

Физические основы механики

*Элементы
кинематики*

Основные понятия кинематики

- **Механика** — часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.
- **Механическое движение** — это изменение с течением времени положения тела относительно других тел.
- Механика Галилея—Ньютона называется **классической механикой**. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света c в вакууме.
- Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью c , изучаются **релятивистской механикой**, основанной на **специальной теории относительности**, сформулированной А. Эйнштейном (1879—1955).
- Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприменимы — они заменяются законами **квантовой механики**.

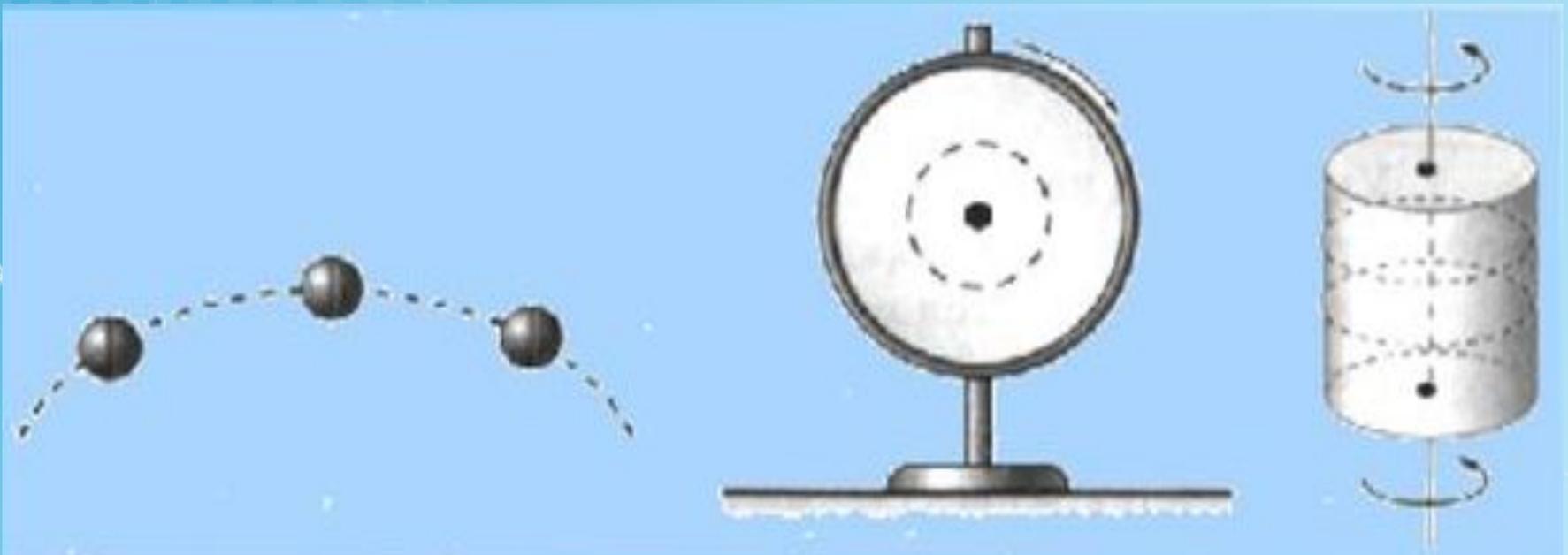
Виды механического движения

поступательное

- Движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

вращательное

- Движение, при котором все точки тела движутся по окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой **осью вращения**.



Слово **кинематика** происходит от греческого слова *kinematos* - движение.

Кинематика изучает, *как* движется тело, но не изучает, *почему* тело движется так, а не иначе.

Основными задачами кинематики являются:

а) Описание с помощью математических формул, графиков или таблиц совершаемых телом движений.

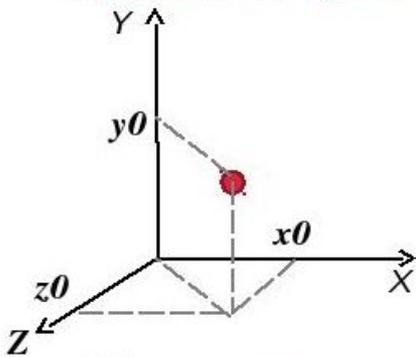
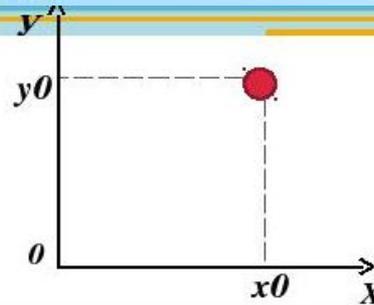
б) Определение кинематических величин, характеризующих это движение.

Для описания движения в кинематике вводятся специальные понятия (материальная точка, система отсчета, траектория) и величины (путь, перемещение, скорость, ускорение).

Материальной точкой считают такое тело, размерами которого можно пренебречь в соответствии с условием рассматриваемой задачи.



- Положение тела на плоскости определяется двумя координатами
- Положение тела в пространстве определяется тремя координатами



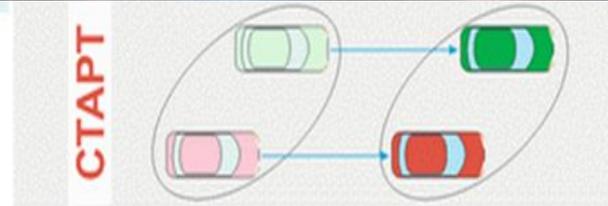
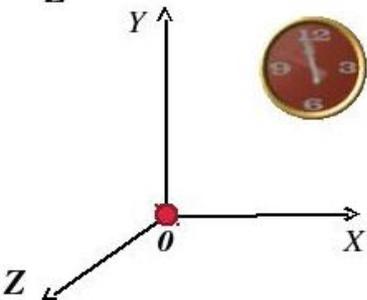
Вывод: необходимо выбрать систему координат

При движении тела его положение изменяется со временем

Вывод: необходим прибор для отсчета времени

СИСТЕМА ОТСЧЕТА

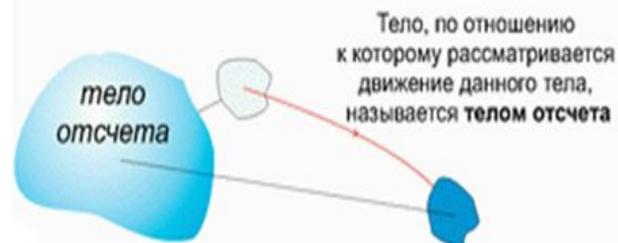
- тело отсчета
- система координат
- прибор для отсчета времени



