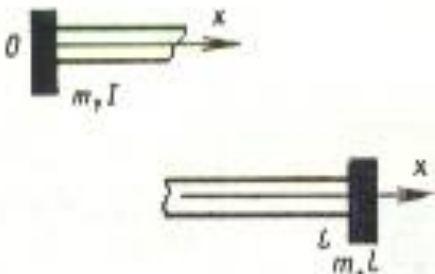


$$5. w = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

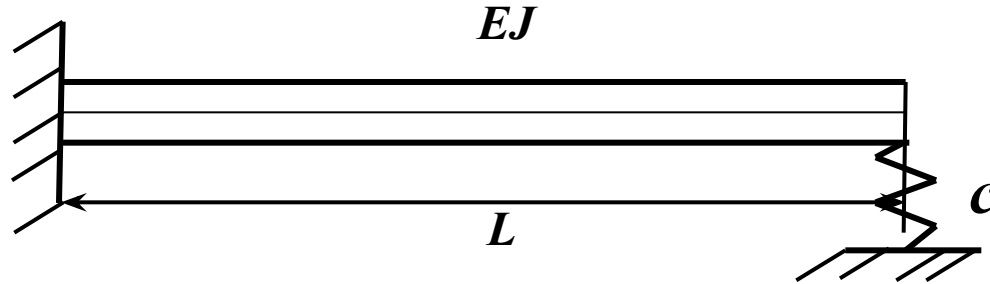


6. Основные типы краевых условий для изгибных колебаний стержней

Вид закрепления	Схема	Условия при $x = 0$
Заделка		$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$
Свободное опирание		$w = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
Свободный конец		$\frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
Плавающая заделка		$\frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$
Упругое закрепление		$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - c_1 w &= 0, & \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + c_2 w &= 0, & \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">(при $x = l$)</p>
		$\begin{aligned} EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ w = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">(при $x = l$)</p>
		$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - c_1 w &= 0, & EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + c_2 w &= 0, & EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">(при $x = l$)</p>

Вид закрепления	Схема	Условия при $x = 0$
Упругое закрепление		$EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$ $EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ <p style="text-align: right;">(при $x = l$)</p>
		$\frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - c_1 w = 0,$ $EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + c_1 w = 0,$ <p style="text-align: right;">(при $x = l$)</p> $EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ <p style="text-align: right;">(при $x = l$)</p>
Сосредоточенный инерционный элемент на конце		$\frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ $EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ <p style="text-align: right;">(при $x = l$)</p> $EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$ <p style="text-align: right;">(при $x = l$)</p>

Пример 1. Определить собственные частоты и формы изгибных колебаний стержня



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10.2)$$

Начальные условия для определения собственных частот всегда нулевые

Решение уравнения имеет вид

$$w(x, t) = W(x) \sin \omega t \quad (10.3)$$

Подстановка (10.3) в (10.2) приводит к уравнению

$$W^{IV} - \beta^4 W = 0 \quad (10.3)$$

Граничные условия при $x=0$ и $x=L$ для $W(x)$

$$W(0) = 0; \quad W'(0) = 0; \quad W''(L) = 0; \quad W'''(L) = -\frac{c}{EJ} W(L); \quad (10.13)$$

$$W(0) = 0; \quad W'(0) = 0; \quad W''(L) = 0; \quad W'''(L) = -\frac{c}{EJ}W(L) \quad (10.13)$$

Общее решение в виде

$$W(x) = W(0)S_1(\beta x) + \frac{W'(0)}{\beta} S_2(\beta x) + \frac{W''(0)}{\beta^2} S_3(\beta x) + \frac{W'''(0)}{\beta^3} S_4(\beta x) \quad (10.10)$$

Два первых условия (10.13) дают

$$W(x) = C_3 S_3(\beta x) + C_4 S_4(\beta x) \quad (10.14)$$

Производные

$$W''(x) = C_3 \beta^2 S_1(\beta x) + C_4 \beta^2 S_2(\beta x);$$

$$W'''(x) = C_3 \beta^3 S_4(\beta x) + C_4 \beta^3 S_1(\beta x)$$

Подстановка (10.14) в последние два условия (10.13)

$$C_3 S_1(\beta L) + C_4 S_2(\beta L) = 0 \quad (10.15)$$

$$C_3 [\beta^3 S_4(\beta L) + \frac{c}{EJ} S_3(\beta L)] + C_4 [\beta^3 S_1(\beta L) + \frac{c}{EJ} S_4(\beta L)] = 0$$

$$C_3 S_1(\beta L) + C_4^2 S_2(\beta L) = 0 \quad (10.15)$$

$$C_3[\beta^3 S_4(\beta L) + \frac{c}{EJ} S_3(\beta L)] + C_4[\beta^3 S_1(\beta L) + \frac{c}{EJ} S_4(\beta L)] = 0$$

Условием ненулевого решения является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} S_1(\beta L) & S_2(\beta L) \\ S_4(\beta L) + \frac{c}{EJ\beta^3} S_3(\beta L) & S_1(\beta L) + \frac{c}{EJ\beta^3} S_4(\beta L) \end{vmatrix} = 0 \quad (10.16)$$

