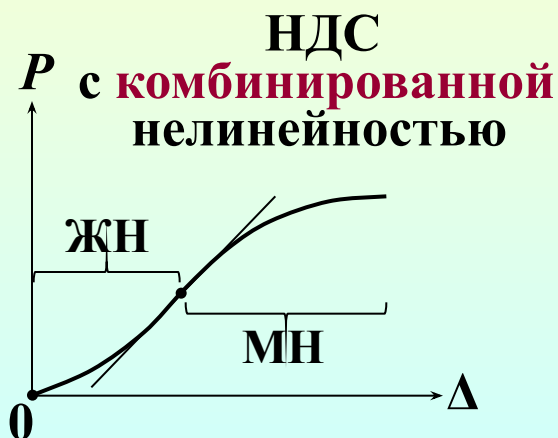
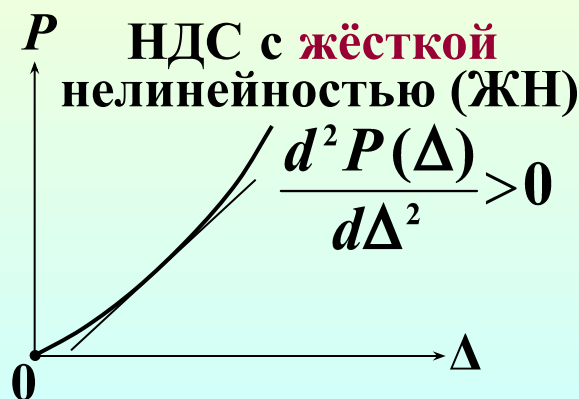
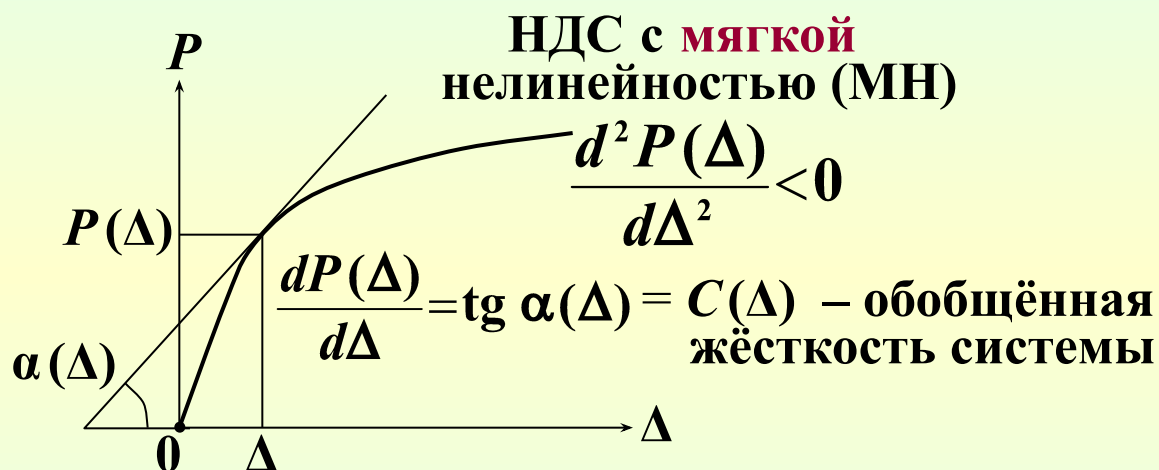




Строительная механика Часть II

**ПОНЯТИЕ О НЕЛИНЕЙНО
ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ
И МЕТОДАХ ИХ РАСЧЁТА**

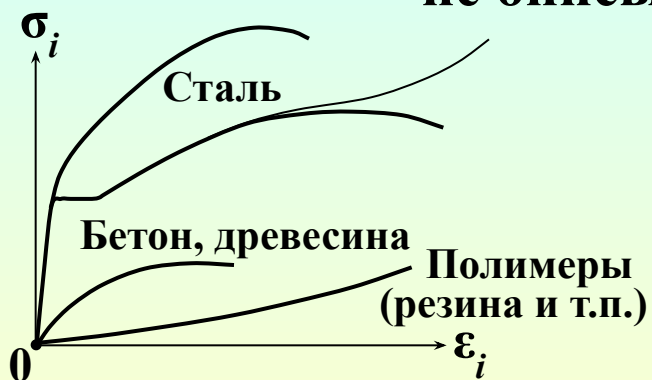
Нелинейно деформируемой
называется система, для которой зависимость
между параметром P воздействия (нагрузки)
и характерным (обобщённым) перемещением Δ
не прямо пропорциональная.



Виды нелинейностей:

- 1) физическая (ФН);
- 2) геометрическая (ГН);
- 3) конструктивная (КН).

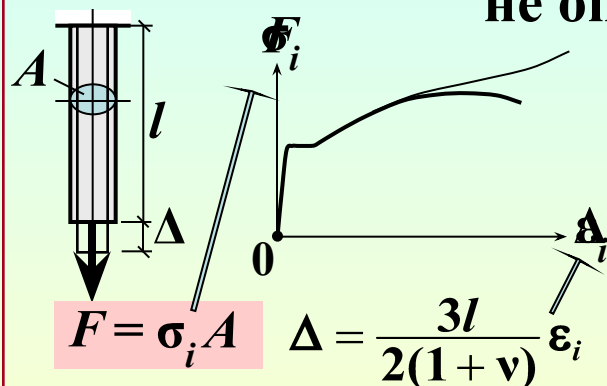
Физическая нелинейность – нелинейность зависимости $P-\Delta$, обусловленная **физико-механическими свойствами материала**, не описываемыми законом Гука.



$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ \epsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{интенсивности} \\ \text{напряжений} \\ \text{и деформаций} \end{array}$$

В случае ЛНС ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$): $\sigma_i = \sigma_1$; $\epsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \nu)\epsilon_1$

Физическая нелинейность – нелинейность зависимости $P-\Delta$, обусловленная физико-механическими свойствами материала, не описываемыми законом Гука.



$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

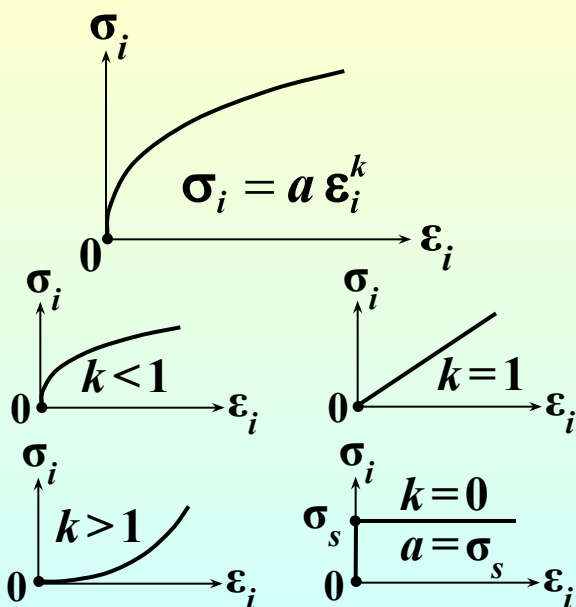
$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

интенсивности напряжений и деформаций

В случае ЛНС ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$): $\sigma_i = \sigma_1$; $\varepsilon_i = \frac{2}{3}(1+\nu)\varepsilon_1$

Расчётные модели нелинейного деформирования материалов

Степенной закон (1729)
Г.Б. Бюльфингера (1693–1750)



Параболическая зависимость (1831)
Ф.И. Герстнера (1756–1832)

$$\sigma_i = a_1 \varepsilon_i - a_2 \varepsilon_i^2$$

Модель А.А. Ильюшина (1958) (1911–1998)

$$\sigma_i = E \varepsilon_i (1 - \omega);$$

$$\omega = \omega(\varepsilon_i)$$

Идеализированные диаграммы



Модели с упрочнением



Геометрическая нелинейность – нелинейность зависимости $P-\Delta$, обусловленная **большими перемещениями** и/или **значительным формоизменением** системы.

Сущность ГН – непропорциональность деформаций и перемещений.