Автомобили неподвижны друг относительно друга, но движутся относительно Земли

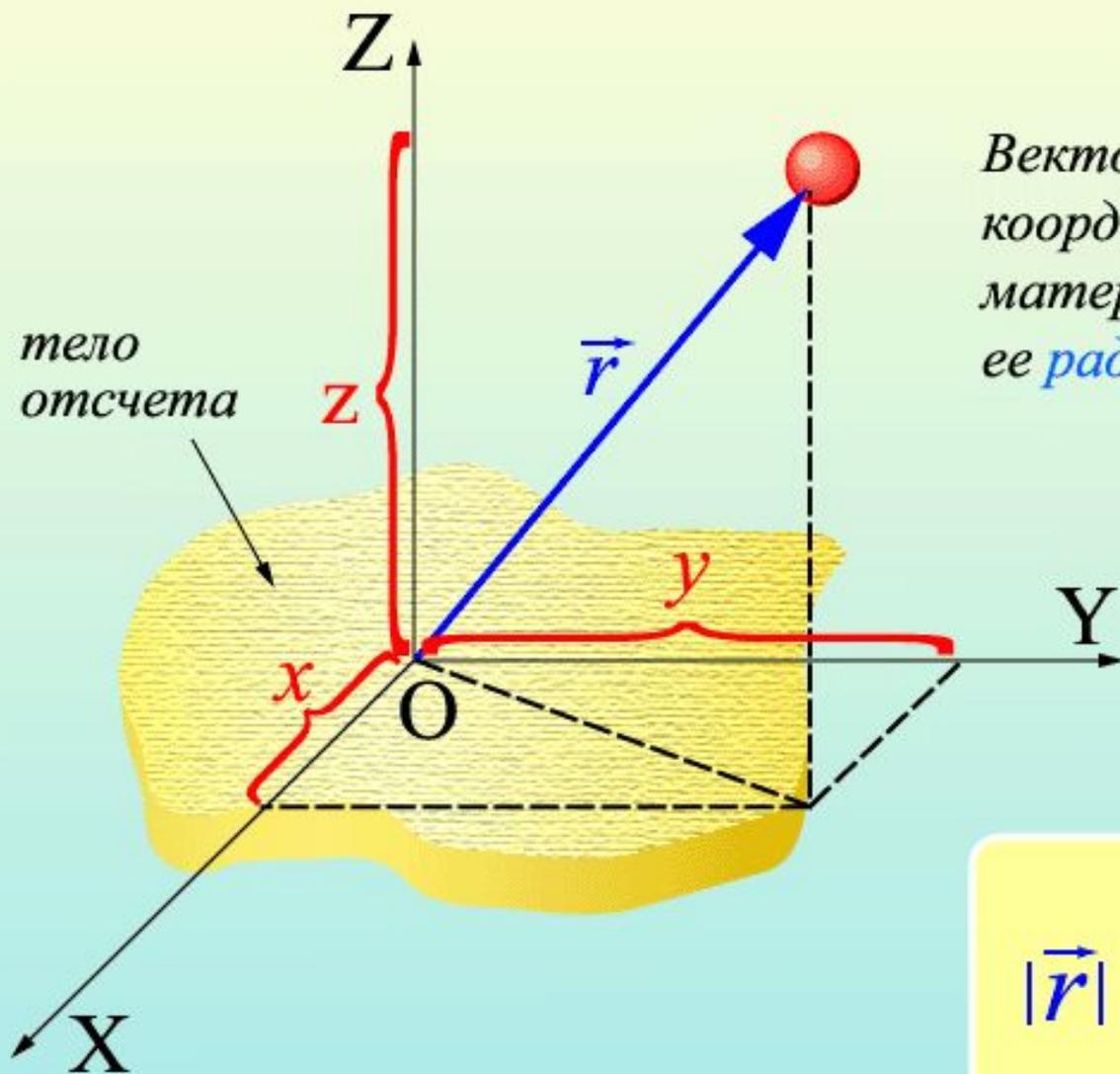


Говорить о движении уединенного тела бессмысленно, так как нет тел, по отношению к которым изменяется его положение



Тело, по отношению к которому рассматривается движение данного тела, называется телом отсчета

Радиус-вектор материальной точки

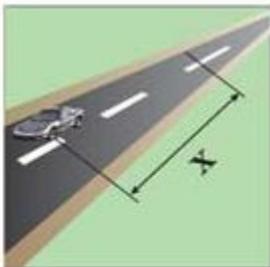


Вектор \vec{r} , проведенный из начала координат в место расположения материальной точки, называется ее *радиус-вектором*

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

СИСТЕМА КООРДИНАТ

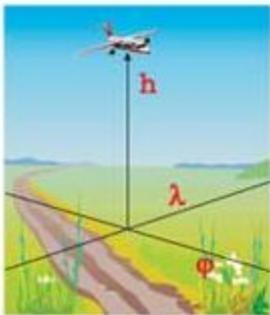
Положение тела может определяться



а) одной координатой (x)



б) двумя координатами (φ , λ)

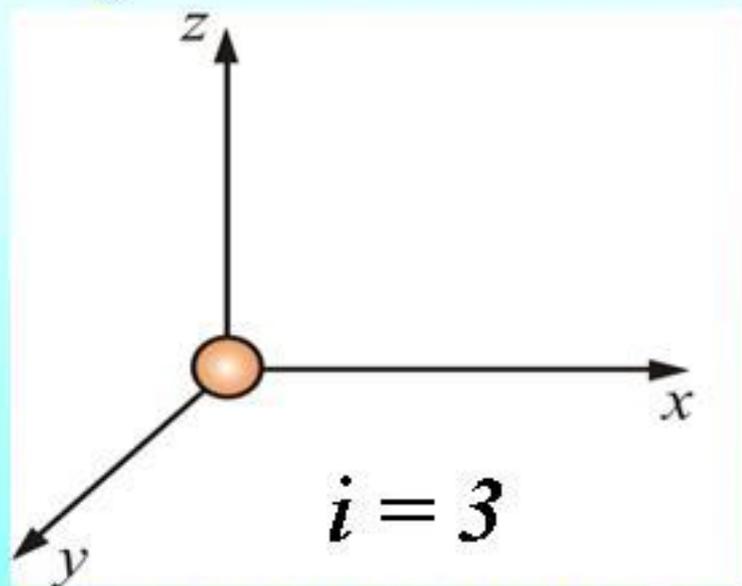


в) тремя координатами (φ , λ , h)

□ При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями

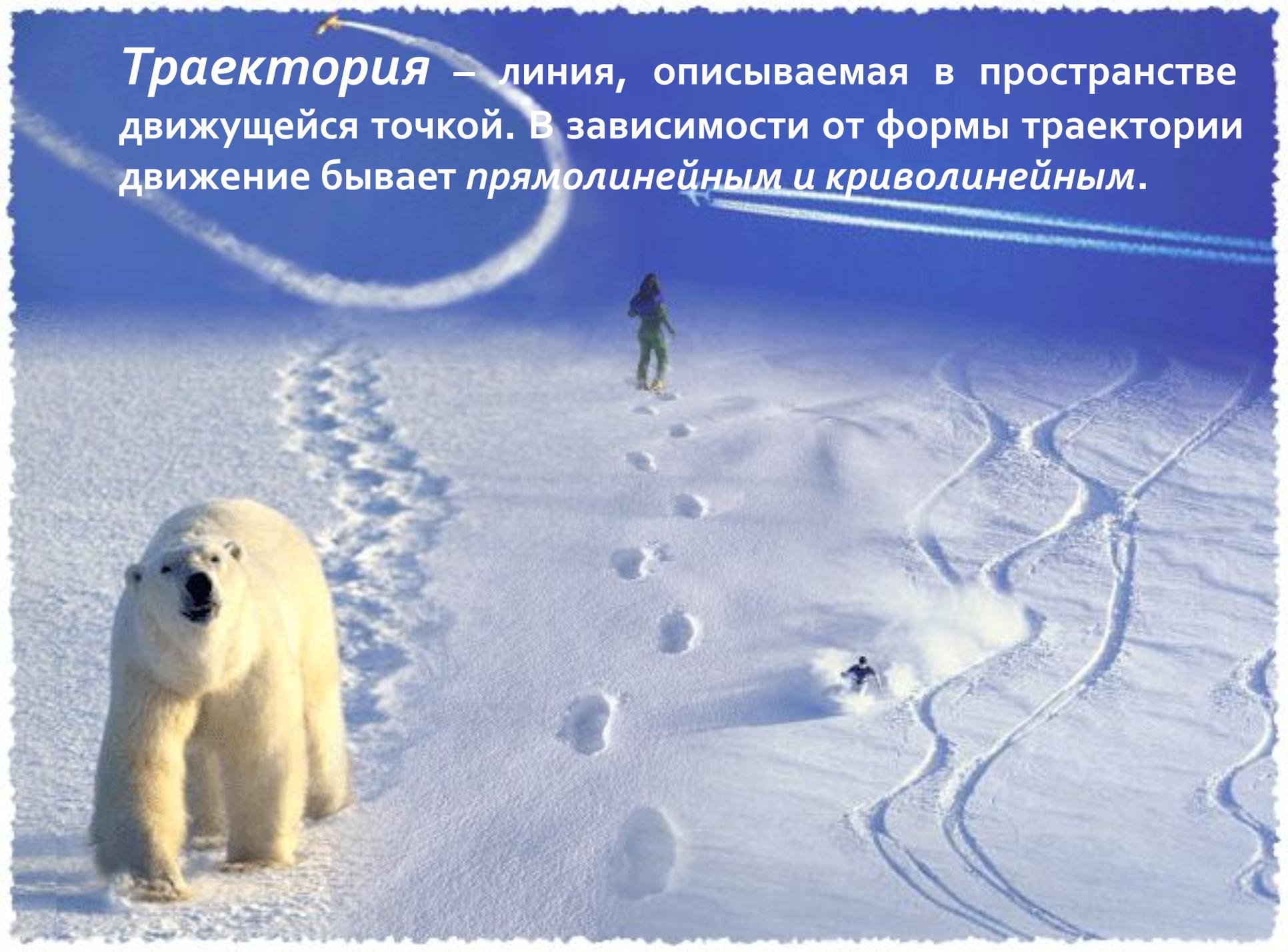
□ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – кинематические уравнения движения материальной точки.

