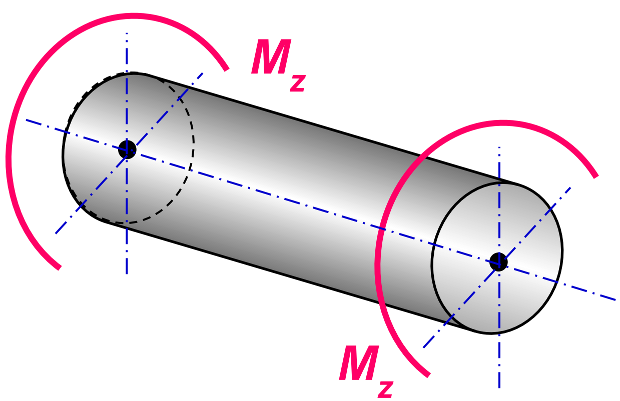
Лекция № 4

Кручение

Кручением называется такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечном сечении возникает только один внутренний силовой фактор, отличный от нуля, ***крутящий момент*** M_z или $M_{кр}$.

*Примером детали, работающей на кручение, является **вал**.*



При действии разнонаправленных крутящих моментов одинаковой величины в противоположных торцах вала, он будет закручиваться, сечения вала будут поворачиваться относительно друг друга, а длина вала будет оставаться неизменной.

При расчете бруса на кручение необходимо решить **две** задачи:

- найти напряжения, возникающие в брусе, т. е. рассчитать брус на прочность;

- найти действительный угол закручивания сечений, т. е. рассчитать брус на жесткость.

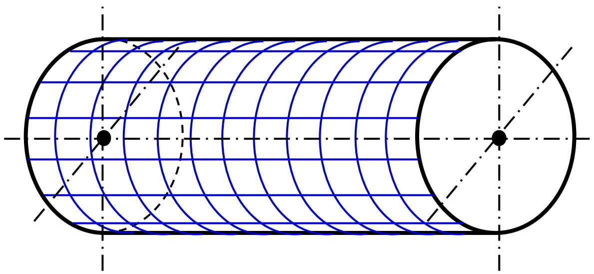
Расчет базируется на справедливости *гипотезы плоских сечений:*

Каждое поперечное сечение поворачивается в своей плоскости как жесткий диск.

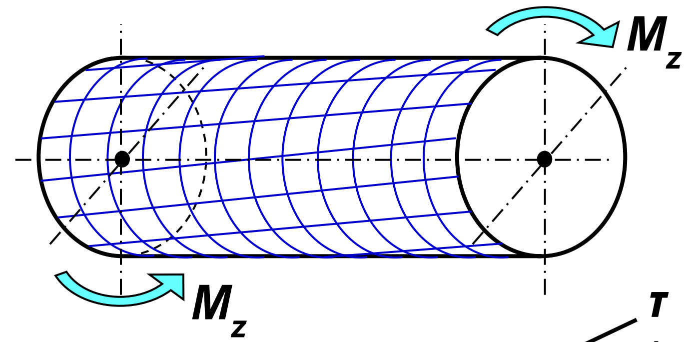
Из этого следует, что при кручении в плоскости поперечных сечений действуют только касательные напряжения τ

Рассмотрим вал с нанесенной на его поверхность прямоугольной сеткой.

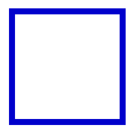
Вал до деформации



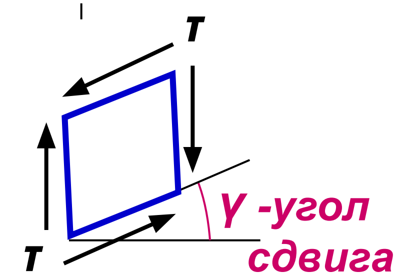
Вал после деформации



Элемент сетки до деформации



Элемент сетки после деформации



Опыт показывает, что расстояния между сечениями скручиваемого вала не изменяются.

Продольные линии сетки приобретают винтовую форму, прямые углы искажаются, как в случае чистого сдвига.

Выделенный элементарный объём вала находится в условиях чистого сдвига.