Тензор деформаций:

$$T_e = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{xx} & \bar{\epsilon}_{xy}/2 & \bar{\epsilon}_{xz}/2 \\ \bar{\epsilon}_{yx}/2 & \bar{\epsilon}_{yy} & \bar{\epsilon}_{yz}/2 \\ \bar{\epsilon}_{zx}/2 & \bar{\epsilon}_{zy}/2 & \bar{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix}$$

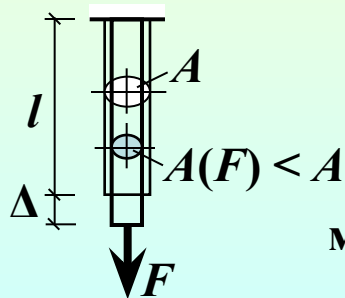
Линейные деформации:

$$\epsilon_x = \sqrt{1 + 2\bar{\epsilon}_{xx}} - 1$$

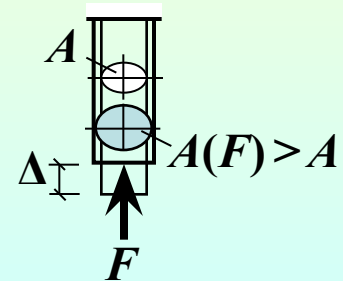
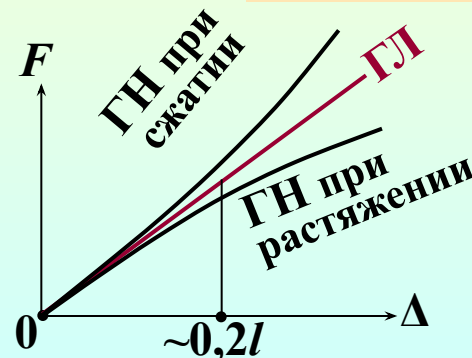
$$\epsilon_y = \sqrt{1 + 2\bar{\epsilon}_{yy}} - 1$$

$$\epsilon_z = \sqrt{1 + 2\bar{\epsilon}_{zz}} - 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \bar{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \bar{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \bar{\epsilon}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \bar{\epsilon}_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\ \bar{\epsilon}_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right.$$



ФЛ
материал:
 $\sigma_i = E^* \epsilon_i$



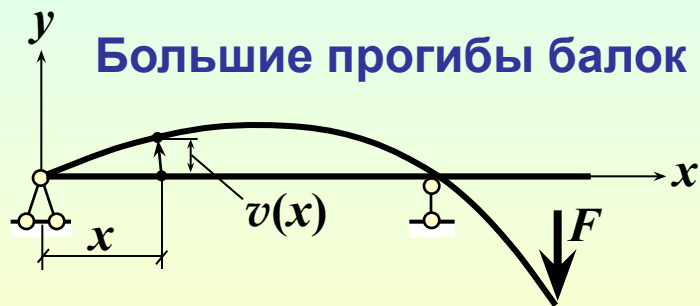
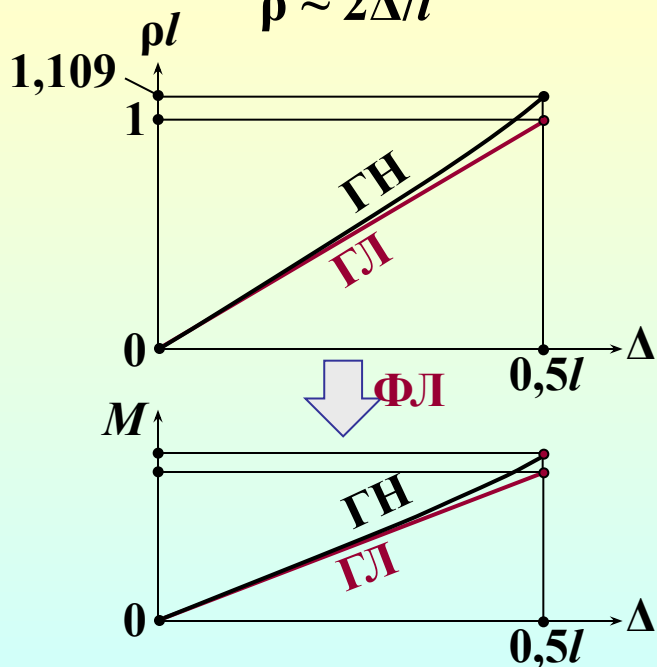
Геометрическая нелинейность – нелинейность зависимости $P-\Delta$, обусловленная **большими перемещениями** и/или **значительным формоизменением** системы.

Сущность ГН – непропорциональность деформаций и перемещений.



Линеаризованная зависимость:

$$\rho \sim 2\Delta/l^2$$



Выражение кривизны через прогибы:

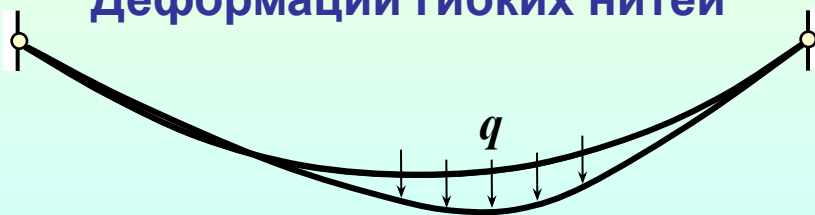
$$\rho(x) = \frac{1}{r(x)} = \frac{v''(x)}{\sqrt{\{1 + [v'(x)]^2\}^3}}$$

Линеаризованная зависимость: $\rho(x) \approx v''(x)$

Оценка:

при $v'(x) = 0,2$ ($\theta(x) \sim 11^\circ$) $\rho(x) = 0,943 v''(x)$ ($\sim 5,3\%$)

Деформации гибких нитей



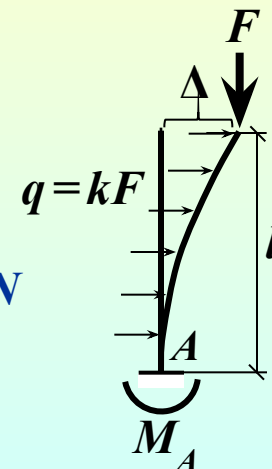
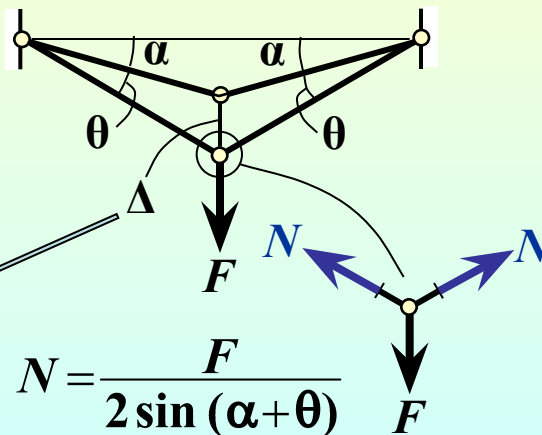
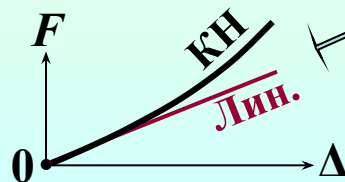
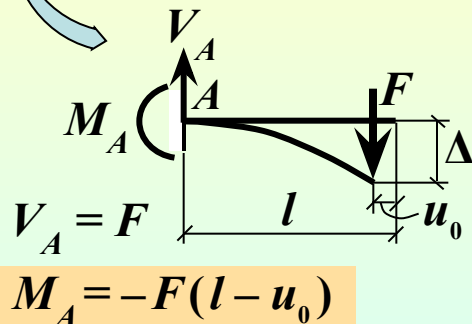
Конструктивная нелинейность – нелинейность зависимости $P-\Delta$, обусловленная изменением **расчётной схемы сооружения** в процессе его деформации:

- а) структурными изменениями – включением или выключением связей, изменением их положения;
- б) изменением координат точек сооружения за счёт их перемещений при расчёте **«по деформированной схеме»**.

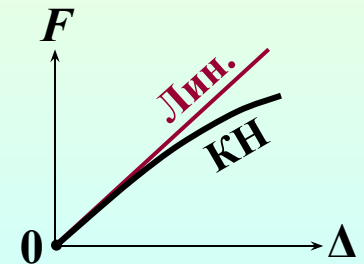
Общий признак конструктивной нелинейности:
при составлении **уравнений равновесия** учитываются **перемещения**,
которые могут

непосредственно входить в статические уравнения
(расчёт по деформированной схеме);

- ♦ описывать условия (изменения связей), учитываемые при записи уравнений равновесия.