Число степени свободы называется число независимых переменных, определяющих положение тела в пространстве и обозначается i

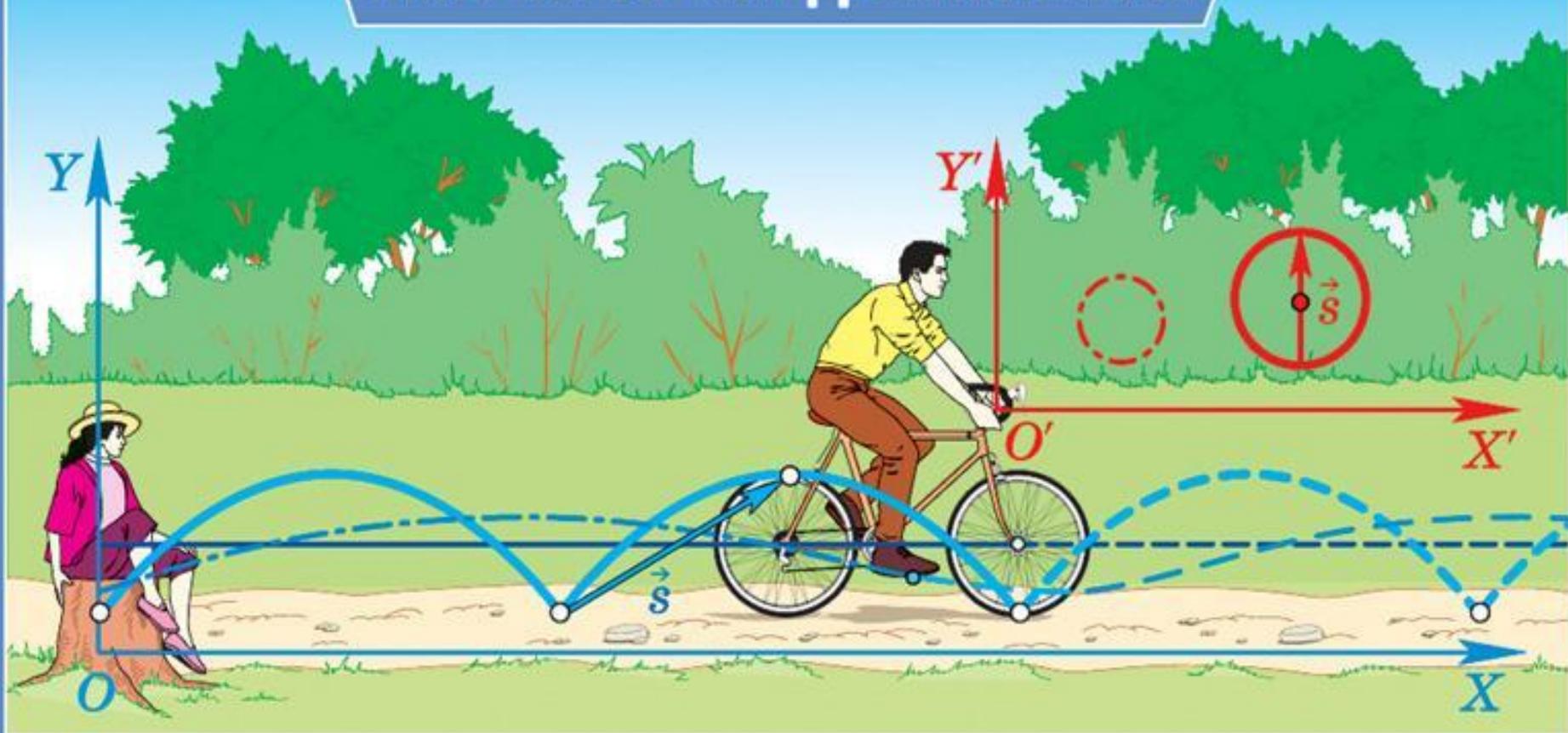


Как видно, **положение материальной точки (одноатомной молекулы)** задаётся **тремя координатами**, поэтому **она имеет три степени свободы: $i = 3$**

Траектория – линия, описываемая в пространстве движущейся точкой. В зависимости от формы траектории движение бывает *прямолинейным* и *криволинейным*.



ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ



ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ
В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ XOY

ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ
В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ $X'O'Y'$

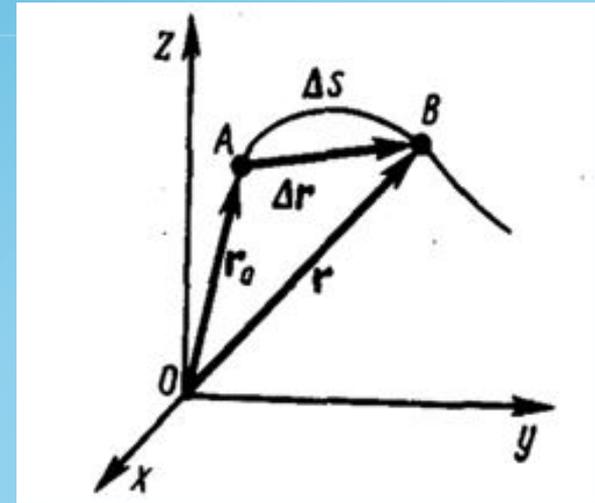
	ниппеля колеса	
	педали	
	оси	
	Перемещение ниппеля колеса за 0,5 оборота	

Путь. Длина пути. Перемещение.

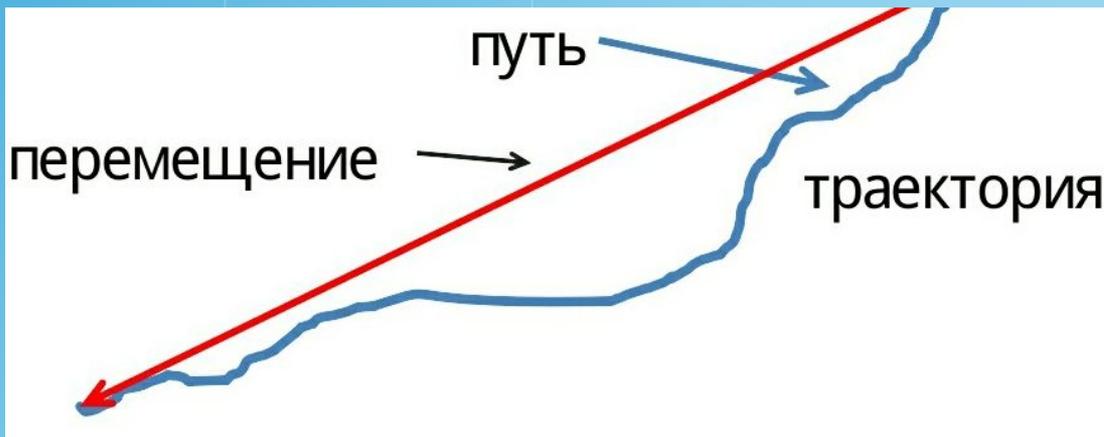
Длина участка траектории AB , пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется

длиной пути ΔS и является **скалярной**

функцией времени: $\Delta S = \Delta S(t)$.



Вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), называется **перемещением**.