или

$$S_1^2(\beta L) - S_2(\beta L) S_4(\beta L) + \frac{c}{EJ\beta^3} [S_1(\beta L) S_4(\beta L) - S_2(\beta L) S_3(\beta L)] = 0 \quad (10.17)$$

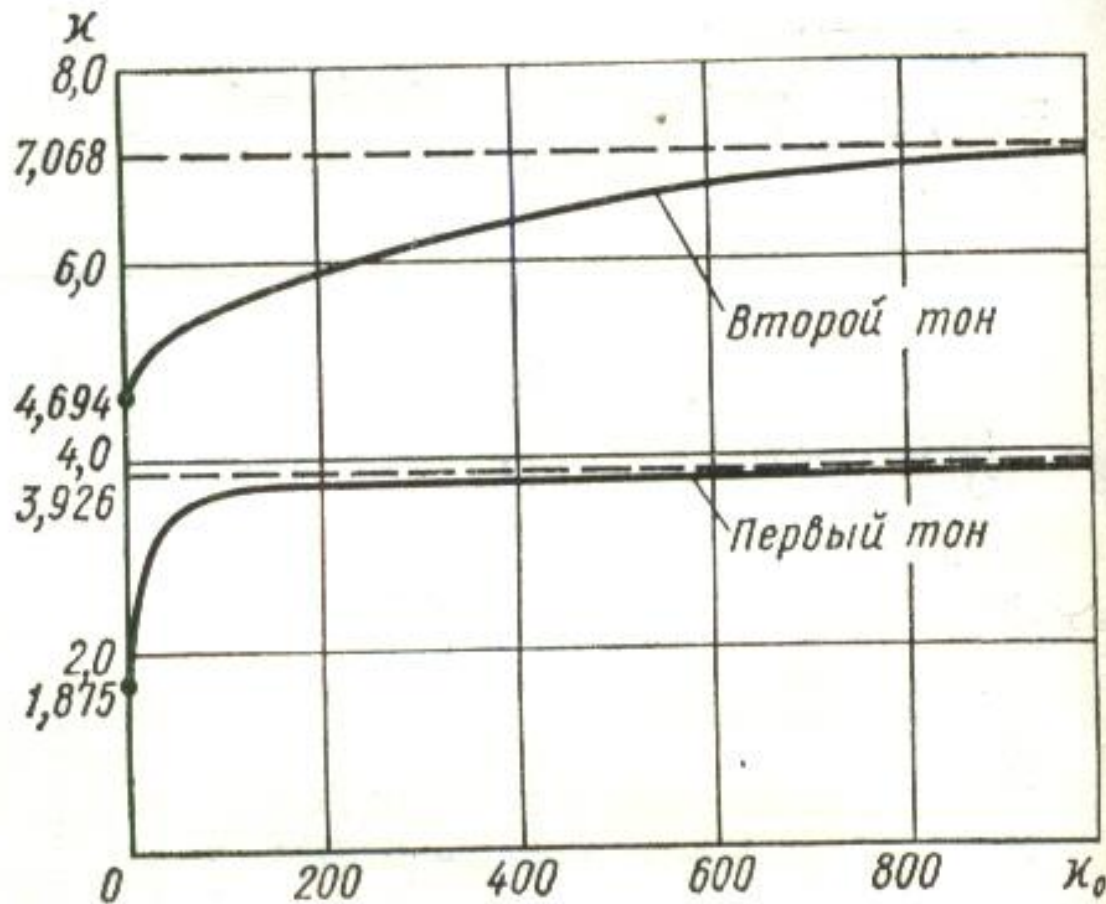
$$S_1^2(\chi) - S_2(\chi) S_4(\chi) + \frac{\chi_0^3}{\chi^3} [S_1(\chi) S_4(\chi) - S_2(\chi) S_3(\chi)] = 0 \quad (10.17a)$$

$$\text{где } \chi = \beta L; \quad \chi_0^3 = \frac{cL^3}{EJ} \quad (10.18)$$

Используя выражения для функций Крылова (10.9), получим следующее уравнение частот:

$$1 - ch\chi \cos \chi + \frac{\chi_0^3}{\chi^3} [sh\chi \cos \chi - ch\chi \sin \chi] = 0 \quad (10.19)$$

На рис. 2. показана зависимость первых двух корней уравнения (10.19) от χ_0



$$1 - ch\chi \cos \chi + \frac{\chi_0^3}{\chi^3} (sh\chi \cos \chi - ch\chi \sin \chi) = 0 \quad (10.19)$$

Если $\chi = \chi_k$ $k = 1, 2, 3 \dots$ - корень уравнения (10.19), то собственная частота

$$\omega_k = \frac{\chi_k^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \quad (10.20)$$

Форма колебаний определяется функцией

$$W_k(x) = S_3\left(\chi_k \frac{x}{L}\right) - \frac{S_1(\chi_k)}{S_2(\chi_k)} S_4\left(\chi_k \frac{x}{L}\right) \quad (10.21)$$

Балочные функции. Собственные формы изгибных колебаний стержней с постоянными по длине характеристиками для различных краевых условий называют балочными функциями.

Так, формула 10.21) определяет балочную функцию для стержня с одним заделанным и другим опертым на линейную пружину концом.