$$M_A = ql^2/2 + F\Delta = F(kl^2/2 + \Delta)$$

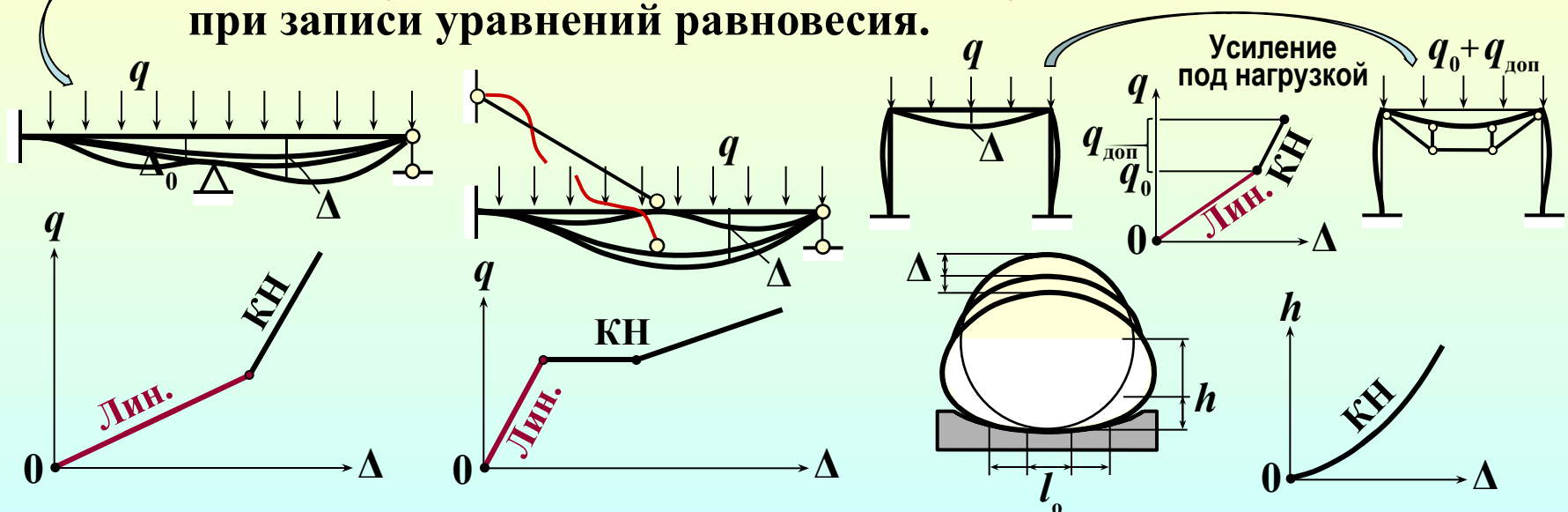


Конструктивная нелинейность – нелинейность зависимости $P-\Delta$, обусловленная изменением **расчётной схемы сооружения** в процессе его деформации:

- а) структурными изменениями – включением или выключением связей, изменением их положения;
- б) изменением координат точек сооружения за счёт их перемещений при расчёте **«по деформированной схеме»**.

Общий признак конструктивной нелинейности:
при составлении **уравнений равновесия** учитываются **перемещения**,
которые могут

- ◆ непосредственно входить в статические уравнения (расчёт по деформированной схеме);
- ◆ описывать условия (изменения связей), учитываемые при записи уравнений равновесия.



Классификация задач расчёта нелинейно деформируемых систем по видам нелинейностей

ФН+ГН+КН

ФН+ГН

ФН+КН

ФН

КН

ГН+КН

ГН

Методы расчёта нелинейно деформируемых систем

Полное исследование истории деформирования системы

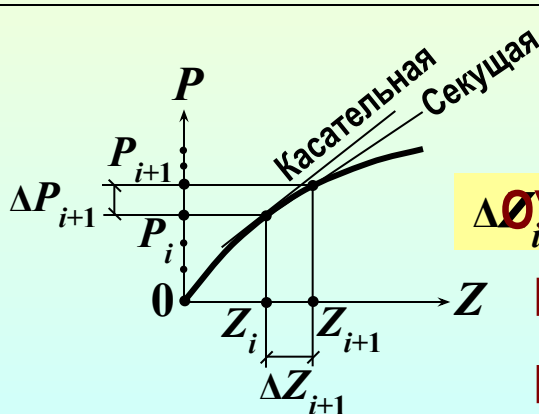
- Метод упругих решений
- Метод переменных параметров упругости
- Метод последовательных приближений

Метод пошагового нагружения

- Формы решения
- метод сил
 - метод перемещений
 - метод конечных элементов

Методы теории предельного равновесия (ТПР)

- Статический метод ТПР
- Кинематический метод ТПР
- Двусторонняя оценка предельной нагрузки



$$\Delta P_{i+1} \approx C(P_i) * \Delta Z_{i+1}$$

Секущая
($\approx$) Касательная

ДУМЖЗ: $\Delta P_{i+1} = K(P_i) * \Delta \delta = F(\Delta P_{i+1})$

КУМС: $\delta(P_i) * \Delta X + \Delta(\Delta P_{i+1}) = 0$

КУМП: $r(P_i) * \Delta Z + R(\Delta P_{i+1}) = 0$

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Полное исследование процесса упругопластического деформирования

Системы с однородным линейным напряжённым состоянием элементов
(равномерное растяжение/сжатие, без учёта потери устойчивости при сжатии)

Статически определимая система



Статически неопределимая система

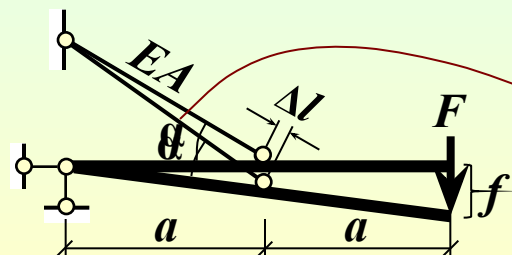


Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Полное исследование процесса упругопластического деформирования

Системы с однородным линейным напряжённым состоянием элементов
(равномерное растяжение/сжатие, без учёта потери устойчивости при сжатии)

Статически определимая система



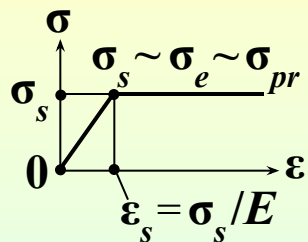
1. Статическая сторона задачи:

$$N = 2F / \sin \alpha$$

2. Геометрическая сторона задачи (совместность перемещений и деформаций):

$$f = 2 \Delta l / \sin \alpha$$

3. Физическая сторона задачи:



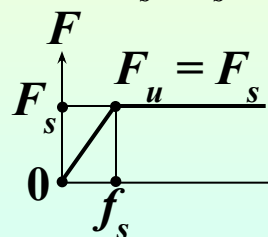
в упругой стадии ($\sigma < \sigma_s$, $\epsilon < \epsilon_s$): $\sigma = E \epsilon$

в стадии текучести ($\epsilon > \epsilon_s$): $\sigma = \sigma_s = \text{inv}(\epsilon)$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA} = \frac{2F}{EA \sin \alpha}$$

$$f = \frac{2 \epsilon l}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{2 \epsilon a}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{4 F a}{EA \sin^2 \alpha \cos \alpha}$$



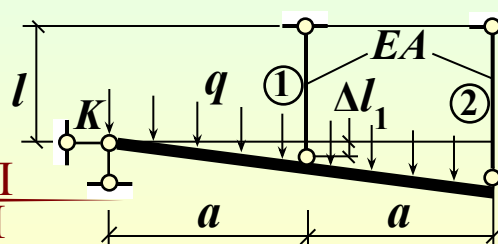
При $\sigma = \sigma_s$:

$$N = \sigma_s A;$$

$$F_s = (\sigma_s A \sin \alpha) / 2;$$

$$f_s = 2 \sigma_s a / (E \sin \alpha \cos \alpha)$$

Статически неопределимая система



1. ССЗ: $\sum m_K = 0$

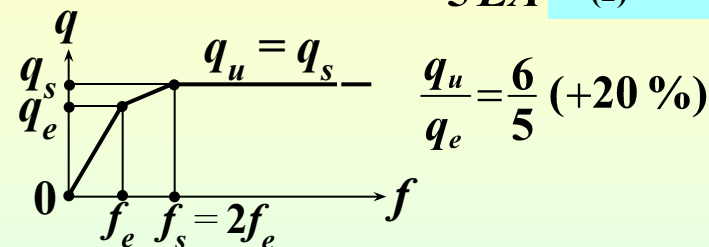
$$N_1 + 2N_2 = 2qa$$

$$f = \Delta l_2$$

2. ГСЗ: $\Delta l_2 = 2 \Delta l_1$

$$\epsilon_{(2)} = 2 \epsilon_{(1)}$$

а) в упругой стадии
(при $(\max \sigma_{(i)}) < \sigma_s$): $f = \frac{4 q a l}{5 E A}$



$$\frac{q_u}{q_e} = \frac{6}{5} (+20 \%)$$

$$q_e = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sigma_s A}{a}, \text{ перемещение } f_e = \sigma_s l / E$$

