Лекция № 6

Расчет на прочность.

Расчёт ведётся по величине фактических **максимальных напряжений**, возникающих в опасной точке нагруженной конструкции (***опасном сечении***)

Максимальное расчетное напряжение сравнивают с **допускаемым напряжением,** при котором материал конструкции может работать длительное время без риска разрушения.

Допускаемое напряжение должно быть **меньше** предельного

Условие прочности:

$$\sigma_{max} \le [\sigma] = \frac{\sigma_L}{n}$$

где: σ_L – некое предельное напряжение,

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение,

n – коэффициент запаса прочности, $n>1$

Пластичные материалы

$$\sigma_L = \sigma_T$$

n_T - коэффициент запаса по пределу текучести

Допускаемое напряжение:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$$

Хрупкие материалы

$$\sigma_L = \sigma_B$$

n_B - коэффициент запаса по пределу прочности

Допускаемое рапряжение:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}$$

При центральном растяжении-сжатии условие прочности, в зависимости от исходных данных, можно записать так:

$$\boxed{\left|\sigma_{\max}\right| = \frac{\left|N_{\max}\right|}{A} \leq [\sigma]}$$

- при постоянной площади поперечного сечения

Аналогично расчетам на прочность по нормальным напряжениям, проводятся ***расчеты на прочность по касательным напряжениям***.

Условие прочности :

$$\boxed{\left|\tau_{max}\right| \leq [\tau]}$$

Метод разрушающих нагрузок

Пластичные материалы	Хрупкие материалы
Разрушающей считается нагрузка, при которой в конструкции возникают *значительные пластические деформации* и она не способна воспринимать дальнейшее увеличение нагрузки.	*Разрушающей* считается нагрузка, при которой хотя бы в одном из элементов конструкции возникают напряжения, равные $\sigma_в$.

Расчеты на прочность бывают двух видов:

проверочный ***проектировочный***

При этом решается одна из трех задач:

- ***проверка выполнения условия прочности***

Производится проверка величины максимальных напряжений при заданных размерах и форме сечений элементов, нагрузке и свойствах материалов: $\sigma_т$; $\sigma_в$;$n_т$;$n_в$

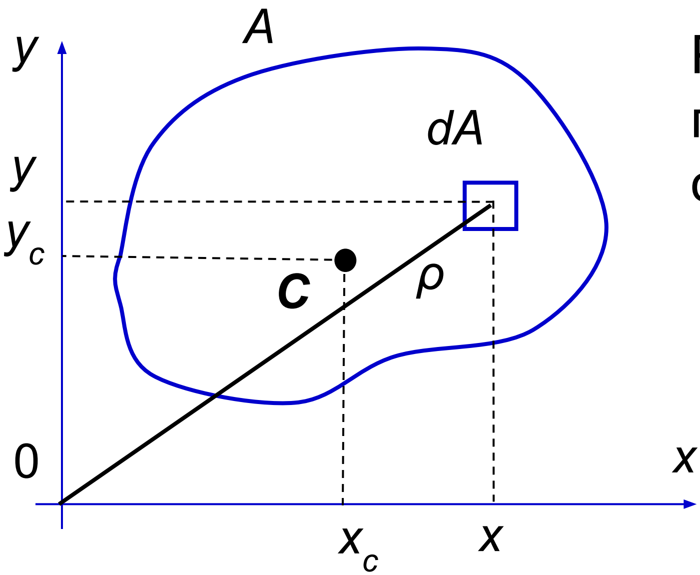
- ***определение размеров (площади) сечения***

Производится для сечения заданной формы при известной нагрузке и свойствах материалов;

- ***определение допускаемой нагрузки***

определяется грузоподъемность конструкции при заданных форме и размерах ее элементов и свойствах материалов.

Геометрические характеристики плоских сечений



Рассмотрим в плоскости координат Х,У произвольное сечение (замкнутую область) площадью *А*.

С – центр тяжести сечения.

Выделим элементарную площадку *dA.*

ρ - полярный радиус.