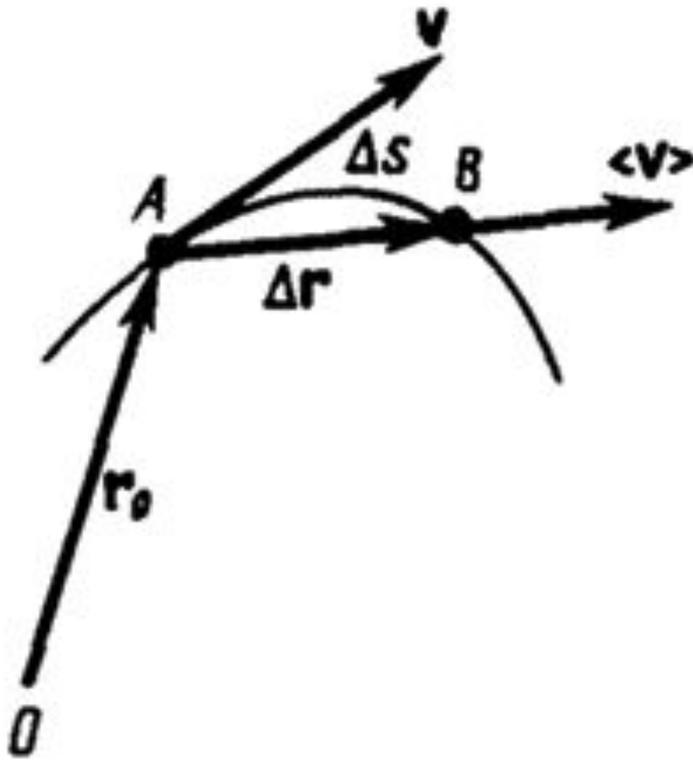
Скорость

- **Мгновенная скорость** — это векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- По мере уменьшения Δt путь Δs все больше будет приближаться к $|\Delta r|$, поэтому модуль мгновенной скорости:

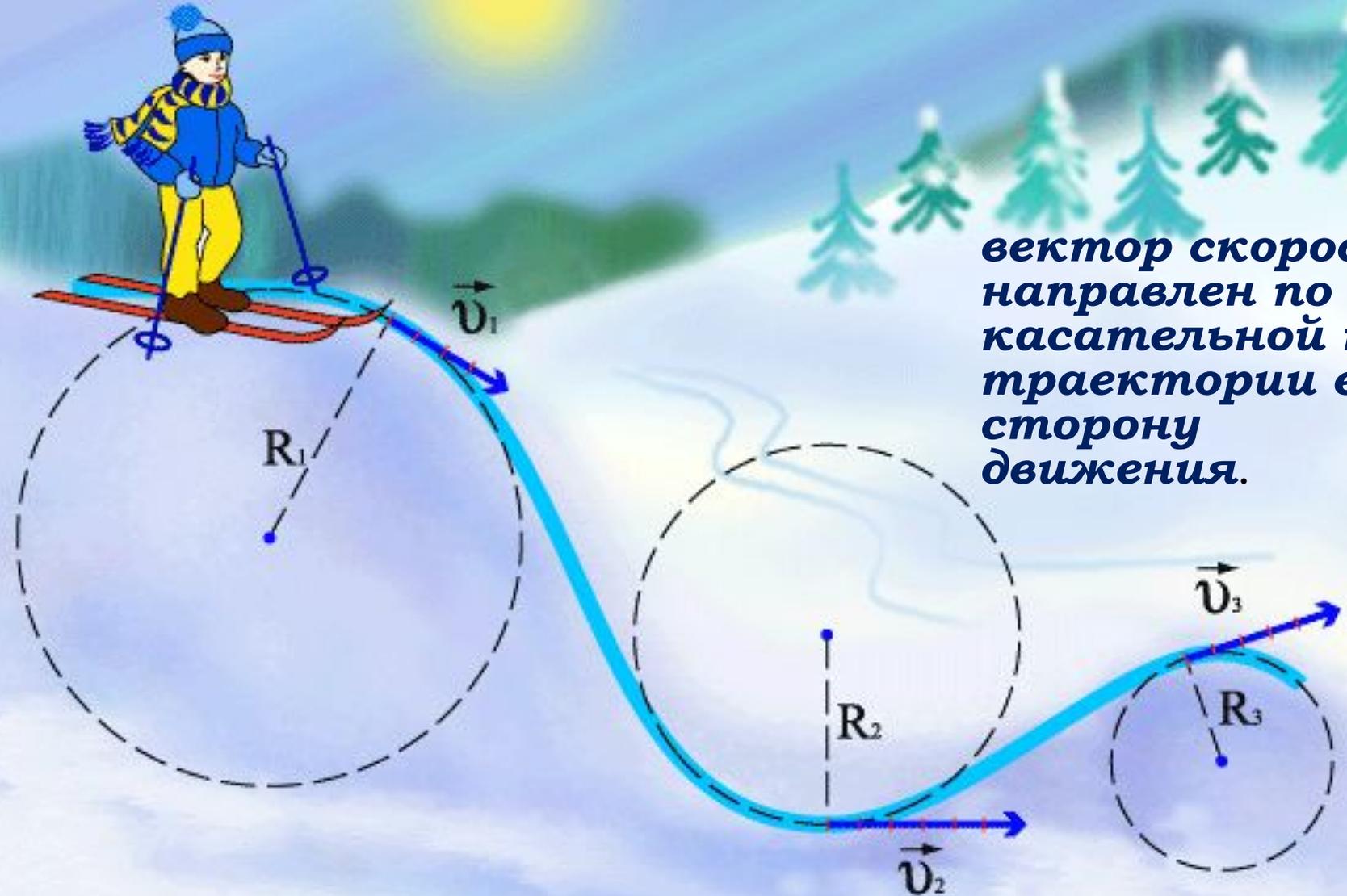
$$v = |\vec{V}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

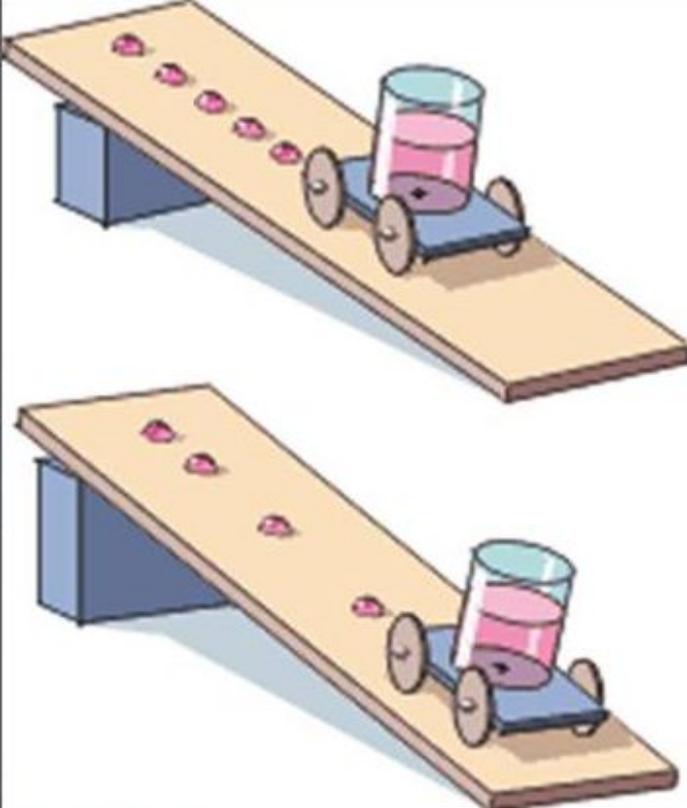


Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина — **скорость**, которой определяется как **быстрота** движения, так и его **направление** в данный момент времени.

Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то

вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения.





- В случае **равномерного** движения числовое значение мгновенной скорости постоянно; тогда

$$s = v \int_t^{t+\Delta t} dt = v\Delta t$$

- При **неравномерном** движении — модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной $\langle v \rangle$ — **средней скоростью** неравномерного движения:

$$\langle v \rangle = \frac{ds}{dt}$$

- Если выражение $ds = vdt$ проинтегрировать по времени в пределах от t до $t + \Delta t$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время Δt :

$$s = \int_t^{t+\Delta t} v dt$$

- Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 , определяется интегралом:

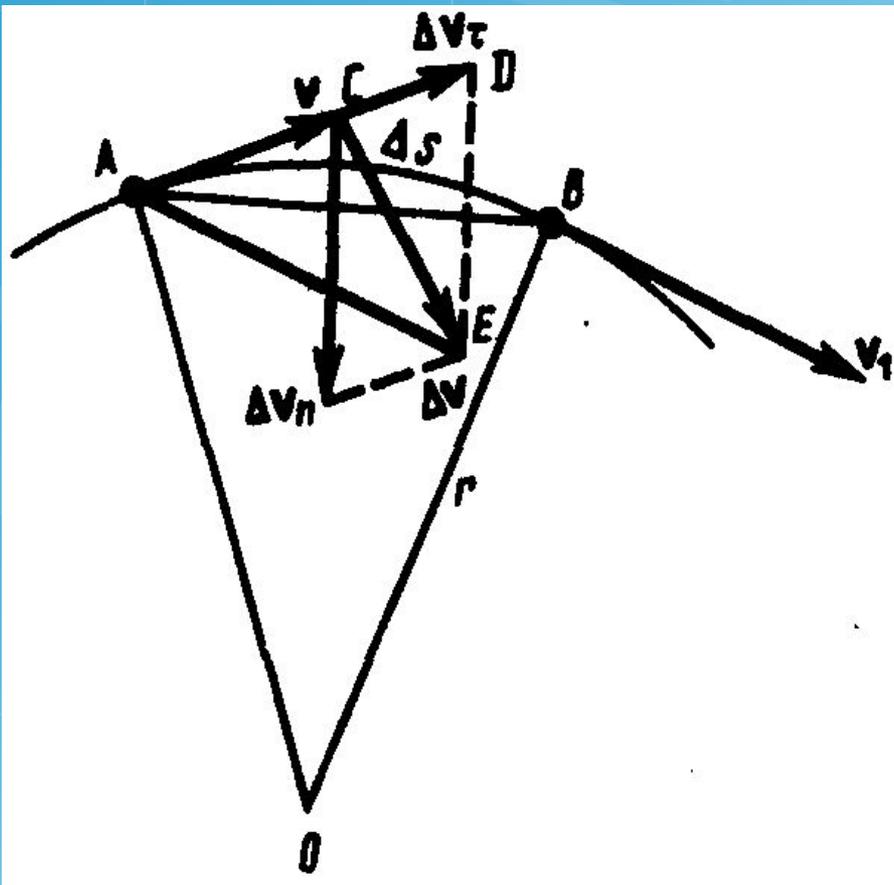
$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Ускорение

Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является ускорение.