б) в упругопластической стадии

(при $\sigma_{(2)} = \sigma_s$, $\sigma_{(1)} / 2 < \sigma_{(1)} < \sigma_s$; $q_e < q < q_u$):

$$N_2 = \sigma_s A; N_1 = 2(qa - \sigma_s A); f_s = 2 \Delta l_1 = 2 N_1 l / EA$$

$$f = 4l(qa - \sigma_s A) / (EA)$$

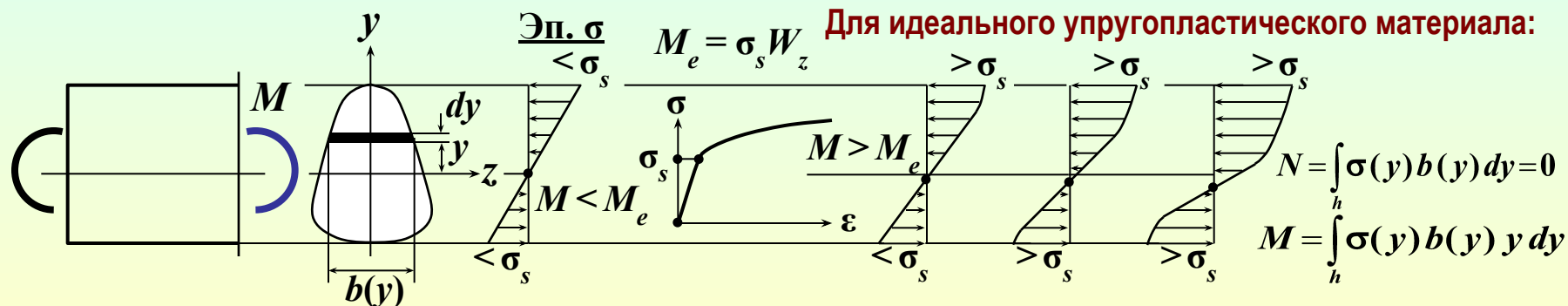
в) в предельном равновесии ($\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_s$):

$$N_1 = N_2 = \sigma_s A; q_u = 3/2 \sigma_s A / a; f_s = 2 \sigma_s l / E = 2 f_e$$

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Полное исследование процесса упругопластического деформирования

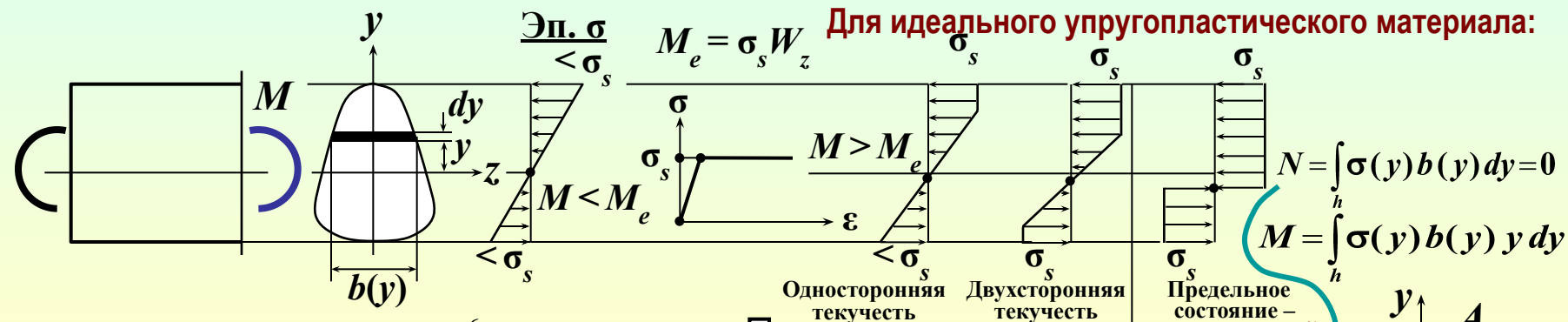
Системы с неоднородным напряжённым состоянием элементов (изгиб, кручение)



Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Полное исследование процесса упругопластического деформирования

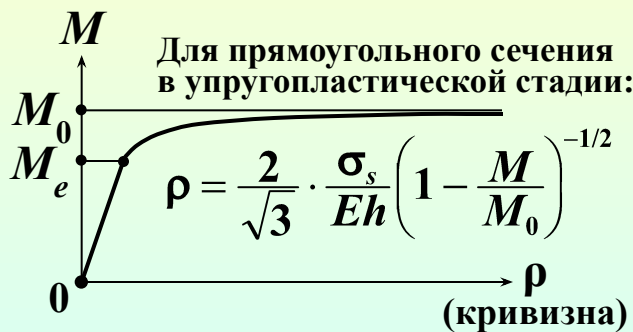
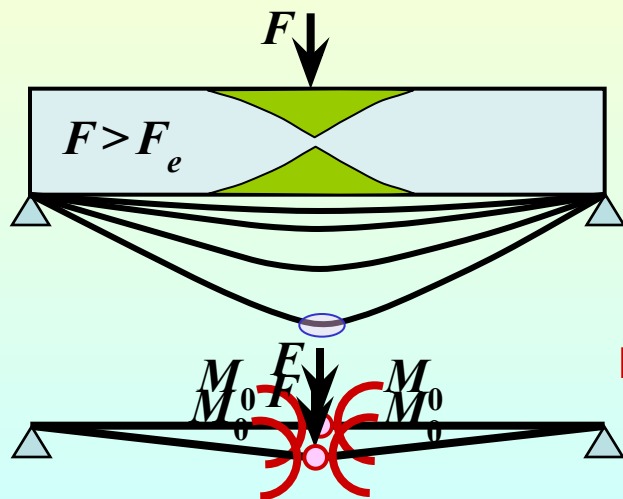
Системы с неоднородным напряжённым состоянием элементов (изгиб, кручение)



$$\frac{M_0}{M_e} = \frac{\sigma_s W_{pl}}{\sigma_s W_z} = \frac{W_{pl}}{W_z} > 1 \quad \frac{W_{pl}}{W_z} = \begin{cases} 3/2 & \text{— для } \square \\ 1,15 \text{ — } 1,17 & \text{— для } \text{I} \\ 1,7 & \text{— для } \bigcirc \end{cases}$$

$$W_{pl} = \frac{A}{2} h_0$$

Кинематический смысл пластического шарнира



Предельная (разрушающая) нагрузка:

$$\frac{F_u l}{4} = M_0 \Rightarrow F_u = \frac{4M_0}{l}$$



$$= -\sigma_s \int_{A_B} dA + \sigma_s \int_{A_H} dA =$$

$$= \sigma_s (A_H - A_B) = 0 \Rightarrow A_H = A_B$$

Предельный изгибающий момент в пластическом шарнире:

$$M = \int \sigma y dA =$$

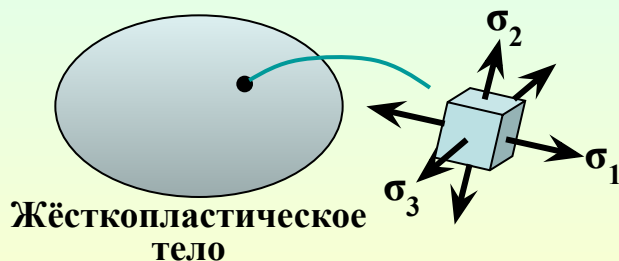
$$= -\sigma_s \int_{A_H} y dA + \sigma_s \int_{A_B} y dA =$$

$$= \sigma_s (|S_{z,H}| + |S_{z,B}|) = \sigma_s \frac{A}{2} h_0 = \sigma_s W_{pl}$$

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Теория предельного равновесия (ТПР)

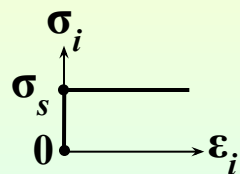
Условие пластичности
(текучести) материала



Интенсивности
напряжений и деформаций

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

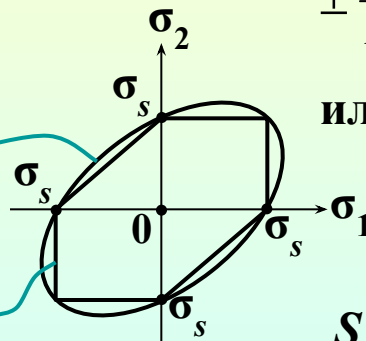


Условие
Мизеса-Губера-Генки

$$\sigma_i - \sigma_s = 0$$

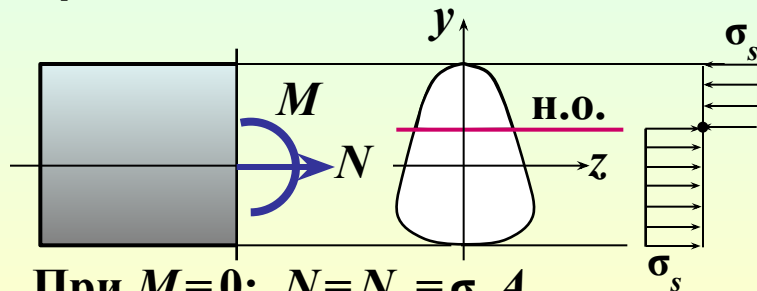
Условие Треска-Сен-Венана

$$\max(|\sigma_k|, |\sigma_k - \sigma_j|) - \sigma_s = 0, \\ k, j = 1, 2, 3$$



$$f(\sigma, \sigma_s) = 0$$

Условие предельного состояния
(предельного равновесия) сечения
стержня, пластинки или оболочки



