БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА
кафедра «Динамика, прочность и износостойкость транспортных средств»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Лектор: д.т.н., профессор Сосновский Леонид Адамович
п.з.: к.т.н., доцент Комиссаров Виктор Владимирович

Форма контроля знаний – экзамен

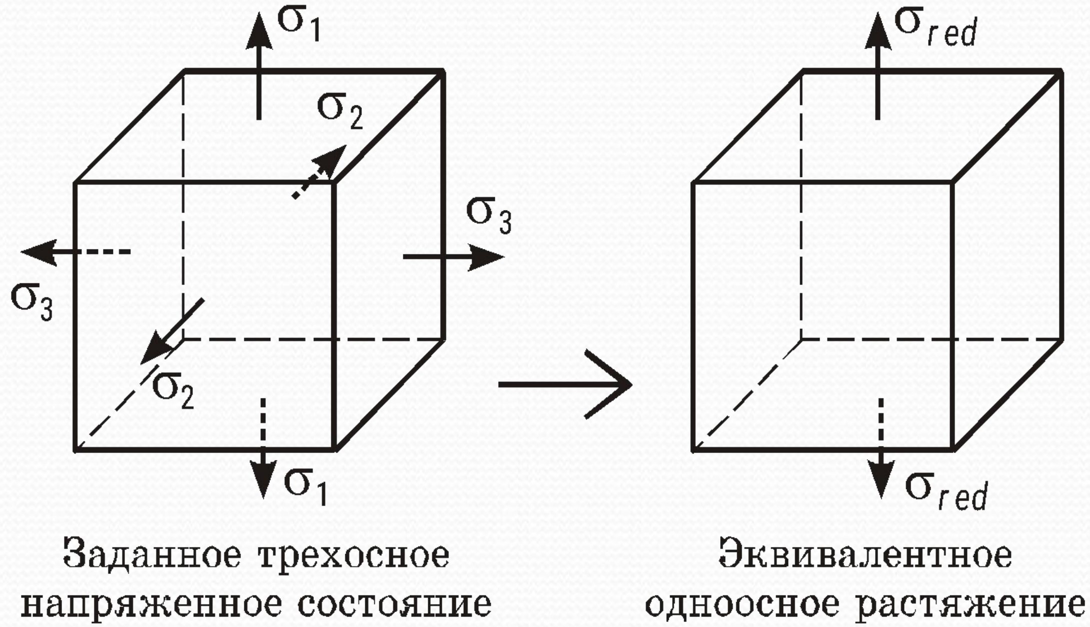
(по всем вопросам обращаться на кафедру ауд. 1403, 1415а)

ГОМЕЛЬ, 2015

Лекция 23

ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ
И РАЗРУШЕНИЯ

23.1 Прочность при сложном напряженном состоянии



$$\sigma_{red} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma] \qquad (1)$$

Существует *два подхода* к построению теорий прочности:

1. Выдвигается гипотеза о преимущественном влиянии того или иного фактора на процесс перехода материала в предельное состояние, которая в дальнейшем проверяется экспериментами;

2. Теория строится на основе экспериментальных данных так, чтобы она не только могла охватить все случаи, но и находилась в лучшем соответствии с этими данными.

23.2 Теория максимальных нормальных напряжений (первая теория прочности)

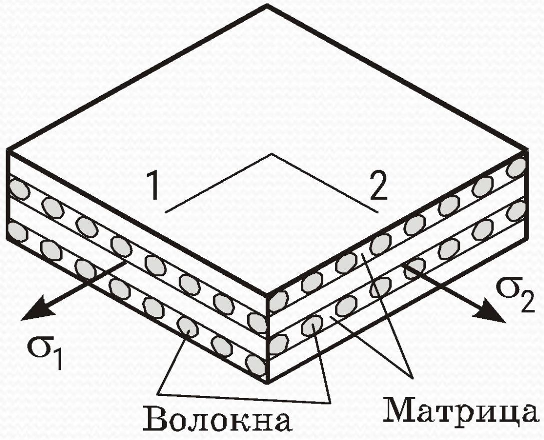
Эта теория использует следующий ***критерий эквивалентности***: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны наибольшие нормальные напряжения.
Эквивалентное напряжение принимается равным максимальному по абсолютной величине главному напряжению:

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} = \max(\sigma_1, |\sigma_3|)$$

Условие прочности по первой теории записывается в виде

$$\sigma^{I}_{red} = \max(\sigma_1, |\sigma_3|) \le [\sigma] \qquad (2)$$

Недостаток этой теории в том, что она учитывает только наибольшее из главных напряжений, а влияние двух остальных игнорирует.



23.3 Теория максимальных линейных деформаций (вторая теория прочности)

Эта теория связывает переход в предельное состояние с моментом, когда наибольшая деформация достигает определенного предельного значения, которое устанавливается из опытов на растяжение (сжатие). Поэтому в ней формулируется следующий ***критерий эквивалентности*:** два напряженных состояния равноопасны, если у них равны наибольшие относительные деформации.