Мгновенным ускорением материальной точки в момент времени t будет предел среднего ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения. Полное ускорение.

□ **Тангенциальная составляющая** ускорения равна первой производной по времени от модуля скорости, определяет тем самым быстроту изменения скорости по модулю:

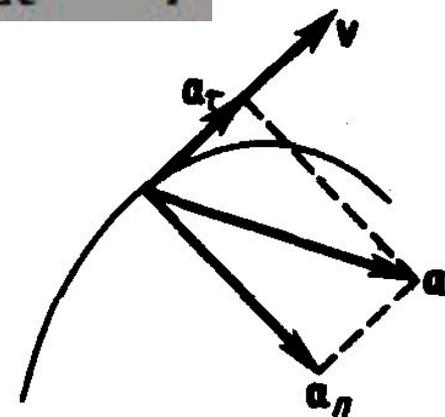
$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

□ **Полное ускорение** тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих:

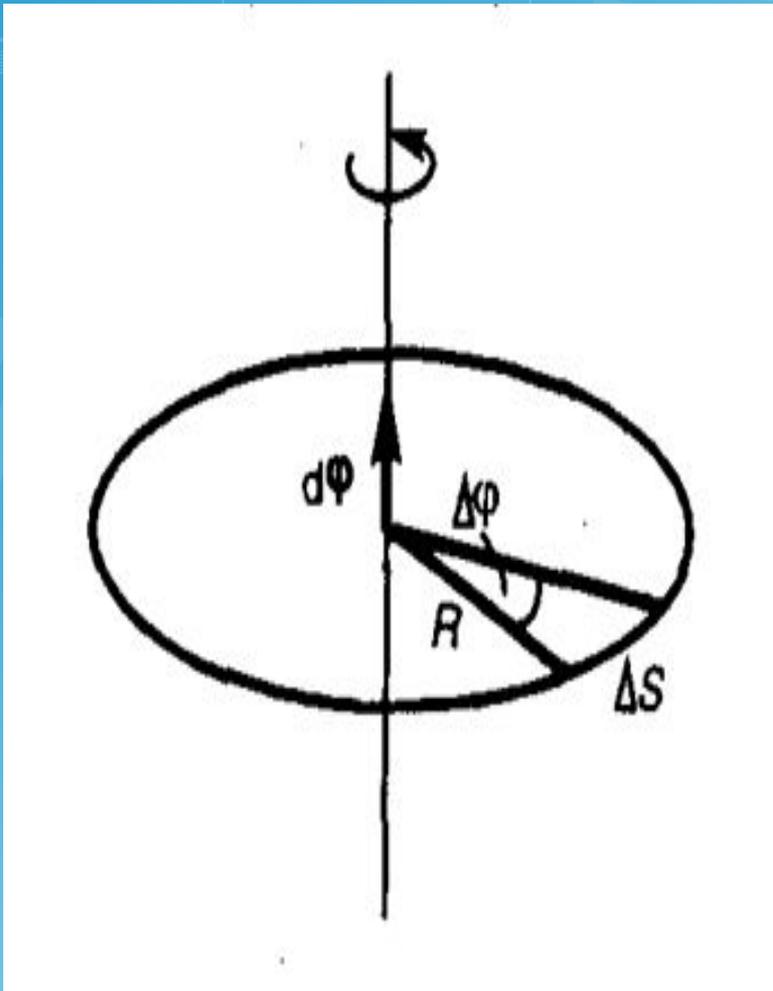
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n$$

□ **Нормальная составляющая** ускорения направлена по главной нормали к траектории к центру ее кривизны:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$



Кинематика вращательного движения



Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса R . Ее положение через промежуток времени Δt задается углом $\Delta\varphi$. Элементарные повороты можно рассматривать как векторы, направление которых совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется **правилу правого винта**. Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются **псевдовекторами** или **аксиальными векторами**. Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

Угловая скорость

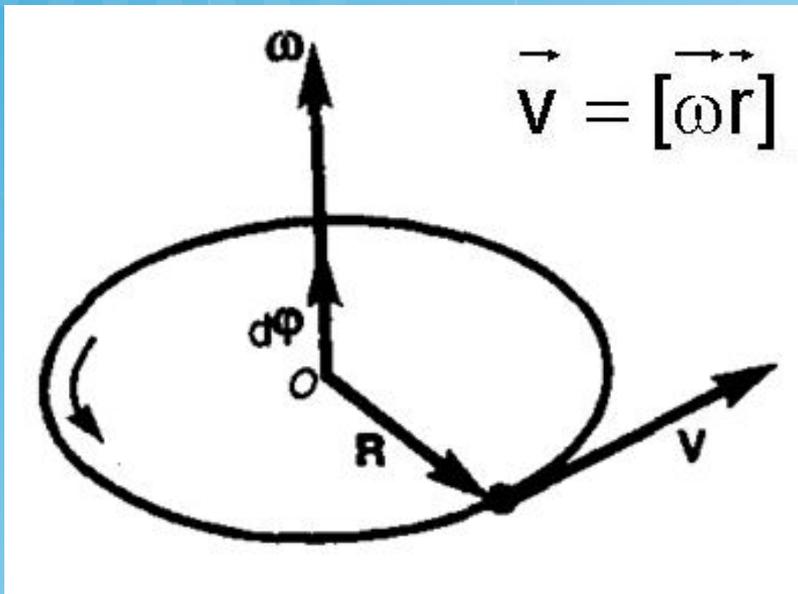
□ Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

□ Угловая скорость направлена вдоль оси вращения по правилу правого винта, т.е. так же, как и вектор угла поворота. Единица измерения угловой скорости: радиан в секунду (рад/с).

□ Линейная скорость точки:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \omega$$



Период и частота вращения

□ Периодом вращения T — время, за которое точка совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π . Так как промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует $\varphi = 2\pi$, то $\omega = 2\pi/T$, откуда

$$T = 2\pi/\omega$$

□ Частота вращения n - число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности в единицу времени:

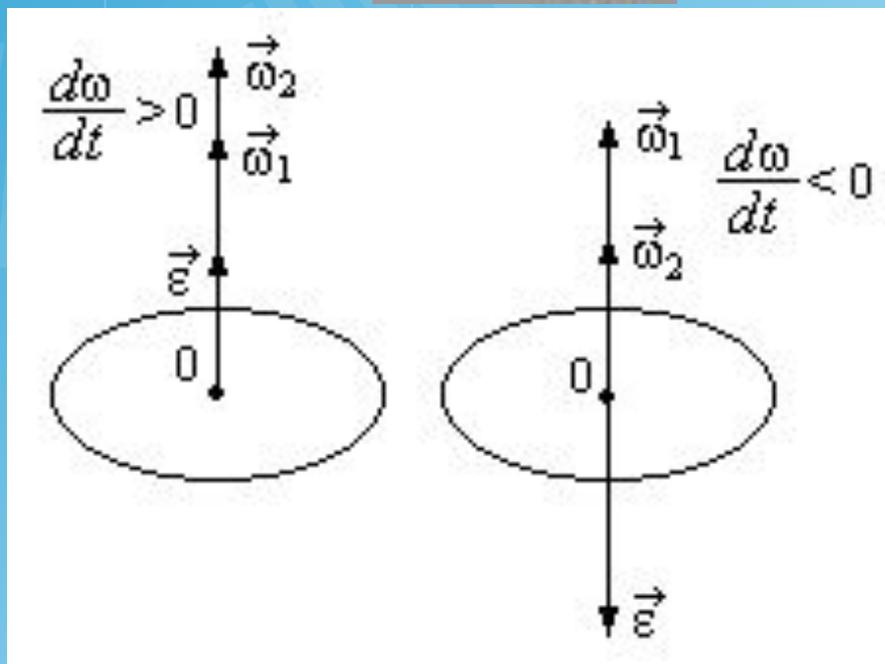
$$n = 1/T = \omega/(2\pi)$$


$$\omega = 2\pi n$$

Угловое ускорение

- Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



- При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор углового ускорения сонаправлен вектору элементарного приращения угловой скорости, при замедленном движении вектор углового ускорения противоположно направлен вектору приращения угловой скорости.

