

КИНЕМАТИКА

Кинематика

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение точек и тел без учета их масс и действующих на них сил.

Основные задачи кинематики:

- Задать закон движения тела.
- По этому закону найти основные кинематические характеристики (траекторию, скорость, ускорение).

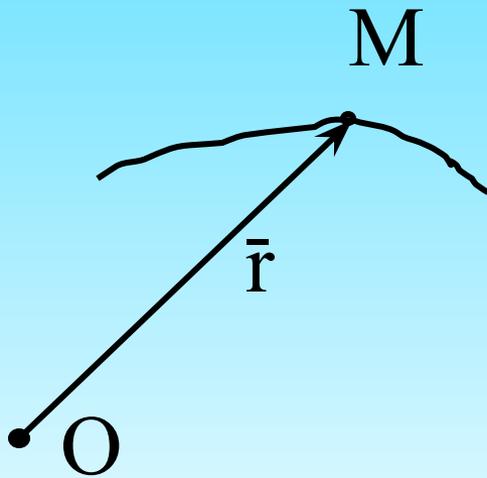
Кинематика точки

Способы задания движения точки

- 1) Векторный.
- 2) Координатный.
- 3) Естественный.

Кинематика точки

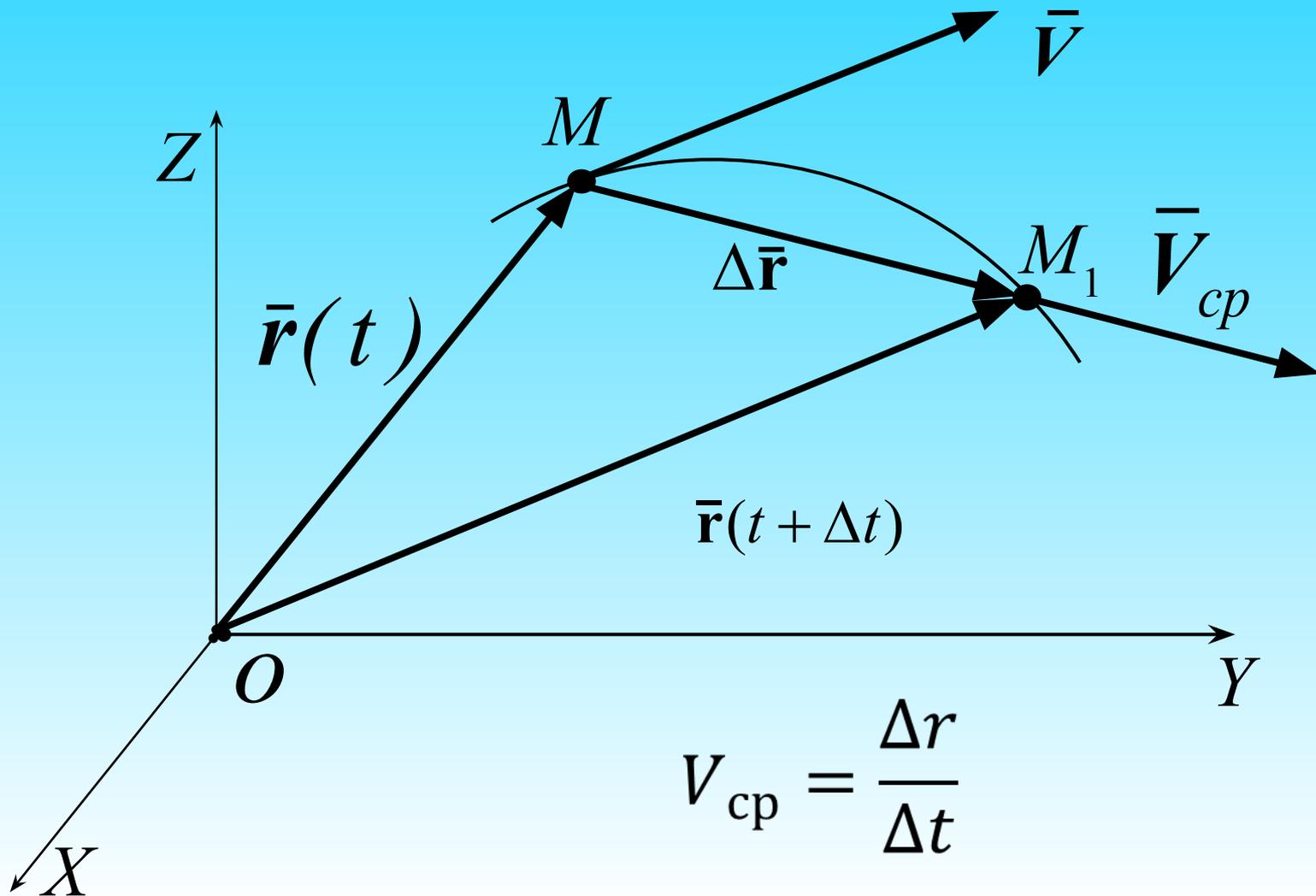
Векторный способ задания движения точки