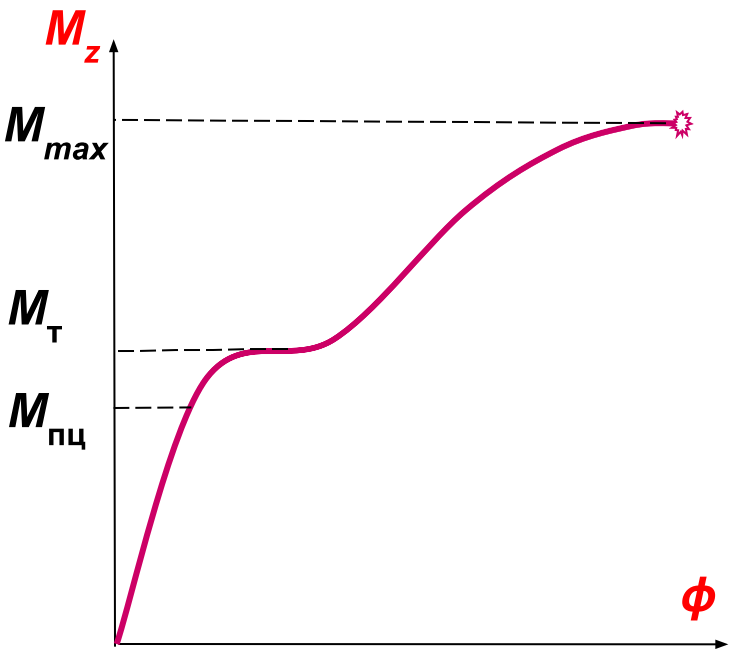
Радиусы остаются постоянными.

Нижележащие слои (ближе к центру) испытывают меньшую деформацию, а максимальная деформация достигается по образующей поверхности вала.

Следовательно, выделенный элемент объема любого слоя материала вала находится в условиях чистого сдвига.

Кручение – есть чистый сдвиг.

Экспериментально показано, что если закручивать вал до разрушения, то ***диаграмма кручения*** **подобна диаграмме растяжения-сжатия**.



Основные характерные точки:

$M_{пц}$ - момент пропорциональности, до которого выполняется закон Гука;

Закон Гука для кручения

$$\boxed{\tau = G\gamma}$$

G – ***модуль сдвига*** (***модуль упругости второго рода***), справочная величина, неизменная и постоянная для каждого материала.

γ – ***угол сдвига*** (***угловая деформация***)

Размерность: $[G] = \frac{Н}{м^2} = Па$

Размерность: $[\gamma] = рад$

M_T - момент текучести;

M_{max} - максимальный момент, выдерживаемый образцом до разрушения.

Для стали: ***G = 0,8 · 10⁴ МПа.***

E = 2,1 • 10⁵ МПа

Экспериментально показано, что ***E >> G.***

Рассмотрим круглый брус поперечного сечения A , жестко закрепленный своим левым торцом. Направим ось ***z*** вдоль оси бруса слева направо.

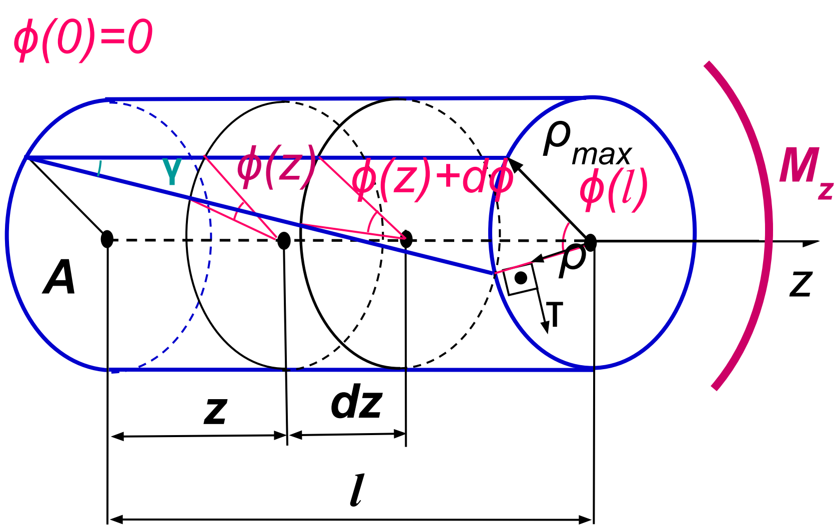
Рассмотрим на поверхности бруса образующую (горизонтальную линию).