- Тангенциальная составляющая ускорения:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}, v = \omega R \text{ и } a_{\tau} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$$

- Нормальная составляющая ускорения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

- В случае равнопеременного движения точки по окружности:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2 / 2$$

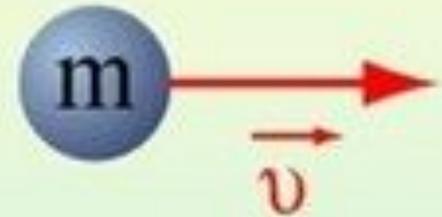
*ДИНАМИКА
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО
ТЕЛА*

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

- **Масса** тела — скалярная физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (**инертная масса**) и гравитационные (**гравитационная масса**) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей 10^{-12} их значения).
- Единица измерения: 1 кг
- **Сила** — это векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.
- Сила характеризуется модулем, направлением и точкой приложения.
- Единица измерения:
$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$$

Первый закон Ньютона

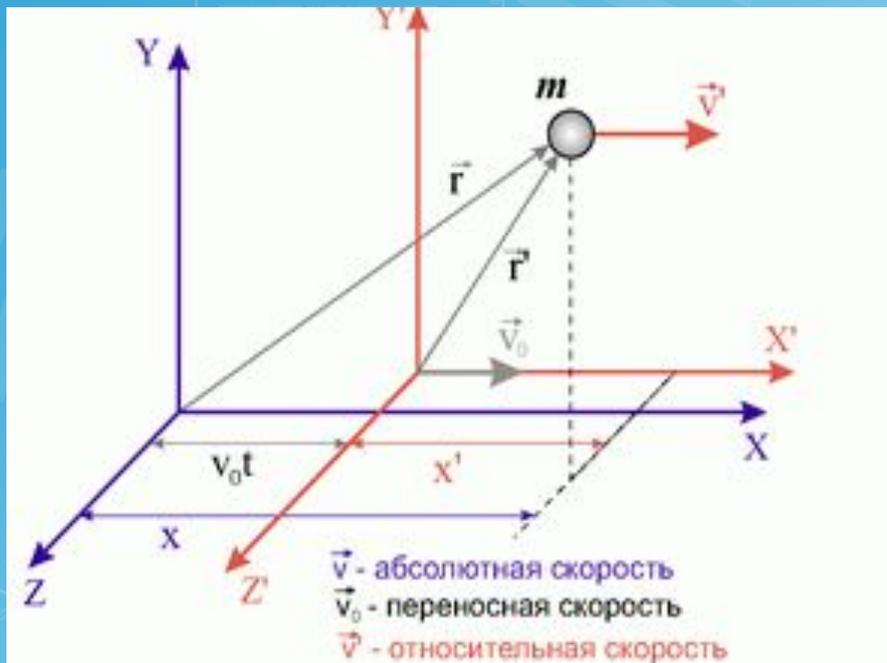
- **Первый закон Ньютона:** всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние. Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**. Поэтому первый закон Ньютона называют также **законом инерции**.



$$\vec{v} = \text{const}, \\ \text{при } \vec{F} = 0$$

- Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются **инерциальными системами отсчета**. Инерциальной системой отсчета является такая система отсчета, относительно которой материальная точка, *свободная от внешних воздействий*, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.
- *Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.*

Преобразования Галилея. Механический принцип относительности (принцип относительности Галилея).



Преобразования Галлилея:

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t' \\ t = t' \end{cases}$$

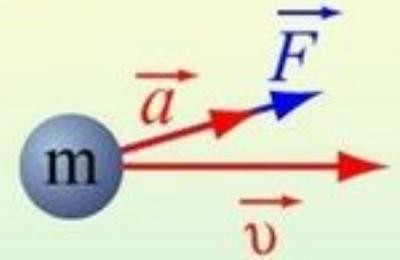
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

- Уравнения динамики при переходе из одной инерциальной системы отсчета к другой формулируются одинаково.
- Никакими механическими опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно.

Второй закон Ньютона

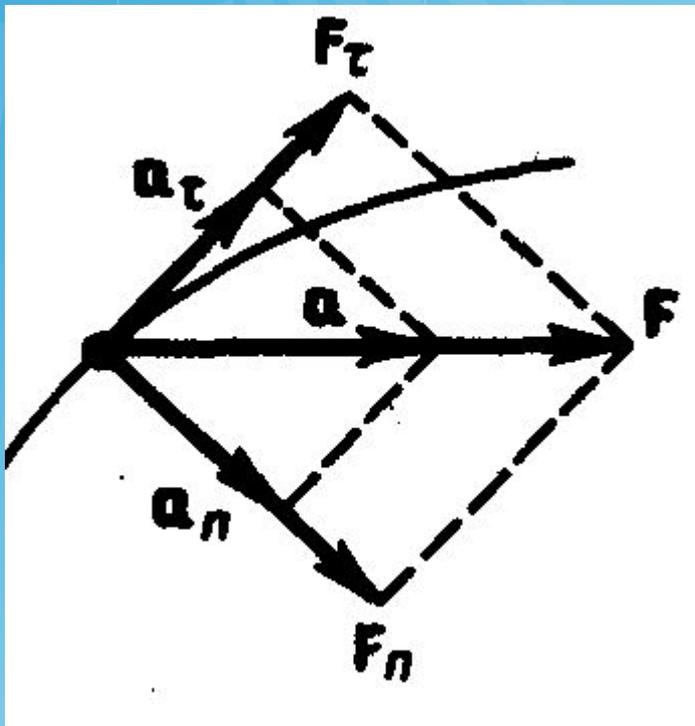
- Второй закон Ньютона — *основной закон динамики поступательного движения* — отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.
- Если рассмотреть действие различных сил на одно и то же тело, то оказывается, что ускорение, приобретаемое телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей приложенных сил.
- При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными.
- Соотношение выражает второй закон Ньютона: *ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).*
- Обобщенная формулировка основного закона динамики: *скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе.*



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

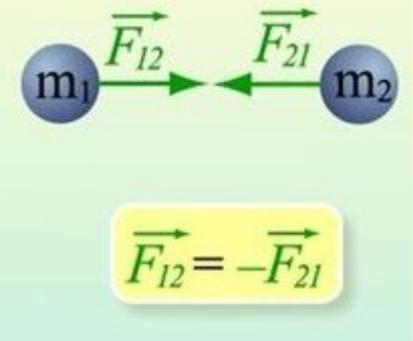
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \longrightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Первый закон Ньютона можно получить из второго. Действительно, в случае равенства нулю равнодействующей сил (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение также равно нулю. Однако *первый закон Ньютона* рассматривается как *самостоятельный закон* (а не как следствие второго закона), так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых только и выполняется основной закон динамики.



- В механике большое значение имеет **принцип независимости действия сил**: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

Третий закон Ньютона



- Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется **третьим законом Ньютона**: всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.
- Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парами* и являются силами *одной природы*.
- Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики *отдельной* материальной точки к динамике *системы* материальных точек.
- Третий закон Ньютона справедлив только для инерциальных систем отчета.
- Третий закон Ньютона выполняется только для тел, движущихся со скоростями, много меньшими скорости света.

Реактивное движение —

движение, возникающее при отделении от тела с какой-либо скоростью его части



Уравнение движения тела переменной массы



Иван Всеволодович
Мещерский
(1859 – 1935 гг.) –
русский ученый-
механик, автор
трудов по
реактивной технике
и небесной
механике

$$\bar{F} dt = m d\bar{v} + \bar{u} dm$$

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \bar{u} \frac{dm}{dt}$$

- уравнение движения тела
переменной массы

- Второе слагаемое в правой части уравнения называют **реактивной силой**. Если скорость истечения газов относительно ракеты противоположена скорости ракеты по направлению, то ракета ускоряется, а если они совпадают, то тормозится.