Статическими моментами сечения относительно осей ***y*** и ***x*** называются интегралы вида:

$$S_x = \int_A y dA \qquad S_y = \int_A x dA$$

Статические моменты сложного сечения могут принимать положительные (+), отрицательные (-) значения и быть равными нулю. Размерность см^{3}.

Осевыми моментами инерции сечения называются интегралы вида:

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

$$J_y = \int_A x^2 dA$$

Полярным моментом инерции сечения относительно начала координат называется интеграл вида:

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

где: **ρ** - ***полярный радиус***.

Осевые и полярный моменты инерции могут принимать положительные и равные нулю значения.

Размерность: [$см^4$].

$$J_\rho = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_y + J_x$$

Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции.

Следстви е:

Для симметричных сечений (круг, квадрат): $J_\rho = 2J_x$

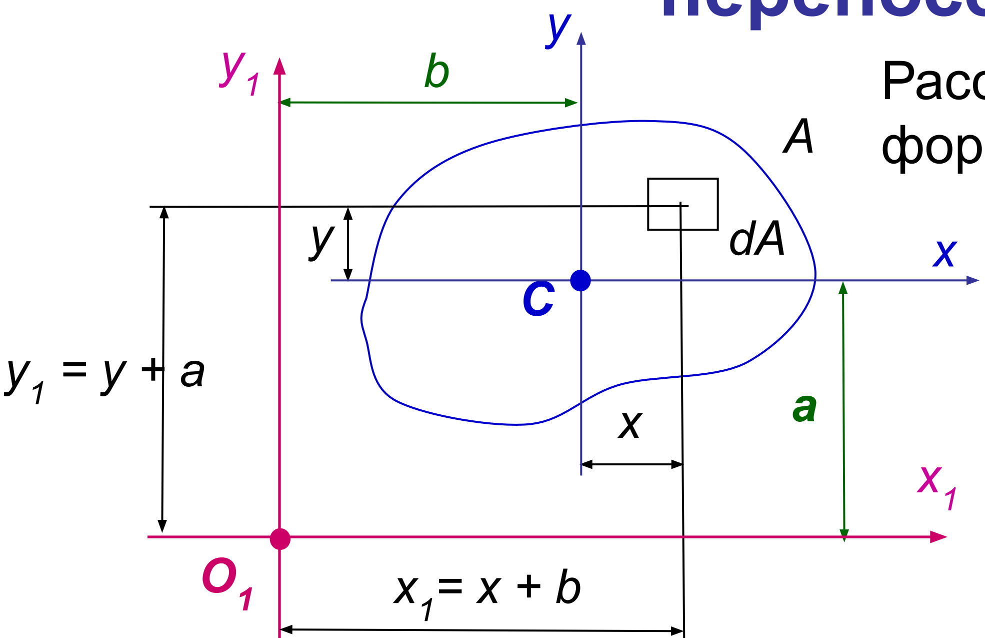
<u>Центробежным моментом инерции</u> сечения называется интеграл вида:

$$\boxed{J_{xy} = \int_A xy dA}$$

Центробежный момент инерции может принимать положительные, отрицательные или равные нулю значения.

<u>Размерность:</u> $[\ см^4\ ]$.

Теорема Штейнера о параллельном переносе осей.



Рассмотрим сечение произвольной формы площадью *A.*

Через его центр тяжести ***C*** проведем оси ***x*** и ***y***.

Введем новую систему координат $X_1O_1Y_1$, оси, которой параллельны осям системы ***XCY***.

Обозначим расстояние между осями ***x*** и x_1 как ***a*** ;
а расстояние между осями ***y*** и y_1 как ***b***.

