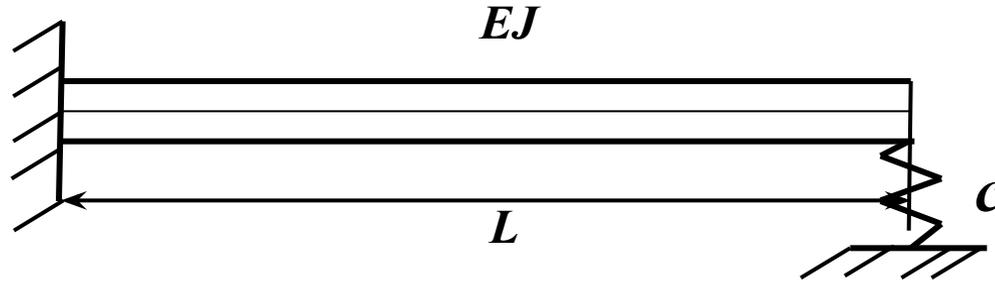


Семинар 12. Изгибные колебания стержня

Собственные частоты и формы изгибных колебаний стержня



$$1 - ch\chi \cos \chi + \frac{\chi_0^3}{\chi^3} (sh\chi \cos \chi - ch\chi \sin \chi) = 0 \quad (10.19)$$

Если $\chi = \chi_k$ $k = 1, 2, 3 \dots$ - корень уравнения (10.19), то собственная частота

$$\omega_k = \frac{\chi_k^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \quad (10.20)$$

$$W_k(x) = S_3\left(\chi_k \frac{x}{L}\right) - \frac{S_1(\chi_k)}{S_2(\chi_k)} S_4\left(\chi_k \frac{x}{L}\right) \quad (10.21)$$

$$1 - ch\chi \cos \chi + \frac{\chi_0^3}{\chi^3} (sh\chi \cos \chi - ch\chi \sin \chi) = 0 \quad (10.19)$$

Некоторые другие граничные условия

2. При $\chi_0 = 0$ ($c=0$) уравнение (10.19) переходит в уравнение (10.20), совпадающее с уравнением для консольного стержня

$$ch\chi \cos \chi = -1 \quad (10.20)$$

Корни уравнения

$$\chi_k = \frac{\pi}{2}(2k-1) \quad \chi_1 = \frac{\pi}{2} = 1.57, \quad \chi_2 = \frac{3\pi}{2} = 4.70$$

Определить собственные частоты колебаний системы в Гц:

$L = 60$ м, сечение трубчатое $d = 1$ м и $D = 1.1$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7800$ кг/м³

$$\omega_1 = \frac{1.57}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \quad \frac{J}{F} = \frac{2\pi(D^2 - d^2)(D^2 + d^2)}{4\pi(D^2 - d^2)} = \frac{(D^2 + d^2)}{2}$$

$$\omega_1 = \frac{1.57}{L^2} \sqrt{\frac{E(D^2 + d^2)}{\rho \cdot 2}} = \frac{1.57}{3600} \sqrt{2.9 \cdot 10^6} = \frac{1.57 \cdot 5.4 \cdot 10^3}{3600} = 2.36 \text{ 1/с}$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 0.375 \text{ Гц}$$

Формы собственных колебаний системы:

$$W(\beta x) = (sh\beta x + \sin \beta x)(ch\beta x - \cos \beta x) - (ch\beta x + \cos \beta x)(sh\beta x - \sin \beta x) \quad (10.23)$$

$$1 - ch\chi \cos \chi + \frac{\chi_0^3}{\chi^3} (sh\chi \cos \chi - ch\chi \sin \chi) = 0 \quad (10.19)$$

3. При $\chi_0 \rightarrow \infty$ ($c \rightarrow \infty$) уравнение (10.19) переходит в уравнение (10.21), совпадающее с уравнением частот для стержня, один конец которого – заделка, а второй свободно оперт

$$\frac{\chi^3}{\chi_0^3} (1 - ch\chi \cos \chi) + (sh\chi \cos \chi - ch\chi \sin \chi) = 0 \quad (10.19a)$$

$$tg\chi - tg\chi = 0 \quad (10.21)$$

Корни уравнения

$$\chi_k = \frac{\pi}{4} (2k + 1) \quad \chi_1 = \frac{3\pi}{4} = 2.36, \quad \chi_2 = \frac{5\pi}{4} = 3.93$$

Определить собственные частоты колебаний системы в Гц:

$L = 60$ м, сечение трубчатое $d = 1$ м и $D = 1.1$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7800$ кг/м³

$$\omega_1 = \frac{2.36}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \quad \frac{J}{F} = \frac{2\pi(D^2 - d^2)(D^2 + d^2)}{4\pi(D^2 - d^2)} = \frac{(D^2 + d^2)}{2}$$

$$\omega_1 = \frac{2.36}{L^2} \sqrt{\frac{E(D^2 + d^2)}{\rho \cdot 2}} = \frac{2.36}{3600} \sqrt{2.9 \cdot 10^6} = \frac{2.36 \cdot 5.4 \cdot 10^3}{3600} = 3.54 \text{ 1/c}$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 0.554 \text{ Гц}$$

Формы собственных колебаний системы:

$$W(\beta x) = (sh\beta x + \sin \beta x)(ch\beta x - \cos \beta x) - (ch\beta x - \cos \beta x)(sh\beta x - \sin \beta x) \quad (10.24)$$