При $M=0$: $N=N_0=\sigma_s A$

При $N=0$: $M=M_0=\sigma_s W_{pl}$

При $-N_0 < N < N_0$ и $-M_0 < M < M_0$
для прямоугольного сечения:

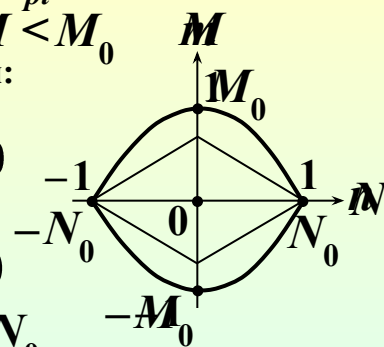
$$\pm \frac{M}{M_0} + \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 - 1 = 0$$

или $\sqrt{m^2 + n^2} - 1 = 0$

$$m = M/M_0; \quad n = N/N_0$$

Обобщённо:

$$\Phi(S, S_0) = 0$$



Для стержней:

$$S = \{M_z, M_y, M_t, Q_y, Q_z, N\}$$

Для пластин и оболочек:

$$S = \{M_x, M_y, M_{xy}, Q_{zx}, Q_{zy}, T_{xy}, N_x, N_y\}$$

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Теория предельного равновесия (ТПР)

Статический метод ТПР

Кинематический метод ТПР

Двухсторонняя оценка предельной нагрузки

Статическая теорема ТПР

Предельная нагрузка P_u не ниже той, которую может уравновесить **статически допустимое** поле напряжений (усилий):

$$P_u \geq P(\sigma^*) \text{ или } P_u \geq P(S^*)$$

$P(\sigma^*)$, $P(S^*)$ – нагрузка, находящаяся в равновесии со статически допустимыми напряжениями (усилиями)

Статически допустимым называется **статически возможное** распределение (поле) напряжений (усилий), удовлетворяющее по всему объёму системы условию $f(\sigma, \sigma_s) \leq 0$ или $\Phi(S, S_s) \leq 0$.

Статически возможным называется распределение (поле) напряжений (усилий), удовлетворяющее при заданных воздействиях уравнениям равновесия и статическим граничным условиям.

Обобщающая (двойственная) теорема ТПР

Предельная нагрузка является максимальной из всех уравниваемых статически допустимыми полями напряжений (усилий) и одновременно минимальной из всех нагрузок, соответствующих кинематически допустимым полям скоростей перемещений и деформаций:

$$P_u = \sup_{\sigma} P(\sigma^*) = \inf_{\varepsilon} P(\varepsilon^*)$$

Кинематическая теорема ТПР

Предельная нагрузка P_u не выше той, которая соответствует **кинематически допустимому** полю скоростей перемещений и деформаций:

$$P_u \leq P(\varepsilon^*)$$

$P(\varepsilon^*)$ – нагрузка, найденная для некоторой схемы механизма разрушения с кинематически допустимым полем перемещений (деформаций)

Кинематически допустимым называется распределение (поле) скоростей перемещений и деформаций, удовлетворяющее уравнениям совместности и кинематическим граничным условиям.

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Теория предельного равновесия (ТПР)

Вариационные принципы статики жёсткопластических систем

Принцип минимума полной энергии системы:

из всех кинематически допустимых полей скоростей перемещений (деформаций) истинным при заданных воздействиях является то, которому соответствует **минимальная** и **равная нулю** полная энергия жёсткопластической системы:

$$\Pi = W_{int} + W_F \rightarrow \min_{\varepsilon} = 0, \quad (I)$$

$W_{int} = D$ – энергия диссипации в пластических зонах (для системы с введёнными шарнирами текучести $D = -W_{S_0}$; W_{S_0} – работа предельных усилий на перемещениях механизма разрушения);
 W_F – потенциал нагрузки (< 0).

Вариант записи (I): $-\Pi = W_{S_0} + W_F^* = 0, \quad (I^*)$

$W_F^* = -W_F$ – работа нагрузки на перемещениях предельного пластического механизма.

Принцип максимума работы нагрузки:

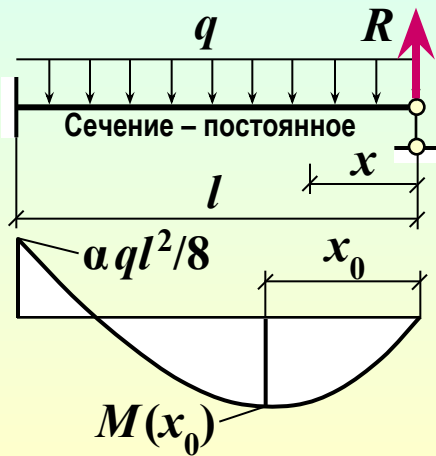
из всех статически допустимых полей напряжений истинным является то, которому соответствует **максимум** работы нагрузки, уравниваемой этим полем, на **истинных** перемещениях механизма разрушения:

$$P \cdot \Delta_P \rightarrow \max_S \quad \text{или} \quad \delta(P \cdot \Delta_P) = 0 \quad (II)$$

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Определение предельных нагрузок балок

1. Решение статическим методом ТПР



Определение *статически возможного поля* изгибающих моментов:

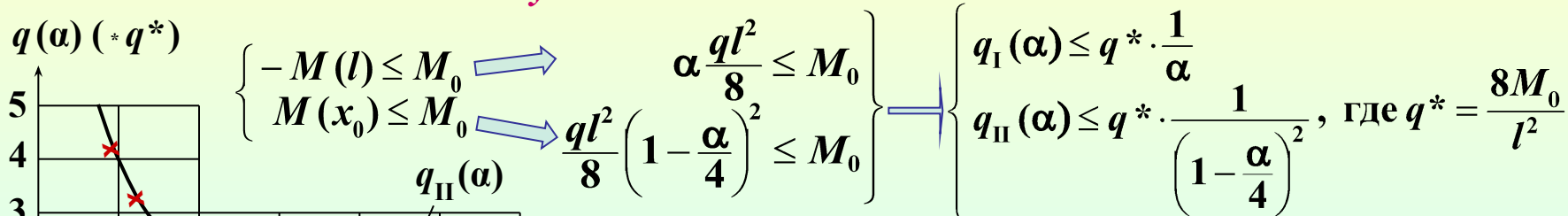
– дифференциальное уравнение равновесия: $d^2M(x)/dx^2 = -q = \text{const}$,
его решение: $M(x) = -qx^2/2 + C_1x + C_2$;

– статические граничные условия: $M(0) = 0$, $Q(0) = -dM/dx(0) = -R \Rightarrow$
 $C_2 = 0$, $C_1 = R$. $\Rightarrow M(x) = -qx^2/2 + Rx$

– α – параметр варьирования статически возможного поля моментов,
тогда $M(l) = -\alpha ql^2/8 \Rightarrow R = ql(1 - \alpha/4)/2$, $x_0 = R/q = l(1 - \alpha/4)/2$

$$M(x) = x \left(R - \frac{qx}{2} \right) = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{x}{l} \left[4 \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \alpha \right]$$

Условия *допустимости* статически возможного поля:



По статической теореме ТПР: $q_u \geq \max_{\alpha} q(\alpha) \Rightarrow \alpha_u = ?$

$$q_I(\alpha_u) = q_{II}(\alpha_u) \Rightarrow \frac{1}{\alpha_u} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_u}{4}\right)^2} \Rightarrow \alpha_u^2 - 24\alpha_u + 16 = 0$$

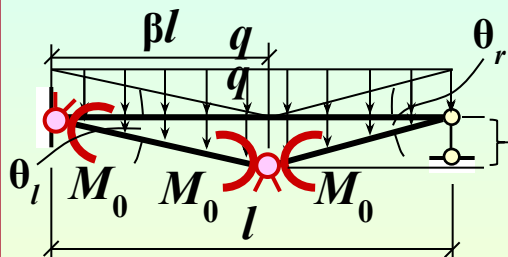
$$\alpha_{u(1,2)} = 12 \pm 8\sqrt{2}$$

$$\alpha_u = 12 - 8\sqrt{2} = 0,6863$$

$$q_u \geq \max_{\alpha} q(\alpha) = \frac{q^*}{\alpha_u} = 11,66 \frac{M_0}{l^2}$$

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Определение предельных нагрузок балок



2. Решение кинематическим методом ТПР

Задание **кинематически допустимого** поля перемещений – предельного пластического механизма (механизма разрушения)