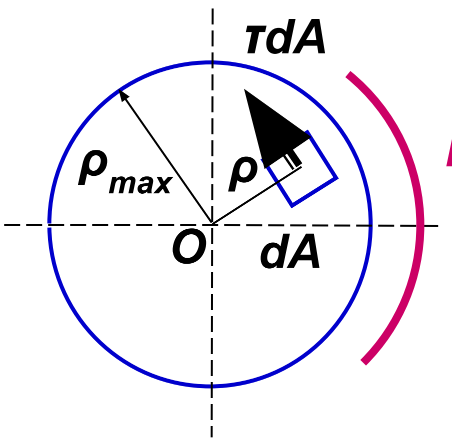
Приложим к правому свободному торцу бруса крутящий момент M_z .

Тогда образующая повернется на малый угол сдвига γ.

а любой радиус поперечного сечения бруса на расстоянии ***z*** от жесткой заделки

повернется на малый угол ***ϕ (z)*** - ***угол закручивания.***





τdA – элементарная сила

При этом, элементарный внутренний момент определим как произведение силы на плечо, т.е.:

$$dM = \tau dA\rho$$

Полный крутящий момент определим по формуле:

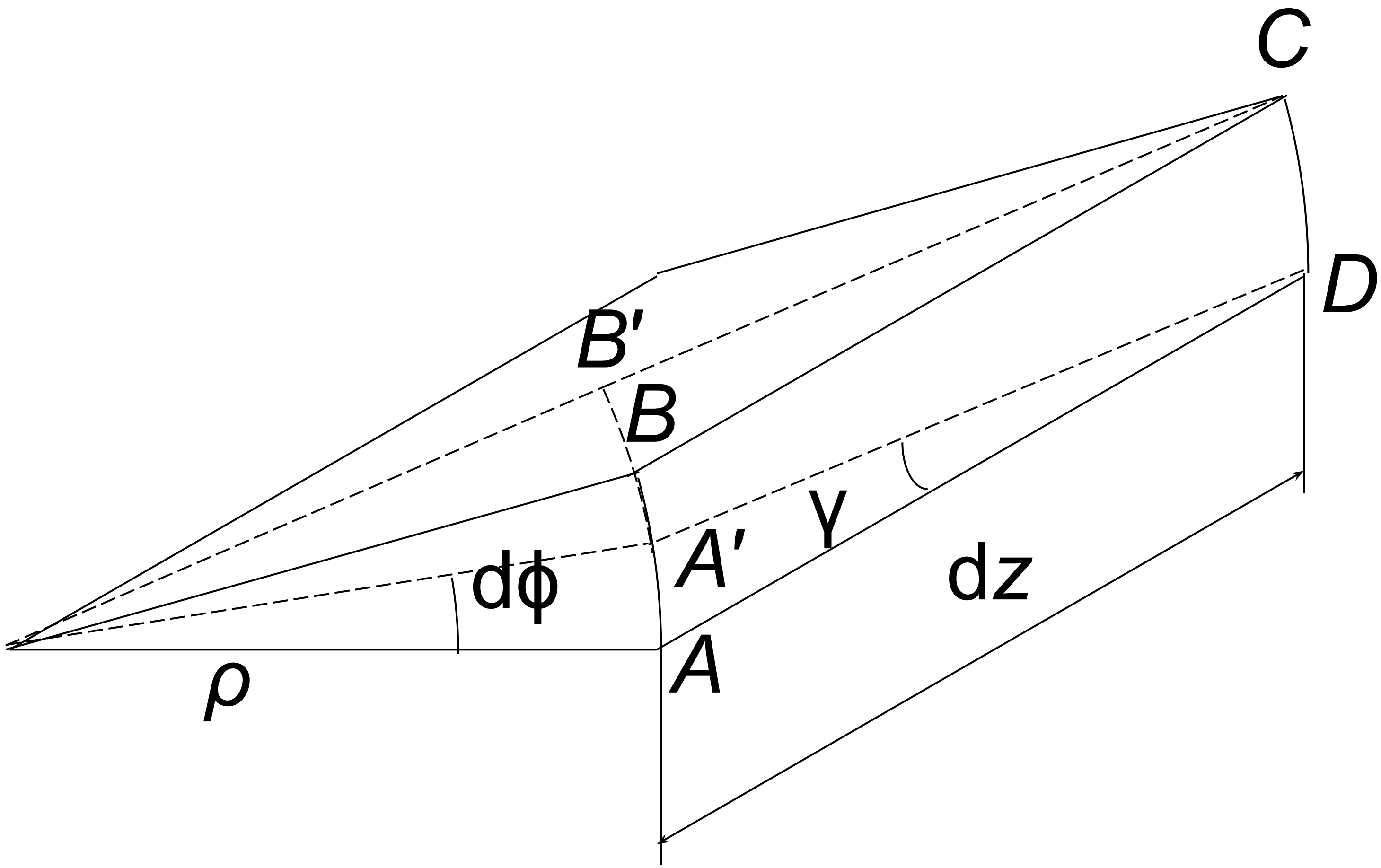
$$\boxed{M_z = \int_A \tau\rho dA} \qquad \textbf{(1)}$$

Рассмотрим бесконечно малый участок бруса длиной ***dz*** и радиусом ***ρ***.