По чертежу видно, что:

$$x_1 = x + b,\ y_1 = y + a;$$

Тогда:

$$S_{x_1} = \int_A y_1 dA = \int_A (y + a) dA = \int_A y dA + \int_A a dA = S_x + aA$$

$$S_{y_1} = \int_A x_1 dA = \int_A (x + b) dA = \int_A x dA + \int_A b dA = S_y + bA$$

Можно записать: $\boxed{S_x = S_{x_1} - aA}$ $\boxed{S_y = S_{y_1} - bA}$

Следствие: если $S_{x_1} = aA,$ то $S_x = 0;$

если $S_{y_1} = bA,$ то $S_y = 0;$

Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются ***центральными.***

Точка пересечения центральных осей ***x и y (точка С*** *с координатами b=x_c и a=y_c)* *называется* ***центром тяжести сечения.***

$$\boxed{x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x\,dA}{A}} \qquad \boxed{y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y\,dA}{A}}$$

Итак, получены формулы
при параллельном переносе осей:

$$\boxed{S_{x_1} = aA}$$

$$\boxed{J_{x_1} = J_x + a^2 A}$$

$$\boxed{J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abA}$$

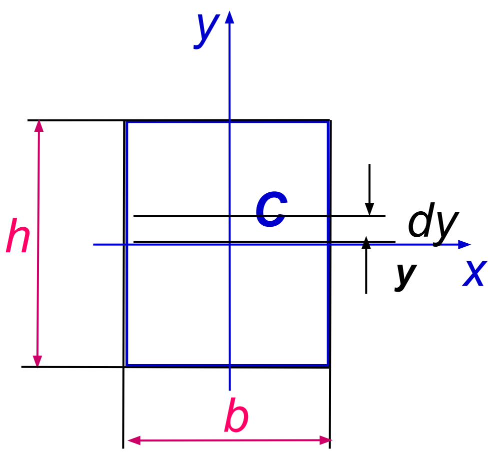
$$\boxed{S_{y_1} = bA}$$

$$\boxed{J_{y_1} = J_y + b^2 A}$$

Осевые моменты инерции простых сечений

Прямоугольник.

Пример.



Рассмотрим прямоугольник с вертикальным ребром ***h*** и горизонтальным ребром ***b***.

Через его центр тяжести ***C*** проведем оси ***x*** и ***y***.

Определим моменты инерции относительно осей ***x*** и ***y***:

На расстоянии ***y*** от оси ***x*** выделим элемент высотой ***dy***.

Площадь элемента $dA=bdy$

$$J_x=\int_A y^2 dA = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b\left(\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3}-\frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3}\right)=\frac{bh^3}{12}$$

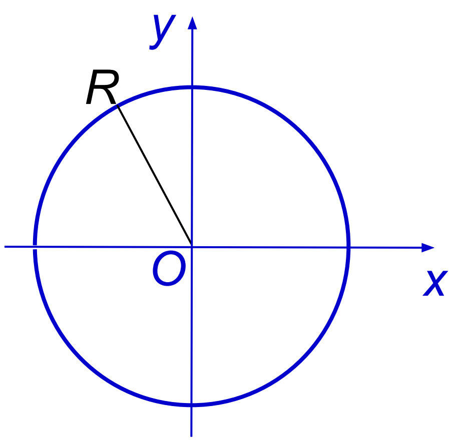
$$\boxed{J_x=\frac{bh^3}{12}}$$

$$J_y=\int_A x^2 dA = h\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx = h\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = b\left(\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3}-\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)^3}{3}\right)=\frac{hb^3}{12}$$

$$\boxed{J_y=\frac{hb^3}{12}}$$

Приме
р.

Круг.



Рассмотрим круг диаметром *D* = *2R*.

Через центр тяжести ***O*** проведем оси координат ***x*** и ***y***.

$dA = 2\pi r\, dr$

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \cong 0{,}1D^4$$

Т.к. для круга $x = y = R = \frac{D}{2}$ и $J_\rho = J_x + J_y$ то:

$$J_x = J_y = \frac{J_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Итак, получено для круга:

$$\boxed{J_x = \frac{\pi D^4}{64}} \quad \boxed{J_y = \frac{\pi D^4}{64}} \quad \boxed{J_p = \frac{\pi D^4}{32}}$$

Моменты сопротивления сечений

Осевым моментом сопротивления сечения изгибу **называется отношение <u>осевого момента инерции</u> к <u>наибольшему расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной точки по соответствующей оси</u>.**

$$\boxed{W_x = \frac{J_x}{y_{max}}}$$

$$\boxed{W_y = \frac{J_y}{x_{max}}}$$

Осевой момент сопротивления сечения изгибу может принимать **положительные** или **равные нулю значения**.