Уравнение предельного равновесия механизма разрушения (по **принципу Лагранжа**):

$$W_{ext} + W_{int} = 0,$$

где $W_{int} = 0$, $W_{ext} = W_{M_0} + W_q$, $W_{M_0} = -M_0(2\theta_l + \theta_r)$, $W_q = (1/2)ql\delta$

$$\theta_l = \frac{\delta}{\beta l}, \quad \theta_r = \frac{\delta}{(1-\beta)l} \rightarrow q(\beta) = \frac{2M_0}{l^2} \left(\frac{2}{\beta} + \frac{1}{1-\beta} \right) = \frac{2M_0}{l^2} \cdot \frac{2-\beta}{\beta(1-\beta)}$$

По кинематической теореме ТПР: $q_u \leq \min_{\beta} q(\beta) \rightarrow \beta_u = ?$

$$\frac{dq(\beta)}{d\beta} = \frac{2M_0}{l^2} \cdot \frac{-\beta(1-\beta) - (2-\beta) - (1-\beta)}{\beta^2(1-\beta)^2} = 0 \rightarrow \frac{dq(\beta)}{d\beta} = 0$$

$$= \frac{2M_0}{l^2} \cdot \frac{-\beta^2 + 4\beta - 2}{\beta^2(1-\beta)^2} = 0 \rightarrow -\beta^2 + 4\beta - 2 = 0 \rightarrow \beta_{u(1,2)} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\beta_u = 2 - \sqrt{2} = 0,586$$

По двойственной теореме ТПР:

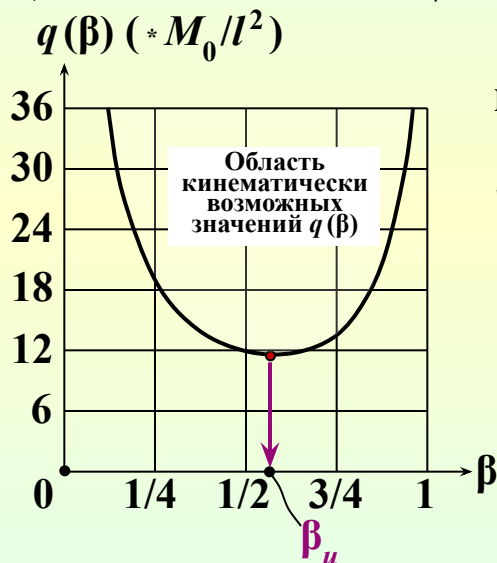
$$q_{\max}^{\text{стат}} = 11,66 \frac{M_0}{l^2} \leq q_u \leq q_{\min}^{\text{кин}} = 11,66 \frac{M_0}{l^2}$$

$$q_u = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} \cdot \frac{M_0}{l^2} = 11,66 \frac{M_0}{l^2}$$

Оценка:

$$\frac{q_u}{q_e} = 1,458 \frac{W_{pl}}{W_z}$$

$$q_u \leq \min_{\beta} q(\beta) = q(\beta_u) = \frac{2M_0}{l^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} = 11,66 \frac{M_0}{l^2}$$



Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

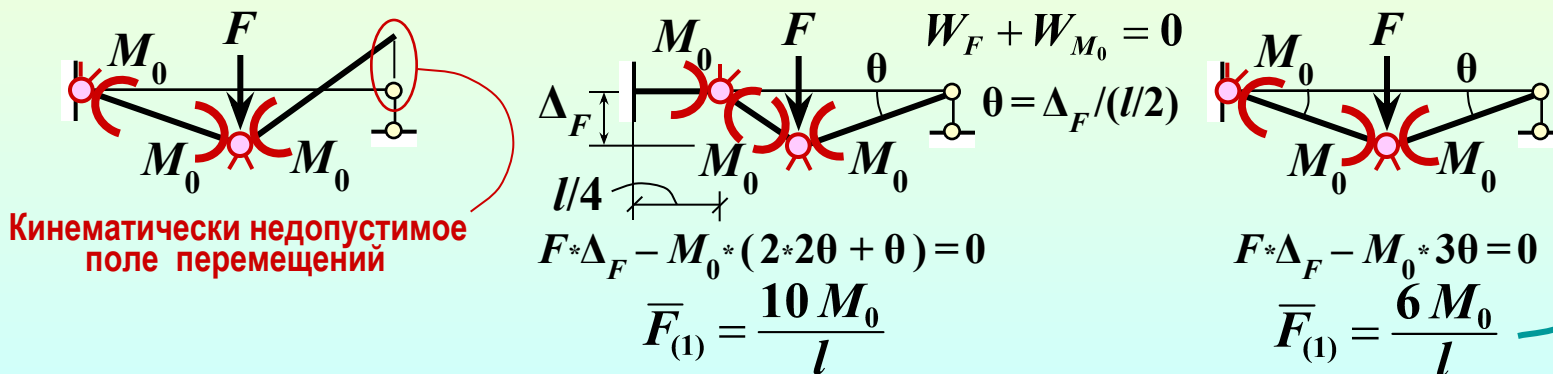
Определение предельных нагрузок балок

1. Решение статическим методом ТПР



2. Решение кинематическим методом ТПР

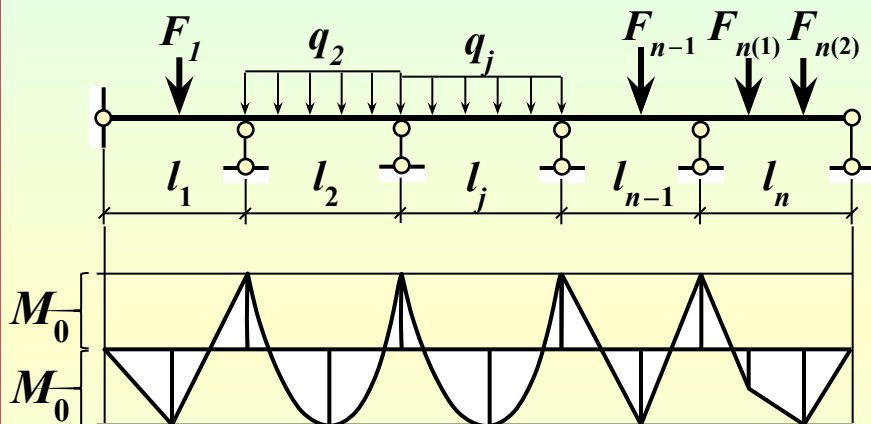
F_u



Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Определение предельных нагрузок балок

Способ выравнивания моментов

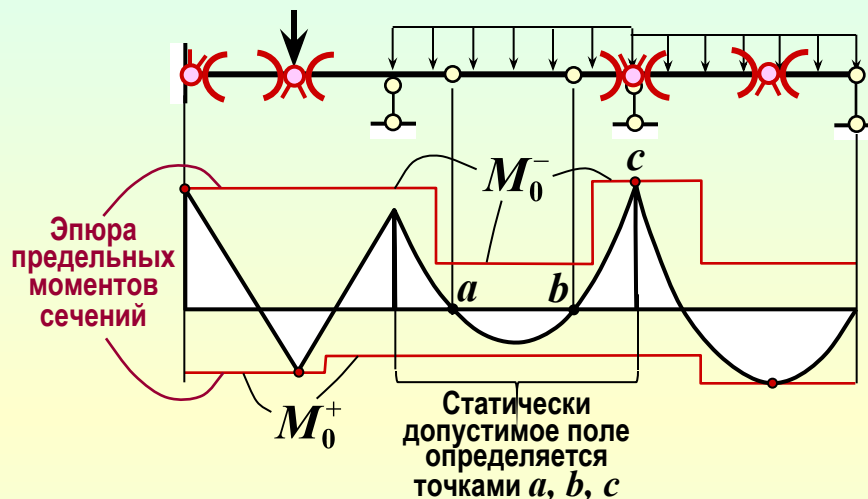


а) при независимых нагрузках –
определение предельных нагрузок
в каждом пролёте отдельно:

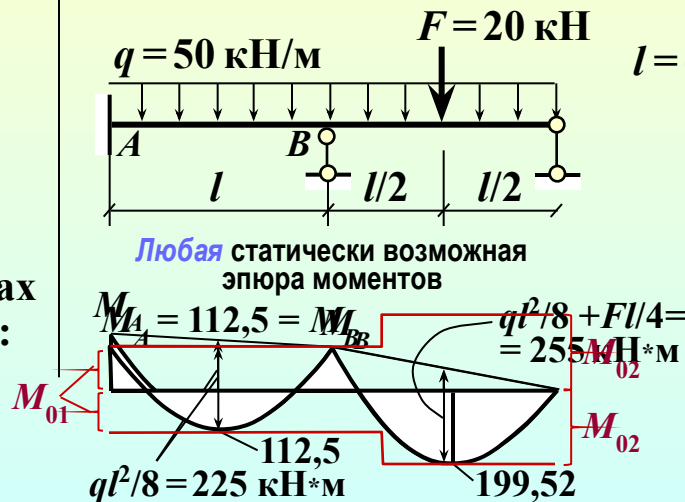
$$F_{1,u}, q_{2,u}, q_{j,u}, \dots, F_{n,u}$$