Одно сечение мысленно закрепим, а другое торцевое сечение повернётся на некоторый угол.

Рассмотрим деформацию выделенного элемента.

Определение относительного угла закручивания



$$AA' = \rho \, \mathrm{d}\varphi = \gamma \, \mathrm{d}z$$

Угловая деформация:

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\rho \quad (2)$$

Относительный угол закручивания:

$$\theta = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}z \quad (3) \rightarrow (2)$$

Тогда

$$\gamma = \theta\rho \quad (4) \rightarrow (5)$$

Связь касательного напряжения и угловой деформации выражается законом Гука при кручении:

$$\tau = G\gamma \quad (5)$$

Или:

$$\tau = G\theta\rho \quad (6) \rightarrow (1)$$

Полный внутренний крутящий момент запишем:

$$M_k = \int_A G\theta\rho^2 \, \mathrm{d}A$$

$$M_k = G\theta \int_A \rho^2 \, \mathrm{d}\, A$$

где

$$J_\rho = \int_A \rho^2 \, \mathrm{d}\, A$$

J_p - полярный момент инерции.

$$\theta = \frac{M_k}{GJ\rho} \quad (7) \qquad (3) \rightarrow (7)$$

Взаимный угол поворота сечения (расчет на жесткость).

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GJ_p} \qquad \varphi = \int_0^z \frac{M_k}{GJ_p} dz$$

при $M_z = const$

Условие жесткости:

$$\boxed{\varphi = \frac{M_z l}{GJ_\rho} \leq [\varphi]}$$

Жесткостью сечения круглого бруса ***при кручении*** называется произведение GJ_p.

Размерность: $[GJ_p] = H \cdot м^2$

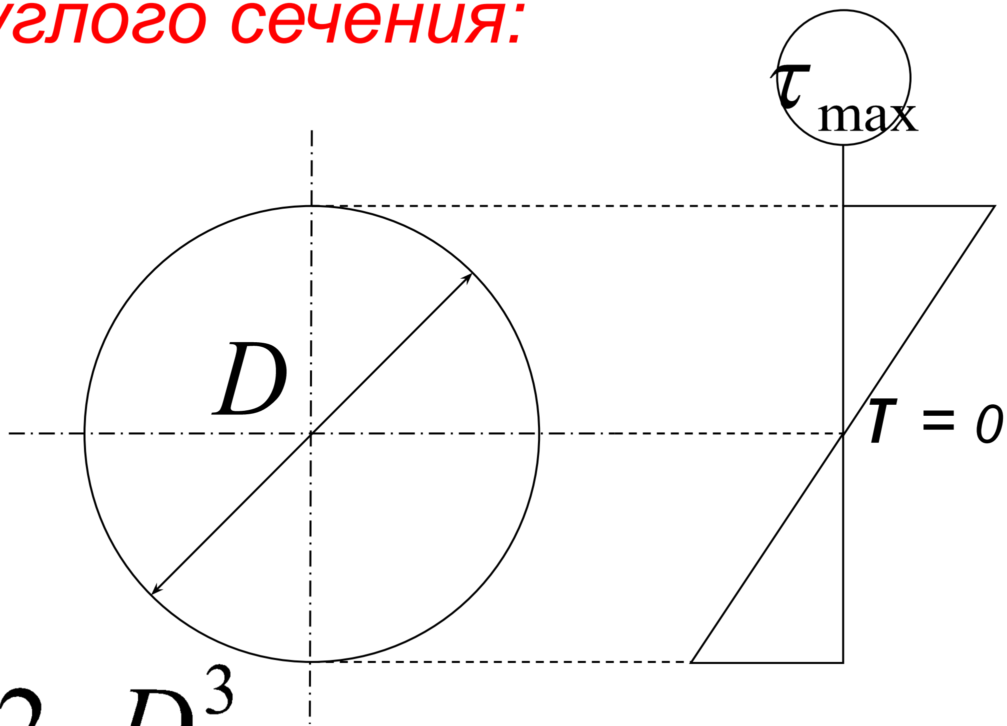
Касательные напряжения.