$$r = r(t)$$

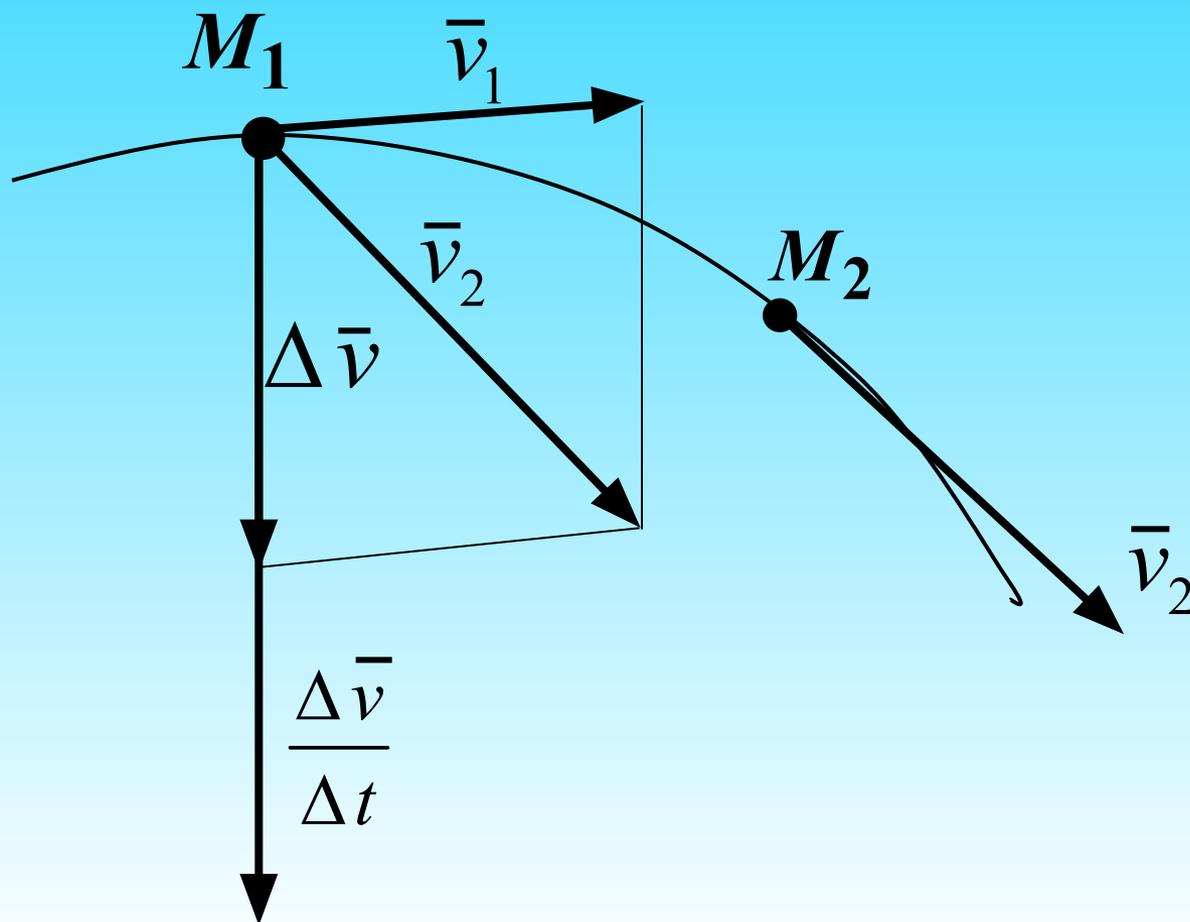
Кинематика точки

Скорость точки



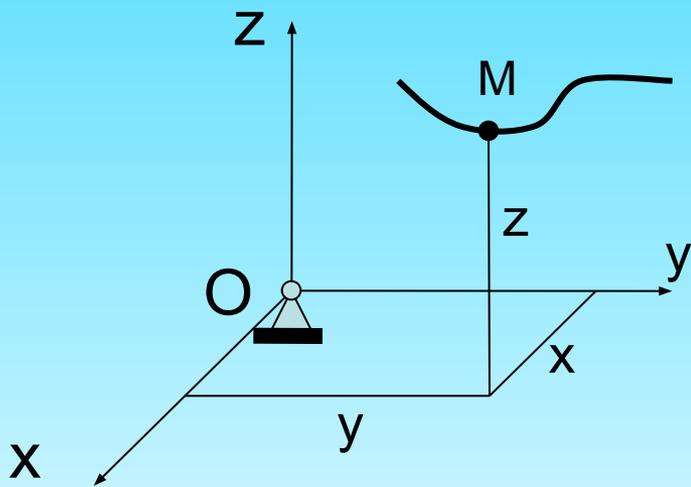
Кинематика точки

Ускорение точки



Кинематика точки

Координатный способ задания движения точки



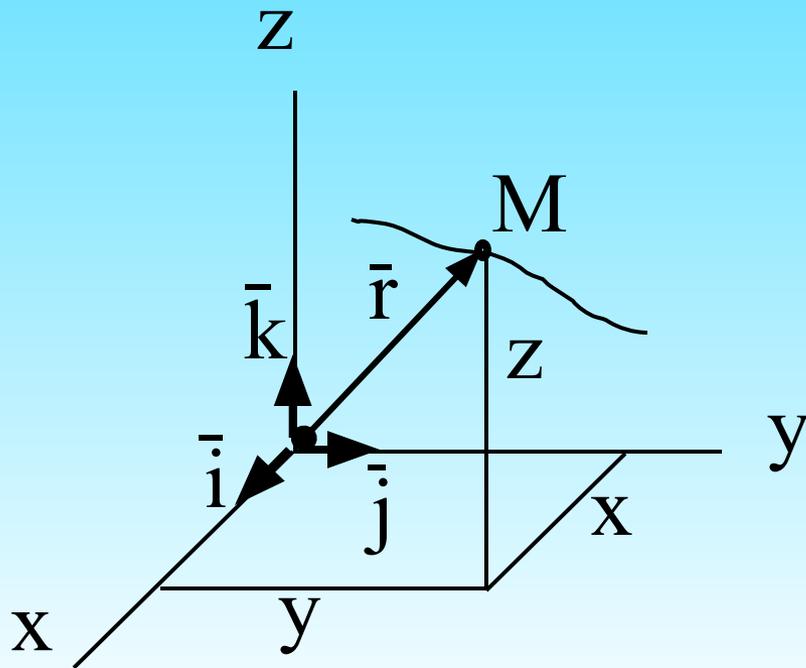
$$x = x(t);$$

$$y = y(t);$$

$$z = z(t).$$

Кинематика точки

Связь между координатным и векторным способами



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Кинематика точки

Скорость точки при координатном способе задания движения

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad V_y = \frac{dy}{dt} \quad V_z = \frac{dz}{dt}$$

Кинематика точки

Другая форма записи:

$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \quad V_z = \dot{z};$$

(Точка означает производную по времени)

Проекции скорости на оси координат равны первым производным от соответствующих координат по времени

Модуль скорости и угол между вектором и координатными осями:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad \cos(\bar{i} \wedge \bar{V}) = \frac{\dot{x}}{V}.$$