б) при однопараметрических нагрузках
 $F_1 = \alpha_1 P, q_2 = \alpha_2 P, q_j = \alpha_j P, \dots, F_n = \alpha_n P$:
 $P_u = \min P_{j,u}$

Балки переменного сечения



Подбор сечений балки по предельному равновесию



$$l = 6 \text{ м}; \sigma_s = 240 \text{ МПа}$$

Сечение по M_{01} :

$$W_{pl(1)} = M_{01} / \sigma_s = 469 \text{ см}^3$$

↪ I № 27a

Сечение по M_{02} :

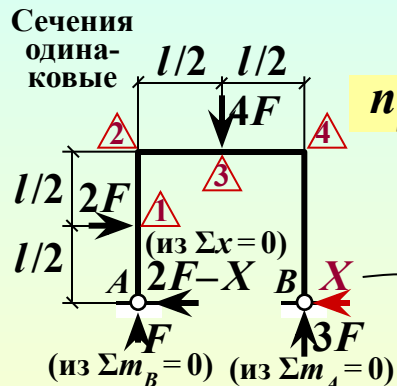
$$W_{pl(2)} = M_{02} / \sigma_s = 831 \text{ см}^3$$

↪ I № 36

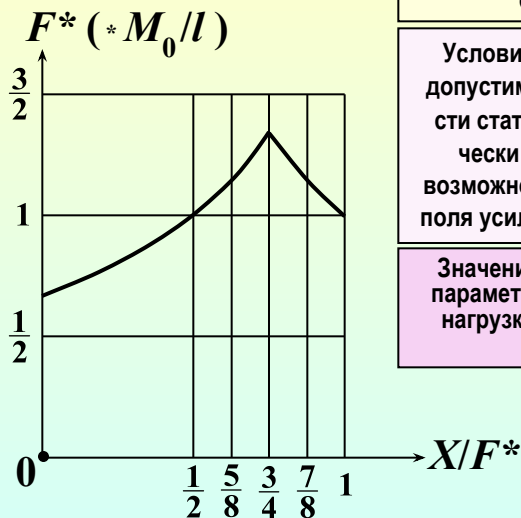
Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Предельное равновесие рам

1. Решение статическим методом ТПР



X — характеристика статически возможного поля усилий



№ варианта (i)	1	2	3	4	5	6
Значение характеристики $X_{(i)}$	0	$\frac{1}{2}F$	$\frac{5}{8}F$	$\frac{3}{4}F$	$\frac{7}{8}F$	F
Статически возможное поле усилий (эпюра изгибающих моментов, соответствующих $X_{(i)}$)						
Условие допустимости статически возможного поля усилий	$ M _{\max} = M_3 \leq M_0$ $M_3 = \frac{3}{2}Fl$	$ M _{\max} = M_3 \leq M_0$ $M_3 = Fl$	$ M _{\max} = M_3 \leq M_0$ $M_3 = \frac{7}{8}Fl$	$ M _{\max} = M_3 = M_4 \leq M_0$ $M_3 = \frac{3}{4}Fl$	$ M _{\max} = M_3 = M_4 \leq M_0$ $M_3 = \frac{7}{8}Fl$	$ M _{\max} = M_3 = M_4 \leq M_0$ $M_4 = Fl$
Значение параметра нагрузки	$F_{(1)}^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{M_0}{l}$	$F_{(2)}^* = \frac{M_0}{l}$	$F_{(3)}^* = \frac{8}{7} \cdot \frac{M_0}{l}$	$F_{(4)}^* = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_0}{l}$	$F_{(5)}^* = \frac{8}{7} \cdot \frac{M_0}{l}$	$F_{(6)}^* = \frac{M_0}{l}$

По статической теореме ТПР:

$$F_u \geq \max_X F(X) \geq \max F_{(i)}^* = F_{(4)}^* = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_0}{l} \quad \Rightarrow \quad F_u \geq \frac{4}{3} \cdot \frac{M_0}{l}$$

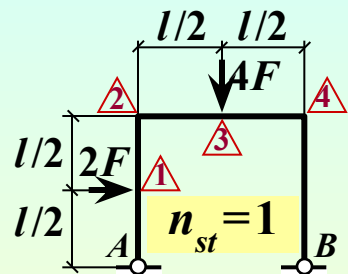
Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Предельное равновесие рам

2. Решение кинематическим методом ТПР

Количество возможных вариантов механизмов разрушения – $n_m = C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}$,
где r – число пластических шарниров в механизме ($r = n_{st} + 1$);
 k – число сечений, в которых могут образовываться шарниры.

$$r = 1 + 1 = 2; \quad k = 4 \quad \rightarrow \quad n_m = 4! / (2! \cdot 2!) = 6$$



№ варианта (i)	1	2	3	4	5	6
Комбинация сечений с пласт. шарн.						
Схема предельного механизма, соответствующего i-му кинематически допустимому полю перемещений						
Уравнение возможных работ $W_F^* + W_{M_0} = 0$	$2F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} - M_0(\theta + \theta + \theta) = 0$	$2F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} - 4F \cdot \frac{\theta}{3} \cdot \frac{l}{2} - M_0(\theta + \frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3}) = 0$	$2F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} - M_0(\theta + \frac{\theta}{2}) = 0$	$-2F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} + 4F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} - M_0(\theta + \theta + \theta + \theta) = 0$	$2F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} - M_0(\theta + \theta) = 0$	$2F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} + 4F \cdot \theta \cdot \frac{l}{2} - M_0(\theta + \theta + \theta + \theta) = 0$
Значение параметра нагрузки	$\bar{F}_{(1)} = 3 \frac{M_0}{l}$	$\bar{F}_{(2)} = 6 \frac{M_0}{l}$	$\bar{F}_{(3)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_0}{l}$	$\bar{F}_{(4)} = 4 \frac{M_0}{l}$	$\bar{F}_{(5)} = 2 \frac{M_0}{l}$	$\bar{F}_{(6)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_0}{l}$

По кинематической теореме ТПР:

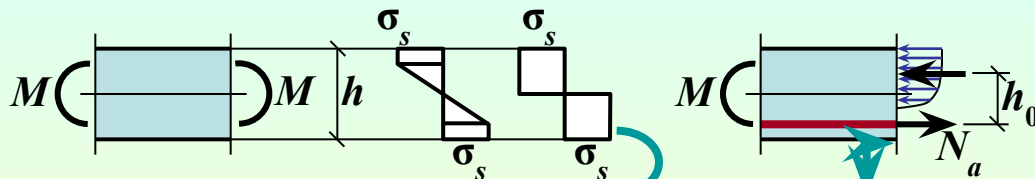
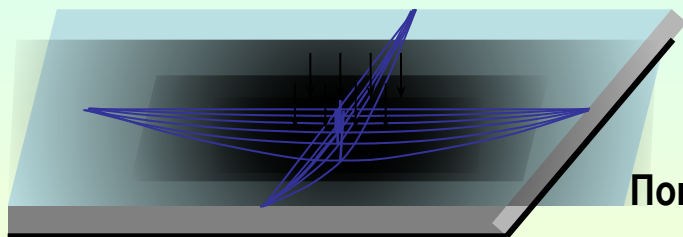
$$F_u \leq \min \bar{F}_{(i)} = \bar{F}_{(6)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_0}{l}$$

По двойственной теореме ТПР:

$$\max F_{(i)}^* \leq F_u \leq \min \bar{F}_{(i)} \quad \rightarrow \quad F_u = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_0}{l}$$

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Предельное равновесие пластин



Погонный предельный момент: $M_0 = \sigma_s h^2 / 4$

$$M_0 = N_a h_0 = \sigma_{s,a} A_a h_0$$

Условие предельного состояния сечения пластины: $m_x^2 + m_y^2 + k_t m_{xy}^2 - 1 = 0$

$$(m_x = M_x / M_0; m_y = M_y / M_0; m_{xy} = M_{xy} / M_0; k_t = 3 \vee 4)$$

Типовые схемы предельных пластических механизмов пластин

Вид нагрузки	Типы пластин по очертанию контура			
	Прямоугольные	Полигональные	Круглые	Эллиптические
Сосредоточенная				
Распределённая				

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Предельное равновесие пластин

Определение предельной нагрузки (параметра P_u) пластин кинематическим методом ТПР

Уравнение баланса работы нагрузки

и энергии диссипации в пластических шарнирах: $W_F^* = D$ где $W_F^* = P \cdot \Delta_P$; $D = M_0 \cdot \Delta_{M_0}$