Для сложного напряженного состояния с главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3, когда $\sigma_1 > |\sigma_3|$ (преимущественное растяжение), наибольшая деформация определяется формулой

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right]$$

Для эквивалентного состояния одноосного растяжения

$$\varepsilon_{red} = \sigma_{red} / E$$

Условие прочности по второй теории записывается в виде

$$\sigma_{red}^{II} = \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \le [\sigma] \qquad (3)$$

При преимущественном сжатии, т. е. когда $|\sigma_3| > \sigma_1$, условие прочности принимает вид

$$\sigma_{red}^{II} = \sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) \le [\sigma]$$

Вторая теория прочности так же, как и первая, слабо соответствует экспериментальным данным. Она удовлетворительно совпадает с экспериментом лишь при разрушении хрупких материалов в сложных напряженных состояниях.

23.4 Теория максимальных касательных напряжений Треска – Сен-Венана (третья теория прочности)

Третья теория использует следующий ***критерий эквивалентности***: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны максимальные касательные напряжения.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Для эквивалентного одноосного растяжения напряжением σ_{red} максимальные касательные напряжения $\tau_{\max\, red} = \frac{1}{2}\sigma_{red}$

Условие прочности по третьей теории записывается в виде

$$\sigma_{red}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma] \qquad \textbf{(4)}$$

Для большинства пластичных материалов пределы текучести при растяжении и сжатии одинаковы, поэтому для них третья теория прочности достаточно надежно предсказывает наступление текучести.

Третья теория прочности дает также удовлетворительные результаты и для описания разрушения хрупких материалов в тех случаях, когда разрушение путем отрыва невозможно, и оно происходит за счет сдвига по плоскостям действия $\tau_{\max}$. Так разрушаются хрупкие образцы при сжатии.

Таким образом, *третья теория прочности позволяет рассматривать предельные состояния текучести и хрупкого сдвига с единой точки зрения*.

Следствие. Сформулируем третью теорию прочности для брусьев, в опасных точках которых одновременно возникают нормальные и касательные напряжения (при *изгибе с кручением*, *поперечном изгибе*). В этом случае главные напряжения

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

следовательно, эквивалентное напряжение растяжения

$$\sigma_{red} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Поэтому выражение (4) принимает вид

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]$$

Впервые роль касательных напряжений при разрушении отметил Ш. Кулон (1776). Связь пластического течения материалов с максимальными касательными напряжениями была экспериментально установлена французским инженером Треска). На основе его исследований Б. Сен-Венан сформулировал условие (8.3) как условие пластичности и построил основные уравнения теории пластичности, поэтому третью теорию прочности называют *теорией Треска–Сен-Венана*.

23.5 Энергетическая теория Хубера– Мизеса– Хенки (четвертая теория прочности)

Энергетический *критерий эквивалентности*: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны потенциальные энергии изменения формы.

В сложном напряженном состоянии энергия формоизменения в главных напряжениях определяется вторым из соотношений

$$U_d = \frac{1+\nu}{6E}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right)$$

По той же формуле для простого растяжения с эквивалентным напряжением $\sigma_1 = \sigma_{red}$ получаем

$$U_{d\,red} = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_{red}^2$$

Условие прочности по четвертой теории

$$\sigma_{red}^{IV} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \le [\sigma] \qquad \textbf{(5)}$$

Достоинством четвертой теории является то, что учитываются все три главных напряжения и не требуется в процессе расчета следить за их нумерацией, так как в соотношение (5) они входят равноправно. Это позволяет отказаться от строгой их расстановки в порядке убывания и связать с направлениями координатных осей.

23.5 Энергетическая теория Хубера– Мизеса– Хенки (четвертая теория прочности)

Следствие. При *изгибе с кручением* и *поперечном изгибе* эквивалентное напряжение

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sigma^2 + 6\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} .$$

Условие прочности по четвертой теории принимает вид

Полученная формула дает меньшее значение σ_{red} для изгиба с кручением, чем третья теория прочности.

23.6 Теория предельных состояний Мора (пятая теория прочности)

Условие прочности выглядит следующим образом:

$$\sigma_{red}^{V} = \sigma_1 - k\sigma_3 \le [\sigma] \qquad (6)$$

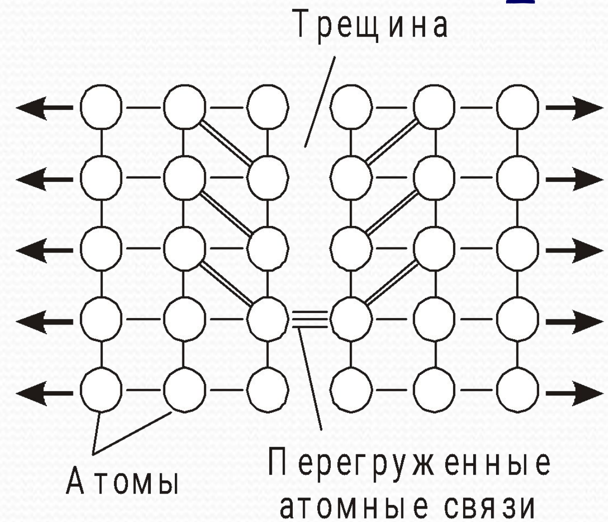
где k – коэффициент, численно равный отношению предельных напряжений при линейном растяжении и сжатии;