αx	$S(\alpha x)$	$T(\alpha x)$	$U(\alpha x)$	$V(\alpha x)$
0,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,01	1,0000	0,0100	0,0000	0,0000
0,02	1,0000	0,0200	0,0002	0,0000
0,03	1,0000	0,0300	0,0004	0,0000
0,04	1,0000	0,0400	0,0008	0,0000
0,05	1,0000	0,0500	0,0012	0,0000
0,06	1,0000	0,0600	0,0018	0,0000
0,07	1,0000	0,0700	0,0024	0,0001
0,08	1,0000	0,0800	0,0032	0,0001
0,09	1,0000	0,0900	0,0041	0,0001
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,20	1,0001	0,2000	0,0200	0,0013
0,30	1,0003	0,3000	0,0450	0,0045
0,40	1,0011	0,4001	0,0800	0,0106
0,50	1,0026	0,5003	0,1250	0,0208
0,60	1,0054	0,6006	0,1801	0,0361
0,70	1,0100	0,7019	0,2452	0,0572
0,80	1,0170	0,8027	0,3204	0,0854
0,90	1,0274	0,9049	0,4057	0,1216
1,00	1,0417	1,0083	0,5014	0,1669
1,10	1,0611	1,1134	0,6075	0,2222

Изгибные колебания неразрезных балок

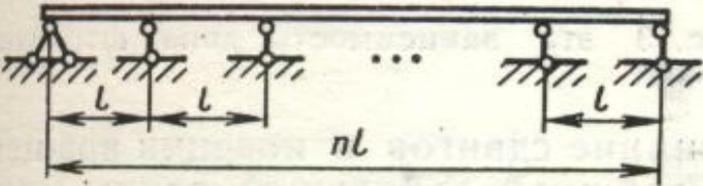
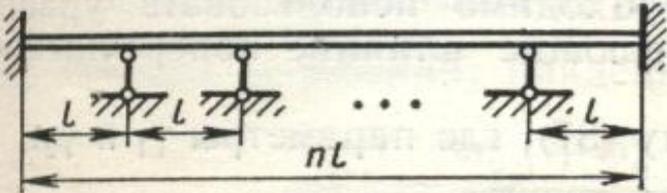
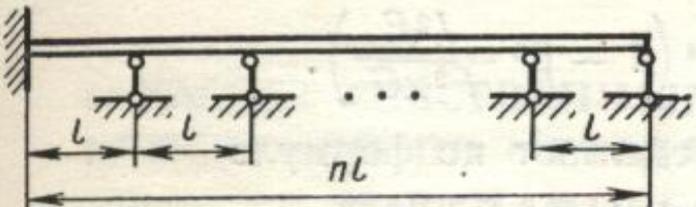
Более предпочтительно в этом случае использовать уравнения трех моментов (m - номер пролета, совпадающий с номером правой опоры):

$$\begin{aligned}
 & M_{m-1} \frac{1}{(\beta EJ)_m} \frac{S_{4,m}}{S_{2,m}^2 - S_{4,m}^2} + \\
 & + M_m \left[\frac{1}{(\beta EJ)_m} \frac{S_{2,m} S_{3,m} - S_{1,m} S_{4,m}}{S_{2,m}^2 - S_{4,m}^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(\beta EJ)_{m+1}} \frac{S_{2,m+1} S_{3,m+1} - S_{1,m+1} S_{4,m+1}}{S_{2,m+1}^2 - S_{4,m+1}^2} \right] + \\
 & + M_{m+1} \frac{1}{(\beta EJ)_{m+1}} \frac{S_{4,m+1}}{S_{2,m+1}^2 - S_{4,m+1}^2} \quad (10.24)
 \end{aligned}$$

Если все пролеты одинаковы, то (10.24) принимает вид

$$M_{m-1} S_{4,m} + 2M_m (S_{2,m} S_{3,m} - S_{1,m} S_{4,m}) + M_{m+1} S_{4,m+1} \quad (10.25)$$

Данные для многопролетных неразрезных стержней приведены в табл. 7

Схема закрепления стержня	Число пролетов	Номер формы				
		1	2	3	4	5
	1	3,142	6,283	9,425	12,566	15,708
	2	3,142	3,927	6,283	7,069	9,425
	3	3,142	3,550	4,304	6,283	6,692
	4	3,142	3,393	3,927	4,461	6,283
	5	3,142	3,299	3,707	4,147	4,555
	10	3,142	3,205	3,299	3,487	3,707
	1	4,730	7,853	10,995	14,137	17,279
	2	3,927	4,744	7,069	7,855	10,210
	3	3,550	4,304	4,744	6,692	7,446
	4	3,393	3,927	4,461	4,744	6,535
	5	3,299	3,707	4,147	4,555	4,744
	10	3,205	3,299	3,487	3,707	3,927
	1	3,927	7,069	10,210	13,352	16,494
	2	3,393	4,461	6,535	7,603	9,677
	3	3,267	3,927	4,587	6,409	7,069
	4	3,205	3,644	4,210	4,650	6,347
	5	3,205	3,487	3,927	4,367	4,681
	10	3,142	3,236	3,456	3,582	3,801

Частоты неразрезных стержней с равными пролетами образуют «зоны сгущения». В каждой такой зоне находится число частот, равное числу пролетов стержней, а значения частот близки между собой.