Исключим из (6) и (7) θ получим после преобразования:

$$\boxed{\tau = \frac{M_k \rho}{J_p}} \quad \text{или} \quad \boxed{\tau = \frac{M_k}{W_p}}$$

где $W_\rho = J_\rho/\rho$ - полярный момент сопротивления.

Закон распределения касательных напряжений для круглого сечения:



$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0{,}2 \cdot D^3$$

$$\tau_{max} = \frac{M_k (D/2)}{J_p}$$; $D/2 = \rho_{max}$

При $\rho = 0$; $T = 0$

При $\rho = \rho_{max}$; $T = T_{max}$

Итак, получена формула для определения касательных напряжений при кручении:

$$\tau = \frac{M_z \rho}{J_p}$$

Максимальные касательные напряжения при кручении будут возникать на наружной поверхности вала, т.е. при $\rho = \rho_{max}$,

Следовательно: *<u>условие прочности</u>* при кручении можно записать:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z \rho_{\max}}{J_p} = \frac{M_{\max}}{W_\rho} \le [\tau]$$

Угол закручивания вала определяем по формулам Гука для кручения:

при $M_z = M_z(z) \ne const$

$$\varphi = \int\limits_z \frac{M_z(z)}{GJ_\rho} dz$$

при $M_z = const$

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_\rho}$$

Расчеты на прочность при кручении

Расчеты на кручение проводят из условия прочности:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_\rho} \le [\tau]$$

а) ***проектировочный расчет или расчет на прочность***

проводят с целью определения диаметра вала при кручении по формулам:

$$W_\rho \ge \frac{M_{z_{max}}}{[\tau]} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16M_z}{\pi[\tau]}}$$

$$[\tau] = 15 \div 20 M\Pi a$$

б) ***проверочный расчет***

проводят с целью определения максимальных касательных напряжений при кручении и сравнения их с допускаемыми.

При этом известны: нагрузка, размеры сечения и свойства материала.

Для стали: $[\tau] = 0{,}55 \div 0{,}6[\sigma_p]$ *Для чугуна:* $[\tau] = 1{,}0 \div 1{,}2[\sigma_p]$

Расчеты ведутся с точностью -10%...+5% от [т].

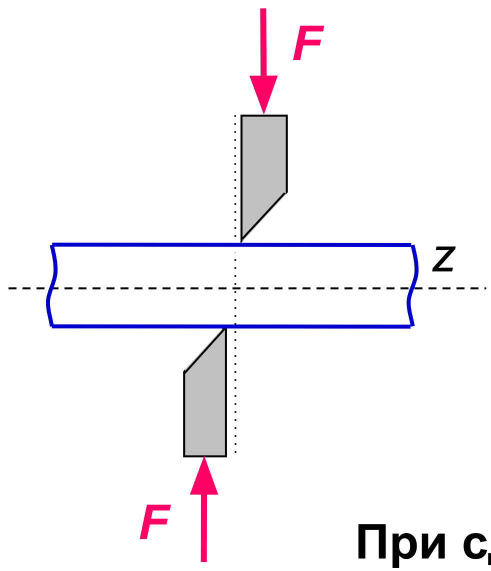
Сдвиг и смятие

Сдвигом называется такой вид деформации бруса, при котором в любом его поперечном сечении возникает только один внутренний силовой фактор – поперечная сила ($\boldsymbol{Q_y}$ или $\boldsymbol{Q_x}$).

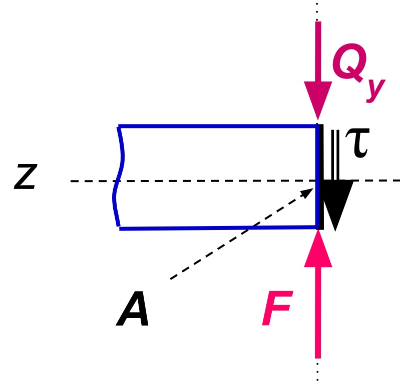
Примером сдвига является резка ножницами металлических полос и прутков.