<u>**Размерность:**</u> [$см^3$].

Полярным моментом сопротивления сечения кручению **называется отношение** **полярного момента инерции сечения** **к** **максимальному полярному радиусу этого сечения.**

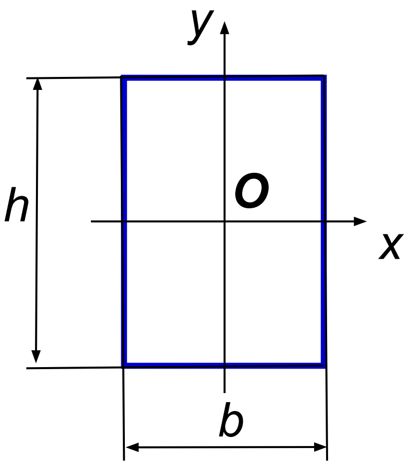
$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{max}}$$

Полярный момент сопротивления сечения может принимать **положительные** или **равные нулю значения**.

Размерность: $[\ см^3\ ]$.

Рассмотрим моменты сопротивления некоторых простых сечений.

Прямоугольное сечение.



$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6}$$

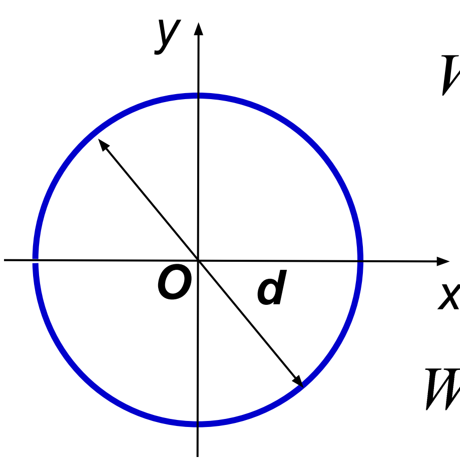
$$W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{hb^3 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{hb^2}{6}$$

Итак, получено:

$$\boxed{W_x = \frac{bh^2}{6}}$$

$$\boxed{W_y = \frac{hb^2}{6}}$$

Круглое сечение.



$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{64 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{16}$$

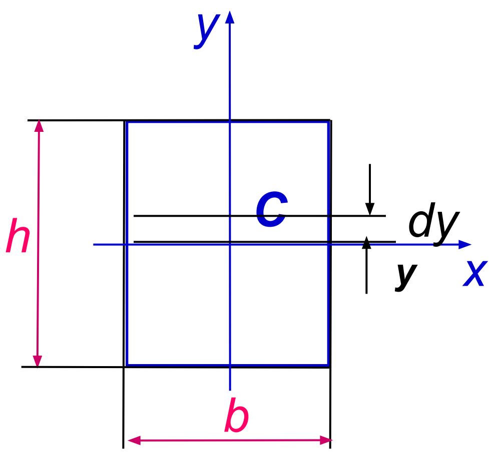
Итак, получено:

$$\boxed{W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}}$$

$$\boxed{W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}}$$

Осевые моменты инерции простых сечений

Пример. **Прямоугольник.**



Рассмотрим прямоугольник с вертикальным ребром ***h*** и горизонтальным ребром ***b***.

Через его центр тяжести ***C*** проведем оси ***x*** и ***y***.

Определим моменты инерции относительно осей ***x*** и ***y***:

На расстоянии ***y*** от оси ***x*** выделим элемент высотой ***dy***.