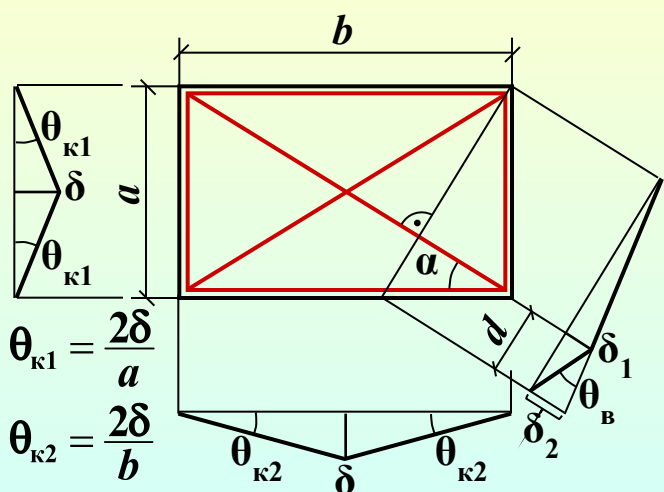
$$\Delta_P = \begin{cases} \delta_P & \text{— перемещение точки приложения сосредоточенной нагрузки } P, \\ V_\delta & \text{— объём эпюры перемещений предельного механизма} \\ & \text{при равномерно распределённой нагрузке } q \end{cases}$$

$$D = D_K + D_B$$

↑ ↑
контурных внутренних
шарниров шарниры текучести

По кинематической теореме ТПР: $P_u \leq P = \frac{D}{\Delta_P} = M_0 \cdot \frac{\Delta_{M_0}}{\Delta_P}$

Прямоугольные пластины при равномерно распределённой нагрузке q



$$\Delta_q = V_\delta = \frac{1}{3} ab \delta;$$

$$\Delta_{M_0} = \Delta_{M_0}^{\text{конт}} + \Delta_{M_0}^{\text{внутр}}$$

$$\Delta_{M_0}^{\text{внутр}} = 2 \theta_B l_{\text{diag}}$$

$$\Delta_{M_0}^{\text{конт}} = \theta_{k1} b \cdot n_b + \theta_{k2} a \cdot n_a$$

n_a, n_b — количества защемлённых сторон длинами a и b соответственно

$$\theta_B = \frac{\delta_2}{d} \quad d = a \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_1}{a \cos \alpha} \cdot \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{\delta_1}{\cos^2 \alpha} \quad \delta_1 = \frac{\delta}{a/(2 \sin \alpha)} \cdot a \sin \alpha = 2 \delta \sin^2 \alpha$$

$$\theta_B = \frac{2 \delta \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot a \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \delta}{a \cos \alpha} \quad l_{\text{diag}} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\Delta_{M_0}^{\text{внутр}} = \frac{4 \delta}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{4 \delta (a^2 + b^2)}{ab}$$

Расчёт конструкций с учётом пластических деформаций (физическая нелинейность)

Предельное равновесие пластин

Определение предельной нагрузки (параметра P_u) пластин кинематическим методом ТПР

Уравнение баланса работы нагрузки

и энергии диссипации в пластических шарнирах: $W_F^* = D$ где $W_F^* = P \cdot \Delta_P$; $D = M_0 \cdot \Delta_{M_0}$

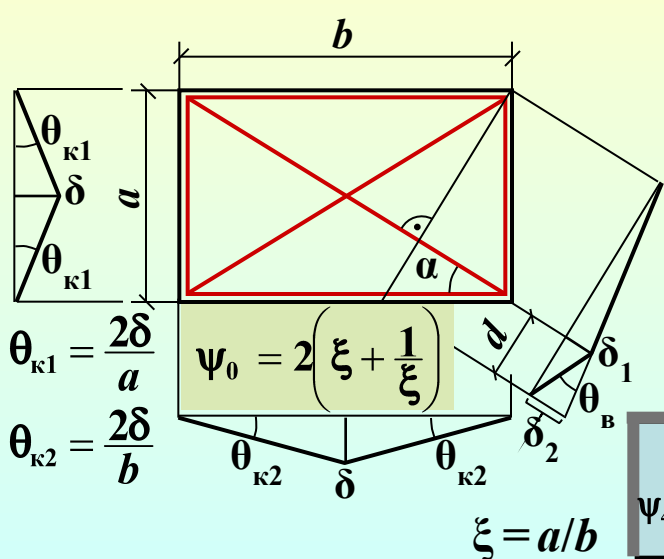
$$\Delta_P = \begin{cases} \delta_P & \text{— перемещение точки приложения сосредоточенной нагрузки } P, \\ V_\delta & \text{— объём эпюры перемещений предельного механизма} \\ & \text{при равномерно распределённой нагрузке } q \end{cases}$$

$$D = D^{\text{к}} + D^{\text{в}}$$

↑ ↑
контурных внутренних
шарниров шарниры текучести

По кинематической теореме ТПР: $P_u \leq P = \frac{D}{\Delta_P} = M_0 \cdot \frac{\Delta_{M_0}}{\Delta_P}$

Прямоугольные пластины при равномерно распределённой нагрузке q



$$\Delta_q = V_\delta = \frac{1}{3} ab \delta;$$

$$\Delta_{M_0}^{\text{внутр}} = \frac{4 \delta (a^2 + b^2)}{ab}$$

$$q_u \leq M_0 \cdot \frac{\Delta_{M_0}}{\Delta_q} = \frac{12 M_0}{ab} \cdot \psi_j(\xi)$$

$$\Delta_{M_0} = \Delta_{M_0}^{\text{конт}} + \Delta_{M_0}^{\text{внутр}}$$

$$\Delta_{M_0}^{\text{конт}} = \theta_{\text{к1}} b \cdot n_b + \theta_{\text{к2}} a \cdot n_a$$

n_a, n_b — количества защемлённых сторон длинами a и b соответственно

$$i=1 \quad \psi_1 = \frac{n_a}{n_b} \xi + \frac{1}{\xi}$$

$$i=2 \quad \psi_2 = \frac{n_a}{n_b} \xi + \frac{1}{\xi}$$

$$i=3 \quad \psi_3 = \frac{n_a}{n_b} \xi + \frac{1}{\xi}$$

$$i=4 \quad \psi_4 = \frac{n_a}{n_b} \xi + \frac{1}{\xi}$$

$$i=5 \quad \psi_5 = \frac{n_a}{n_b} \xi + \frac{2}{\xi}$$

$$i=6 \quad \psi_6 = \frac{n_a}{n_b} \xi + \frac{3}{\xi}$$

$$i=7 \quad \psi_7 = \frac{n_a}{n_b} \xi + \frac{2}{\xi}$$

$$i=8 \quad \psi_8 = \frac{n_a}{n_b} \xi + \frac{2}{\xi}$$

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, в которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 26»)

1. Какие системы называются нелинейно деформируемыми? [\(2\)](#)
2. Виды нелинейностей, влияющих на поведение деформируемых систем [\(2\)](#).
3. Чем различаются процессы деформирования систем с мягкой и жёсткой нелинейностями? [\(2\)](#)
4. Чем обусловлена физическая нелинейность (ФН)? [\(3\)](#) Примеры расчётных моделей нелинейного деформирования материалов [\(4\)](#).
5. В чём сущность геометрической нелинейности (ГН)? [\(5\)](#) Примеры проявления ГН в деформировании некоторых типов стержневых конструкций [\(6\)](#).
6. Что такое конструктивная нелинейность (КН)? [\(7\)](#) Каков общий признак КН? [\(7\)](#)
7. Что называется «расчётом по деформированной схеме»? [\(7\)](#)
8. Характерные случаи проявления конструктивной нелинейности в работе строительных конструкций [\(7, 8\)](#).
9. Как классифицируются задачи расчёта нелинейно деформируемых систем по видам нелинейностей? [\(9\)](#) Какие виды и сочетания нелинейностей наиболее актуальны для строительных конструкций? [\(9\)](#)
10. Методы расчёта нелинейно деформируемых систем [\(9\)](#).
11. Понятие об упругопластическом деформировании стержневых систем в случаях растяжения/сжатия и изгиба элементов [\(10–13\)](#). Предельное состояние сечения при изгибе (пластический шарнир) [\(13\)](#).
12. Расчёты физически нелинейно деформируемых систем методом предельного равновесия: основная идея определения предельной (разрушающей) нагрузки [\(14\)](#).
13. Статическая, кинематическая и обобщающая (двойственная) теоремы теории предельного равновесия [\(15\)](#).
14. Применение методов теории предельного равновесия для определения предельных нагрузок балок [\(17–20\)](#), рам [\(21, 22\)](#) и пластин [\(23–25\)](#) – общие представления.

*) Только в режиме «Показ слайдов».