$\overline{\tau}$ A

Вектор касательных напряжений лежит в плоскости площади сдвига



$\Leftrightarrow$



$$Q_y = \int_A \tau dA = \tau A$$

При сдвиге в поперечном сечении бруса возникают только **касательные напряжения**, которые определяют по формуле:

$$\tau = \frac{Q_y}{A}$$

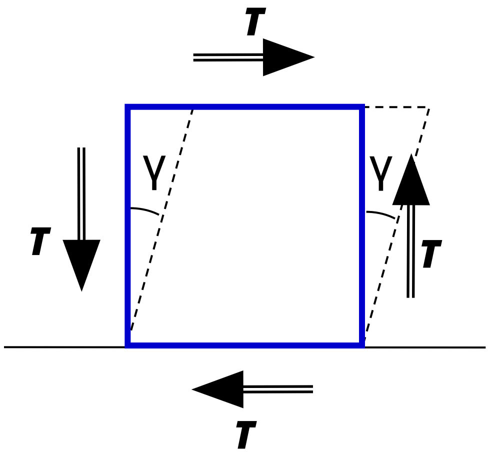
где: Q_y - поперечная сила,

A - площадь сдвига.

Условие прочности при сдвиге:

$$\tau = \frac{Q_y}{A} \le [\tau],$$

где: $[\tau]$ - допускаемое напряжение при сдвиге.



Напряженное состояние, при котором в окрестности точки можно выделить элементарный (бесконечно малый) квадрат, на сторонах которого действуют только касательные напряжения, называется ***чистым сдвигом***.

Закон Гука при сдвиге имеет тот же вид, что и при кручении:

$$\tau = G\gamma$$

Существует связь между тремя упругими константами для любого материала:

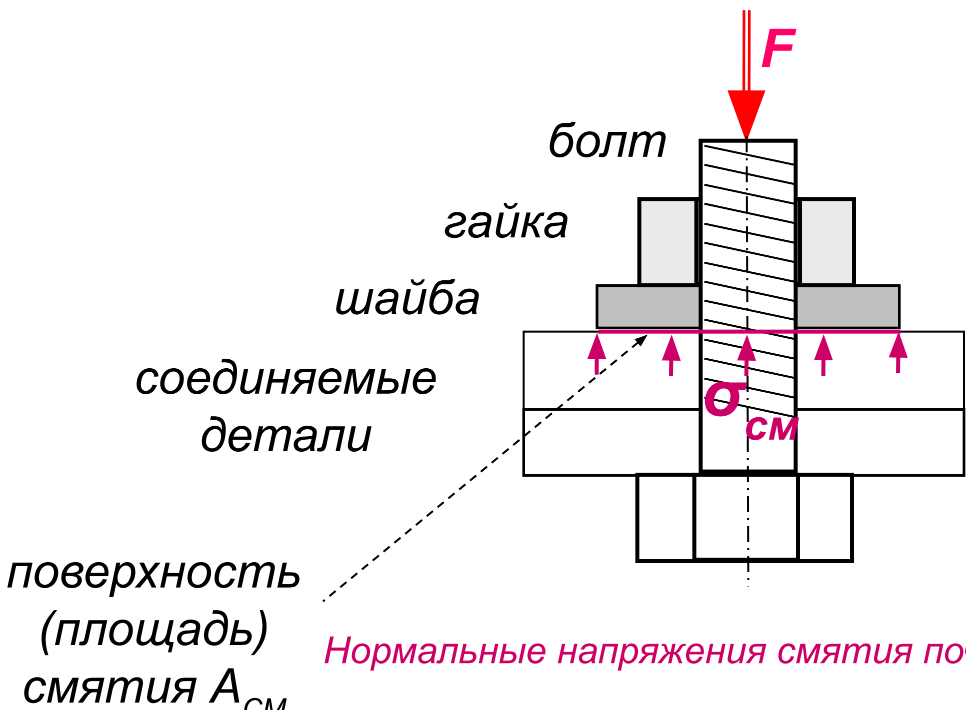
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Сдвиг, приводящий к разрушению материала, называется ***срезом*** (*при пластической деформации*) и ***скалыванием*** (*при хрупком разрушении*).

Допускаемое напряжение на срез для болтов: $\left[\tau_{ср}\right] = 0{,}25 \div 0{,}35\,\sigma_T$

Смятие – деформация, обусловленная местным сжатием материалов соприкасающихся деталей по площадкам передачи давления.

Примером смятия является разрушение болтов или деталей, которые они соединяют, при чрезмерном закручивании гайки.



Условие прочности при смятии:

$$\boxed{\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \le \left[\sigma_{см}\right]}$$

где: F - сжимающая сила,

$A_{см}$ - площадь смятия,

$\left[\sigma_{см}\right]$ - допускаемое напряжение при смятии.

Нормальные напряжения смятия почти всегда перпендикулярны к плоскости смятия.