Кинематика точки

Ускорение точки

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$\bar{a} = \dot{V}_x \bar{i} + \dot{V}_y \bar{j} + \dot{V}_z \bar{k} = \ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j} + \ddot{z} \bar{k}.$$

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z};$$

$$a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad \cos(\bar{i} \wedge \bar{a}) = \frac{\ddot{x}}{a}.$$

Кинематика точки

Проекции ускорения на оси координат равны первым производным от проекций скорости или вторым производным соответствующих координат точки по времени

Кинематика точки

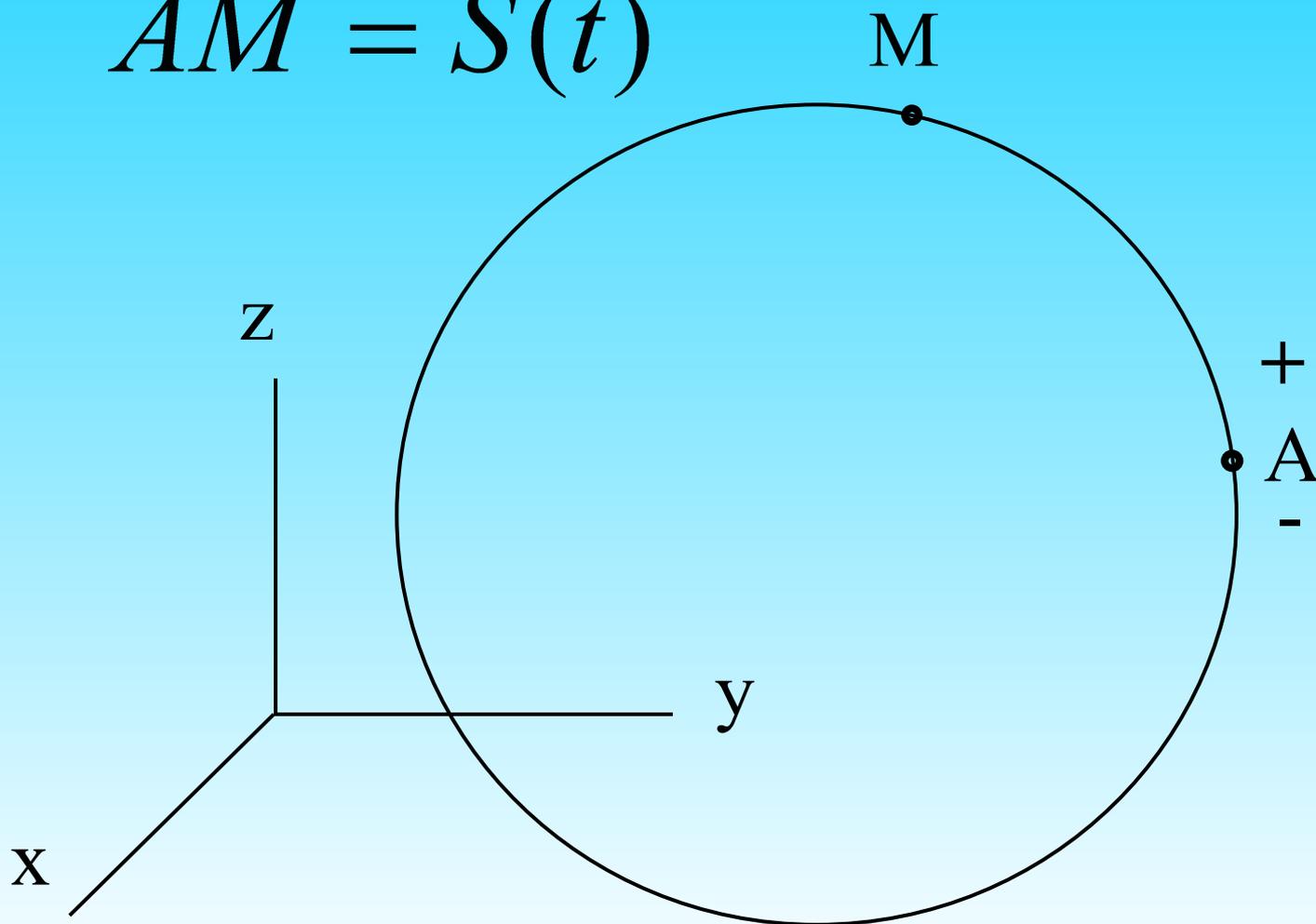
Естественный способ задания движения точки

Задается:

- траектория движения;
- начало и положительное направление отсчета;
- закон движения точки по траектории:
 $S=S(t)$.