Выведем уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты. Если в момент времени t масса ракеты m , а ее скорость \vec{v} , то по истечении времени dt ее масса уменьшится на dm и станет равной $m - dm$, а скорость станет равной $\vec{v} + d\vec{v}$. Изменение импульса

системы за отрезок dt :

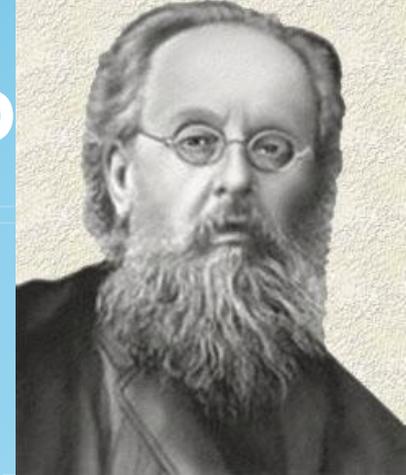
$$d\vec{p} = [(m - dm)(\bar{v} + d\bar{v}) + dm(\bar{v} + \bar{u})] - m\bar{v}$$



Николай Иванович
Кибальчич
(1853 – 1881 г.) –
русский физик-
изобретатель

Формула Циолковского

- Идея применения реактивной силы для создания летательных аппаратов высказывалась в 1881 г. Н. И. Кибальчичем. К. Э. Циолковский в 1903 г. опубликовал статью, где предложил теорию движения ракеты и основы теории жидкостного реактивного двигателя. Поэтому его считают основателем отечественной космонавтики.



Константин Эдуардович
Циолковский
(1857 – 1935 гг.) –
русский ученый,
основоположник
космонавтики.

- Принимаем, что на ракету не действуют внешние силы, тогда:

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$$



$$v = -u \int \frac{dm}{m} = -u \ln m + C$$

$$v = u \ln (m_0/m)$$

- Она показывает, что:
 - 1) чем больше конечная масса ракеты m , тем больше должна быть стартовая масса ракеты m_0 ;
 - 2) чем больше скорость истечения u газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

The background is a solid light blue color. It features several decorative elements: a faint grid pattern, a large semi-circular fan-like shape on the left side composed of many thin, parallel lines, and several white starburst or spark-like shapes scattered across the frame. In the lower right quadrant, there are several overlapping white curved lines that resemble orbits or paths. The text is centered and written in a white, bold, italicized serif font.

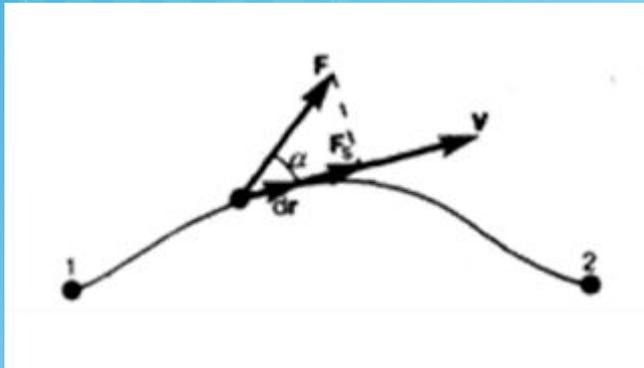
*ЭНЕРГИЯ. РАБОТА.
МОЩНОСТЬ. ЗАКОНЫ
СОХРАНЕНИЯ.*

Энергия — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.

- Энергия с различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется, в других — переходит в иную форму. Однако существенно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.
- Единицы измерения: 1 Дж (джоуль)

Работа

- Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие **работы силы**.



- Единица работы — **джоуль** (Дж): **1 Дж** — работа, совершаемая силой **1 Н** на пути **1 м**.

- $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = F \cos \alpha \int_1^2 ds = F s \cos \alpha$$

где S — пройденный телом путь.

- Если $\alpha < \pi / 2$ работа силы положительна, в этом случае составляющая F_s совпадает по направлению с вектором скорости движения.
- Если $\alpha > \pi / 2$, то работа силы отрицательна.
- Если $\alpha = \pi / 2$ (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю.

Мощность

- Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие **мощности**:

$$N = \frac{dA}{dt}$$

- Единица измерения — **ватт** (Вт): 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж.
 - (1 Вт = 1 Дж/с)

- Мощность, развиваемая силой, совершающей работу за время dt находится по формуле:

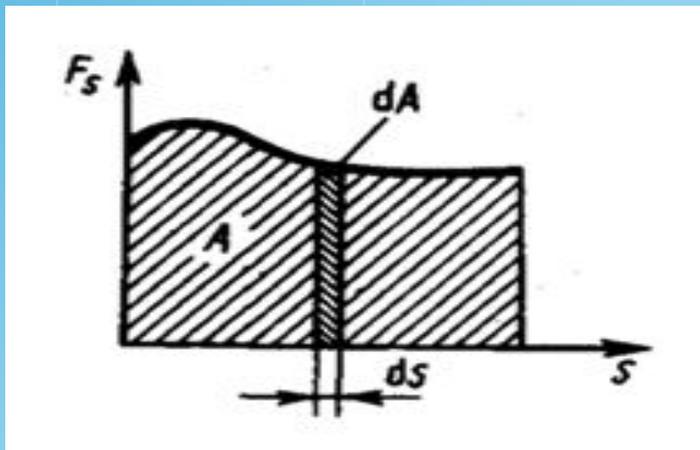
$$N = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}$$

- Мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы;
- Мощность N — величина *скалярная*.

Кинетическая энергия

- Кинетическая энергия механической системы — это энергия механического движения этой системы.
- Сила, действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы. Таким образом, работа dA силы на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до v , идет на увеличение кинетической энергии dT тела:

$$dA = dT$$



$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = dA$$

- Учитываем, что $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- Получаем:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

- Кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т. е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее механического движения.
- Кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.
- Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий тел входящих в систему.

Потенциальная энергия – механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними

Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля упругих сил, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Такие поля называются **потенциальными**, а силы, действующие в них, — **консервативными**. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется **диссипативной** (например, сила трения).

Работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = -d\Pi$$

$$F dr = -d\Pi$$

$$\Pi = - \int \vec{F} d\vec{r} + C$$

Градиент потенциальной энергии

□ Для консервативных сил:

$$F_x = -\frac{d\Pi}{dx}, \quad F_y = -\frac{d\Pi}{dy}, \quad F_z = -\frac{d\Pi}{dz}$$

или в векторном виде:

$$\vec{F} = -\text{grad}\Pi$$

$$\text{grad}\Pi = \frac{d\Pi}{dx}\vec{i} + \frac{d\Pi}{dy}\vec{j} + \frac{d\Pi}{dz}\vec{k}$$

градиент скаляра Π .

□ **Градиент** – дифференциальный векторный оператор, который используется для характеристики скалярных полей вида:

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

□ Градиент показывает направление изменения скалярной величины.

□ Таким образом, градиент позволяет связать между собой скалярные и векторные величины.

□ Для него наряду с обозначением ***grad*** Π применяется также обозначение $\nabla \Pi$.

□ ∇ («набла») означает символический вектор, называемый **оператором Гамильтона** или **набла-оператором**:

$$\nabla = \frac{d}{dx}\vec{i} + \frac{d}{dy}\vec{j} + \frac{d}{dz}\vec{k}$$

Конкретный вид функции Π зависит от характера силового поля.

Потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли

$$\Pi = mgh$$

- где высота h отсчитывается от нулевого уровня, для которого $\Pi_0 = 0$. Это следует непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты h на поверхность Земли.
- Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (кинетическая энергия всегда положительна!). Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина h'), $\Pi = -mgh'$.

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

- Сила упругости пропорциональна деформации: $F_{x \text{ упр}} = -kx$
- где $F_{x \text{ упр}}$ — проекция силы упругости на ось x ; k — коэффициент упругости; «-» указывает, что $F_{x \text{ упр}}$ направлена в сторону, противоположную деформации x .
- По III закону Ньютона, деформирующая сила равна по модулю силе упругости и противоположно ей направлена:

$$F_x = -F_{x \text{ упр}} = kx$$

$$dA = F_x dx = kx dx \quad \rightarrow \quad A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$\Pi = kx^2/2$$

- Полная механическая энергия системы — энергия механического движения и взаимодействия равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi$$

Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии — результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М. В. Ломоносову (1711—1765), изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814—1878) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821—1894).