Площадь элемента *dA=bdy*

$$J_x = \int_A y^2 dA = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b\left(\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3}\right) = \frac{bh^3}{12}$$

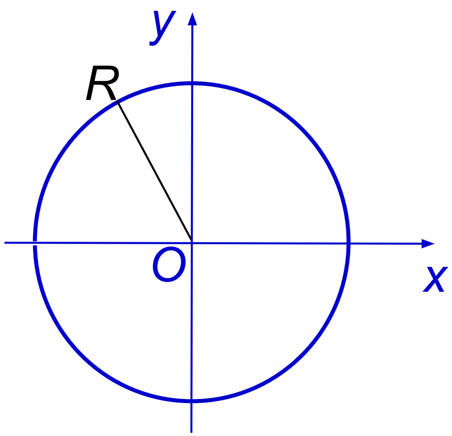
$$\boxed{J_x = \frac{bh^3}{12}}$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = h\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx = h\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = b\left(\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{b}{2}\right)^3}{3}\right) = \frac{hb^3}{12}$$

$$\boxed{J_y = \frac{hb^3}{12}}$$

Пример.

Круг.



Рассмотрим круг диаметром $D = 2R$.

Через центр тяжести ***O*** проведем оси координат ***x*** и ***y***.

$dA = 2\pi r\,dr$

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \cong 0{,}1D^4$$

Т.к. для круга $x = y = R = \dfrac{D}{2}$ и $J_\rho = J_x + J_y$ то:

$$J_x = J_y = \frac{J_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Итак, получено для круга:

$\boxed{J_x = \dfrac{\pi D^4}{64}}$ $\boxed{J_y = \dfrac{\pi D^4}{64}}$ $\boxed{J_p = \dfrac{\pi D^4}{32}}$

Моменты сопротивления сечений

Осевым моментом сопротивления сечения изгибу **называется отношение** **<u>осевого момента инерции</u>** **к** **<u>наибольшему расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной точки по соответствующей оси</u>.**

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{max}}$$

Осевой момент сопротивления сечения изгибу может принимать **положительные** или **равные нулю значения**.

<u>**Размерность:**</u> $[\, см^3 \,]$.

Полярным моментом сопротивления сечения кручению **называется отношение** **<u>полярного момента инерции сечения</u>** **к** **<u>максимальному полярному радиусу</u>** **<u>этого сечения.</u>**

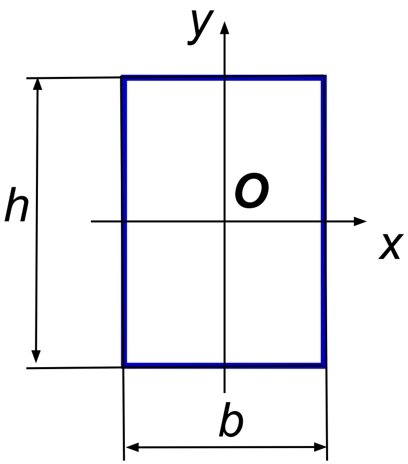
$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{max}}$$

Полярный момент сопротивления сечения может принимать **положительные** или **равные нулю значения**.

<u>Размерность:</u> $[\ см^3\ ]$.

Рассмотрим моменты сопротивления некоторых простых сечений.

Прямоугольное сечение.



$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6}$$

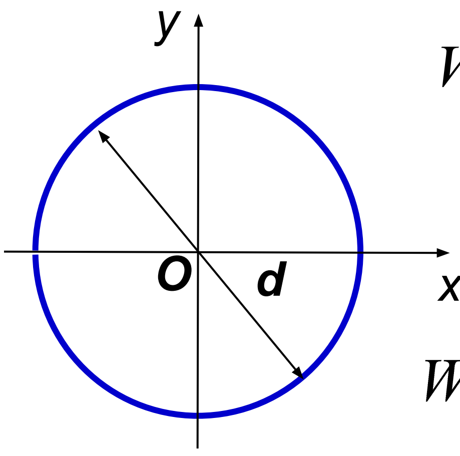
$$W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{hb^3 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{hb^2}{6}$$

Итак, получено:

$$\boxed{W_x = \frac{bh^2}{6}}$$

$$\boxed{W_y = \frac{hb^2}{6}}$$

Круглое сечение.



$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{64 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Итак, получено:

$$\boxed{W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}}$$

$$\boxed{W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}}$$