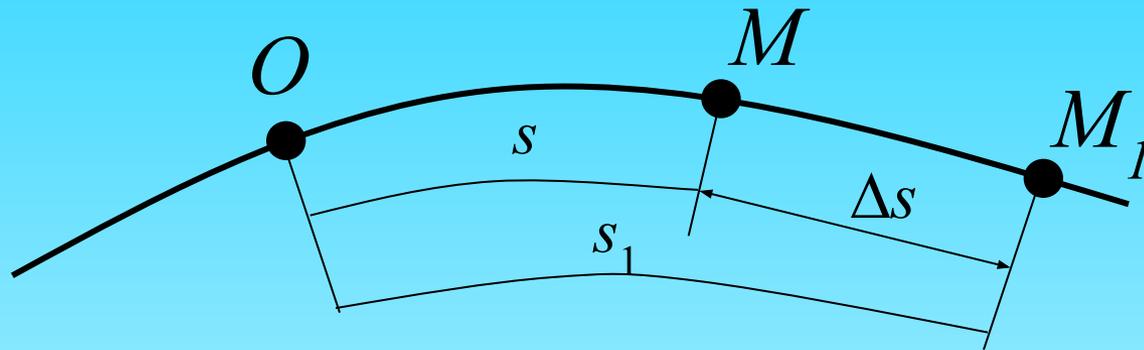
Кинематика точки

$$\square$$
$$AM = S(t)$$



Кинематика точки

Скорость точки при естественном способе задания движения



$$v_{cp} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

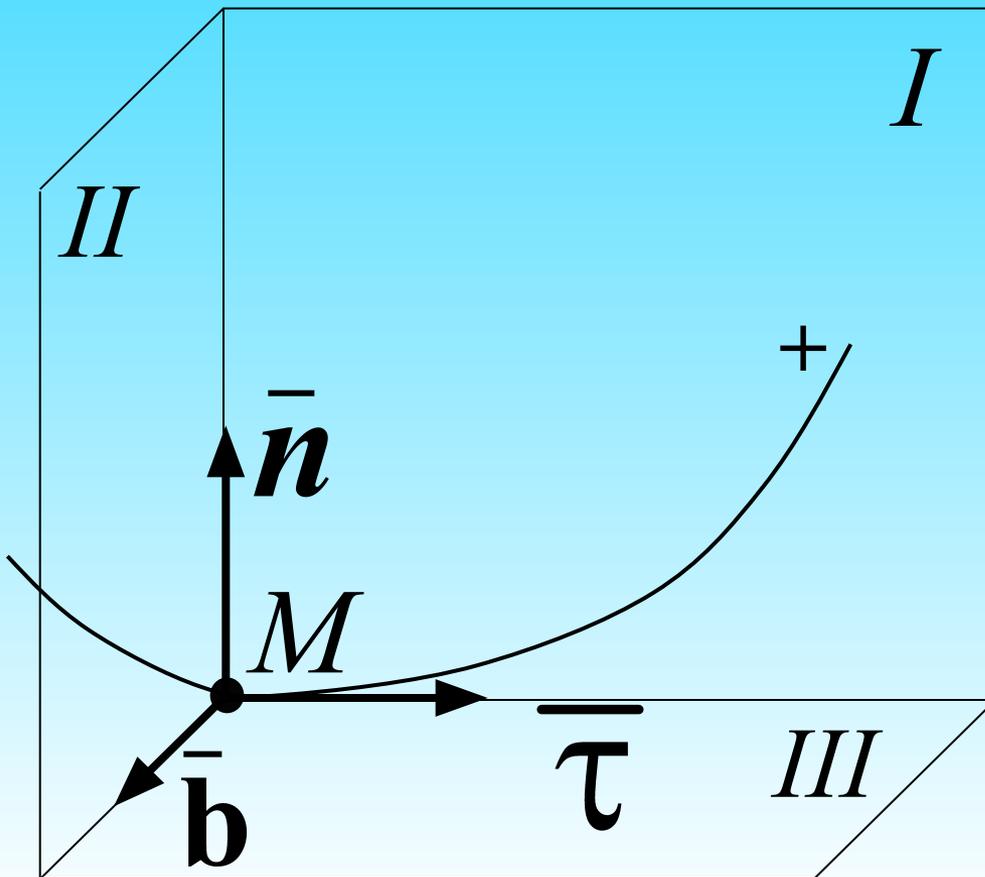
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Численная величина скорости точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния (криволинейной координаты) s точки по времени