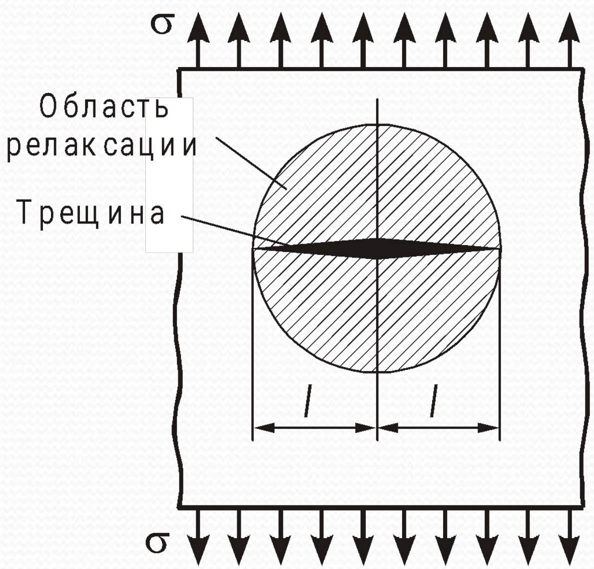
$$k = \sigma_{lim\ t} / \sigma_{lim\ c}$$

Для пластичных материалов эти напряжения одинаковы, следовательно, $k = 1$, и условие (6) формально совпадает с теорией Треска–Сен-Венана (4). Наилучшие результаты теория Мора дает для смешанных напряженных состояний, т. е. при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_3 < 0$.

23.7 Теория трещин Гриффитса

Физическую картину того, что происходит у вершины трещины, иллюстрирует схема, показанная на рисунке. Если трещина перерезала несколько межатомных связей, то в результате концентрации напряжений существенно возросла нагрузка, передаваемая на атомную связь у самой вершины трещины. В таких условиях перегруженная связь (показана несколькими параллельными линиями), как правило, не выдерживает нагрузки и разрывается, что приводит к перегрузке следующей связи и т. д.





Главная идея теории Гриффитса состоит в том, что ***потенциальная энергия* тела**, накопленная им в процессе упругого деформирования, при разрушении полностью превращается **в энергию образующихся новых поверхностей (*поверхностную энергию*)**.

В теории упругости показано, что высвобожденная энергия деформации *U* равна

$$U = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon(\pi l^2) = \frac{\pi\sigma^2 l^2}{2E}$$

Энергия, которая потребляется телом для образования двух новых поверхностей (трещины),

$$G = 2l\gamma$$

где γ – плотность поверхностной энергии (работа, необходимая для образования единицы новой поверхности); γ можно считать константой материала, определяемой экспериментально.

23.7 Теория трещин Гриффитса

Покажем, что если длина трещины становится больше некоторого критического значения, то трещина высвобождает больше энергии, чем потребляет. А так как тело всегда стремится уменьшить запасенную в нем энергию, то такая трещина развивается стремительно и безостановочно, разрушая образец материала.

$$W = G - U = 2l\gamma - \frac{\pi\sigma^2 l^2}{2E}$$

Максимум общей энергии находим из условия равенства нулю производной общей энергии по длине трещины:

$$\partial W / \partial l = 0$$

$$2\gamma - \frac{\pi\sigma^2 l}{E} = 0$$

Отсюда получаем ***критическую полудлину трещины*** для заданного напряжения σ

$$l_{cr} = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}$$

и ***критическое напряжение*** для заданной полудлины l

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi l}}$$

Если $l < l_{cr}$ или $\sigma < \sigma_{cr}$, то трещина не развивается. Если $l \geq l_{cr}$ или $\sigma \geq \sigma_{cr}$, то трещина стремительно и безостановочно растет, разрушая образец материала.

23.7 Теория трещин Гриффитса

Теория Гриффитса устанавливает ***условие роста трещины***

$$l \ge \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2} \quad \text{или} \quad \sigma \ge \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi l}} \qquad (1)$$

Теория Гриффитса справедлива для **хрупких материалов**. Для ***пластичных металлов и сплавов*** следует учитывать энергию, которая расходуется на пластическое деформирование. На основе концепции энергетического баланса Гриффитса

Е. Орован и Д. Ирвин предложили ввести в формулы (1) вместо истинной удельной поверхностной энергии γ эффективную поверхностную энергию

$$\gamma_{ef} = \gamma + \gamma_p$$

где γ_p – работа пластического деформирования, необходимая для образования единицы новой поверхности.

Опыты показывают, что для сталей $\gamma_p \approx 10^3\gamma$. Следовательно, можно пренебречь величиной γ и принять условие роста трещины

$$l \ge \frac{2\gamma_p E}{\pi\sigma^2} \quad \text{или} \quad \sigma \ge \sqrt{\frac{2\gamma_p E}{\pi l}} \qquad (2)$$