Кинематика точки

Ускорение точки

Естественный трехгранник



I -соприкасающаяся плоскость
 II -нормальная плоскость
 III -спрямляющая плоскость

Единичные векторы:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

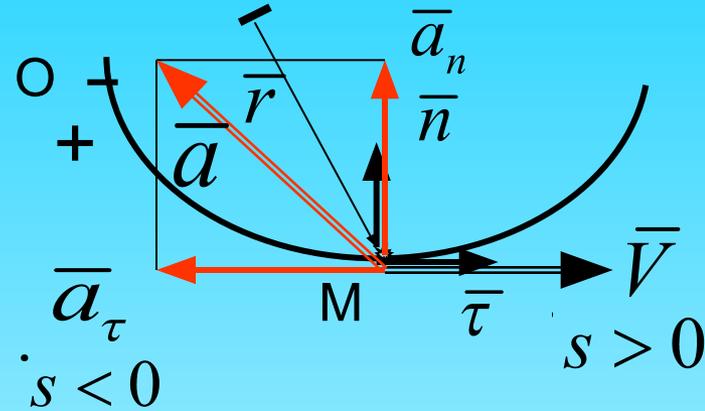
Кинематика точки

$$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}.$$

$$\bar{a}_\tau = \ddot{s} \bar{\tau}; \quad \bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}.$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

$$\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$$



Кинематика точки

Проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от численной величины скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) s точки по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой

Кинематика точки

При координатном задании движения могут быть использованы также *цилиндрические* и *сферические* координаты, а при движении точки в плоскости – *полярные*.

Кинематика точки

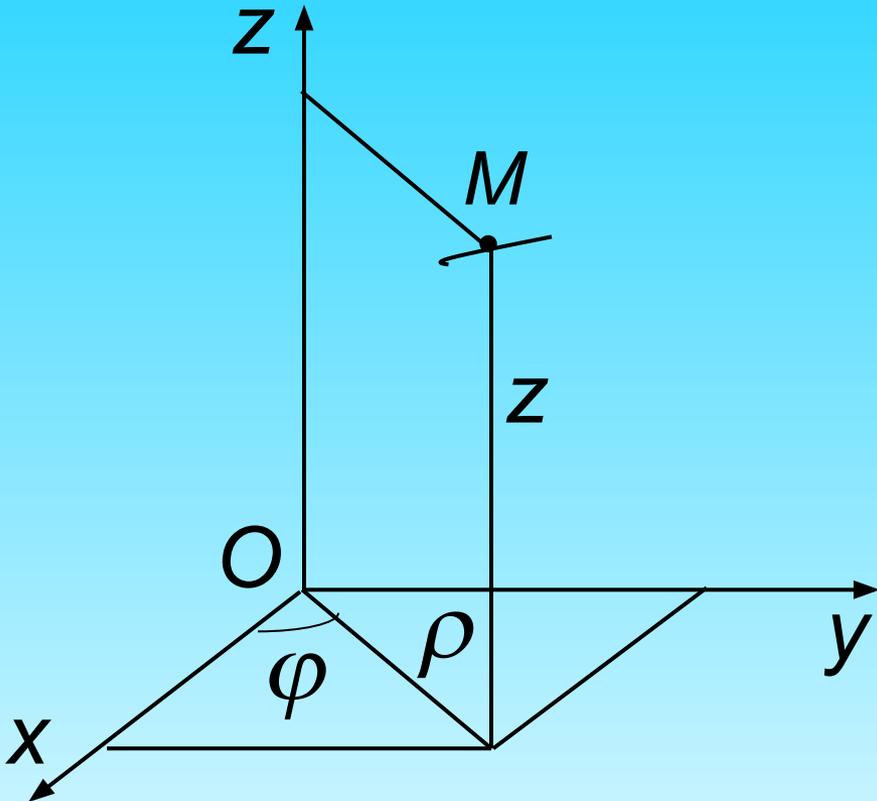
Цилиндрическая система координат

Закон движения:

$$\rho = \rho(t),$$

$$\varphi = \varphi(t),$$

$$z = z(t).$$

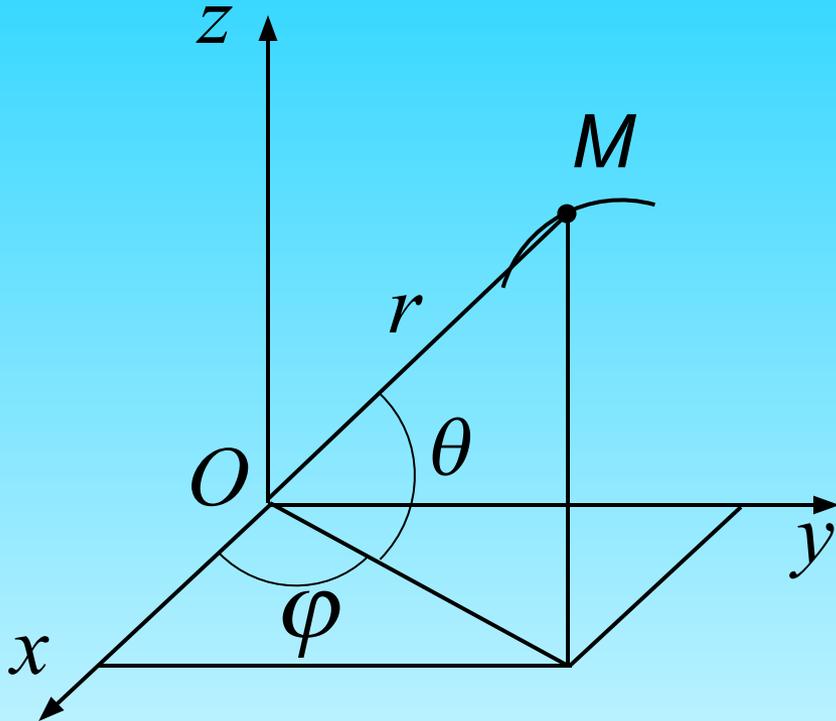


Формулы перехода к декартовым координатам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Кинематика точки

Сферическая система координат



Закон движения:

$$r = r(t),$$

$$\varphi = \varphi(t),$$

$$\theta = \theta(t).$$

Формулы перехода к декартовым координатам:

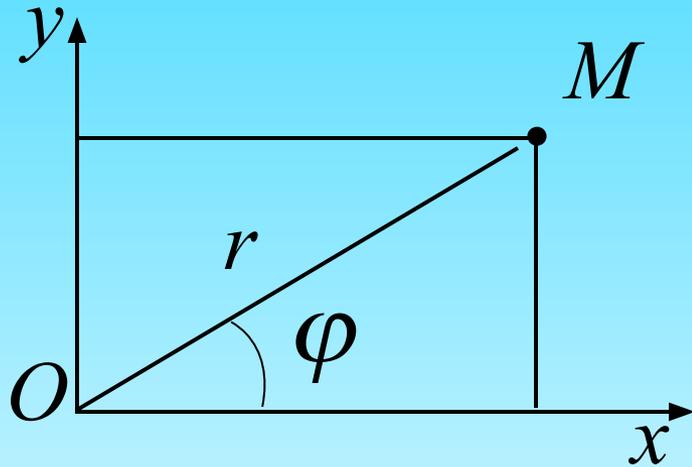
$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta.$$

Кинематика точки

Полярные координаты

Их иногда используют при движении точки в плоскости.

Закон движения:



$$r = r(t),$$
$$\varphi = \varphi(t).$$

Формулы перехода к декартовым координатам:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$