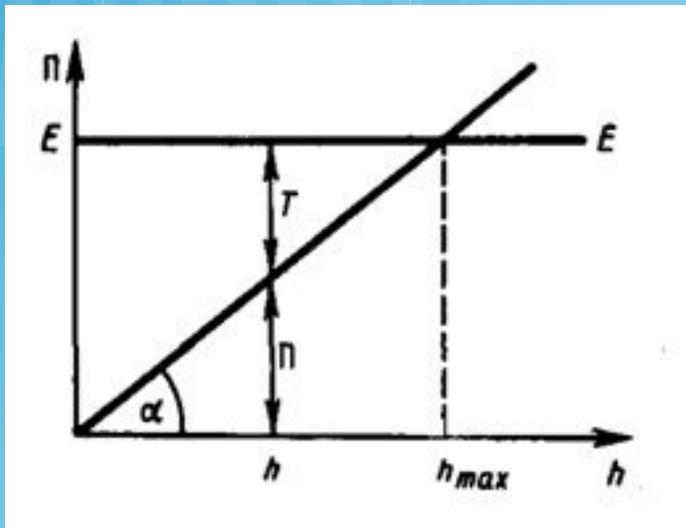
$$T + \Pi = E = \text{const}$$

- Закон сохранения механической энергии:
в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется со временем.
- Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами**. Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так: *в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.*

- Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени*. Однородность времени проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчета времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.
- Существует еще один вид систем — **диссипативные системы**, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название **диссипации** (или **рассеяния**) **энергии**. Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.
- В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается неизменной. Этот закон не есть просто закон *количественного* сохранения энергии, а закон сохранения и превращения энергии, выражающий и *качественную* сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. Закон сохранения и превращения энергии — *фундаментальный закон природы*, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.
- В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, *энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой*. В этом и заключается *физическая сущность закона сохранения и превращения энергии* — сущность **неуничтожимости материи и ее движения**.

Графическое представление энергии

- График зависимости потенциальной энергии от некоторого аргумента называется **потенциальной кривой**. Анализ потенциальных кривых позволяет определить характер движения тела.
- Будем рассматривать только консервативные системы.



Графическое представление потенциальной энергии для тела в однородном поле тяжести

- Потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли: $\Pi(h) = mgh$. График данной зависимости $\Pi = \Pi(h)$ — прямая линия, проходящая через начало координат, угол наклона которой к оси h тем больше, чем больше масса тела (так как $tg\alpha = mg$).
- Пусть полная энергия тела равна E (ее график — прямая, параллельная оси h). На высоте h тело обладает потенциальной энергией Π , которая определяется отрезком вертикали, заключенным между точкой h на оси абсцисс и графиком $\Pi(h)$. Кинетическая энергия T задается ординатой между графиком $\Pi(h)$ и горизонтальной прямой EE .
- Если $h = h_{max}$, то $T = 0$ и $\Pi = E = mgh_{max}$, т. е. потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

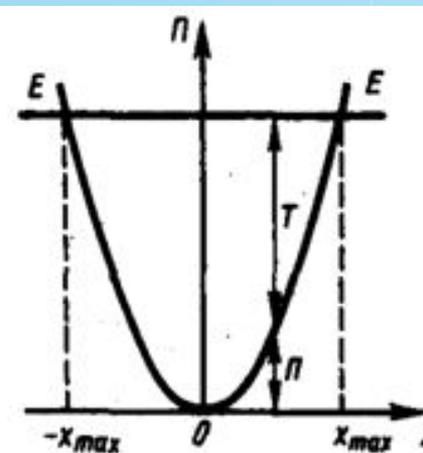
$$T = E - \Pi, \quad \text{т. е. } \frac{mv^2}{2} = mgh_{max} - mgh \quad \text{откуда } v = \sqrt{2g(h_{max} - h)}$$

Графическое представление потенциальной энергии для упругодеформированного тела

Зависимость потенциальной энергии упругой деформации $\Pi = kx^2/2$ от деформации x имеет вид параболы, где график заданной полной энергии тела E — прямая, параллельная оси абсцисс x . С возрастанием деформации x потенциальная энергия тела увеличивается, а кинетическая — уменьшается. Абсцисса x_{max} определяет максимально возможную деформацию растяжения тела, а $-x_{max}$ — максимально возможную деформацию сжатия тела. Если $x = \pm x_{max}$, то $T=0$ и $\Pi=E=kx^2/2$, т. е. потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

При полной энергии тела, равной E , тело не может сместиться правее x_{max} и левее $-x_{max}$, так как кинетическая энергия не может быть отрицательной и, следовательно, потенциальная энергия не может быть больше полной энергии. В таком случае говорят, что тело находится в потенциальной яме с координатами —

$$-x_{max} \leq x \leq x_{max}$$

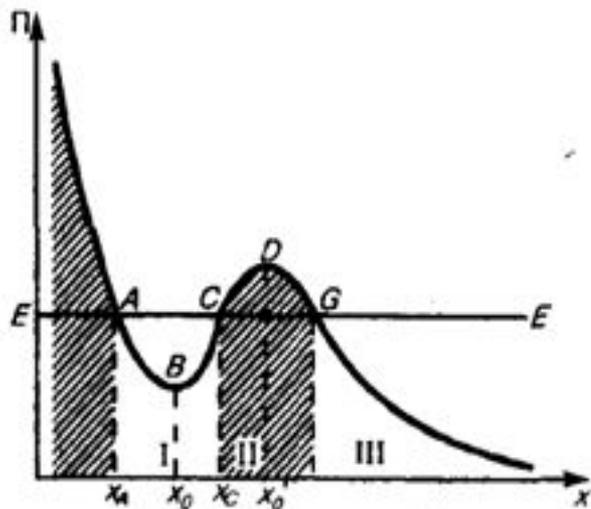


□ В общем случае потенциальная кривая может иметь довольно сложный вид. Если E — заданная полная энергия частицы, то частица может находиться только там, где $\Pi(x) \leq E$, т. е. в областях I и III. Переходить из области I в III и обратно частица не может, так как ей препятствует **потенциальный барьер CDG**, ширина которого равна интервалу значений x , при которых $E < \Pi$, а его высота определяется разностью $\Pi_{max} - E$. Для того чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ей необходимо сообщить дополнительную энергию, равную высоте барьера или превышающую ее. В области I частица с полной энергией E оказывается «запертой» в потенциальной яме ABC и совершает колебания между точками с координатами x_A и x_C .

□ В точке B с координатой x_0 потенциальная энергия частицы минимальна. Так как действующая на частицу сила $F_x = -\frac{d\Pi}{dx}$ (Π — функция только одной координаты), а условие минимума потенциальной энергии

$$\frac{d\Pi}{dx} = 0$$

то в точке B: $F_x = 0$. При смещении частицы из положения x_0 (и влево, и вправо) она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение x_0 является положением **устойчивого равновесия**. Указанные условия выполняются и для точки x_0' (для Π_{max}). Однако эта точка соответствует положению **неустойчивого равновесия**, так как при смещении частицы из положения x_0' появляется сила, стремящаяся удалить ее от этого положения.



Закон сохранения импульса

- **Механическая система** - совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.
- Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются **внутренними**.
- Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются **внешними**.
- Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется **замкнутой (или изолированной)**.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

- **Закон сохранения импульса:** импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.
- Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц. Этот закон носит универсальный характер, т. е. закон сохранения импульса — *фундаментальный закон природы*.
- Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства — его однородности. **Однородность пространства** заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

Центр масс.

Закон движения центра масс

- В механике Галилея—Ньютона из-за независимости массы от скорости импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. **Центром масс (или центром инерции)** системы материальных точек называется воображаемая точка C , положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

- Скорость центра масс:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}_C$$

- т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

$$m \frac{dv_C}{dt} = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

- т. е. центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе - **закон движения центра масс**.
- ❖ *Центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.*



*МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА*

Момент инерции

Момент инерции тела – мера инертности твердых тел при вращательном движении.

$$J_a = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(V)} \rho r^2 dV = \rho \int_{(V)} r^2 dV$$

Момент инерции системы (тела) относительно данной оси называется физической величиной, равная сумме произведений масс m материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J = \sum m_i r_i^2$$

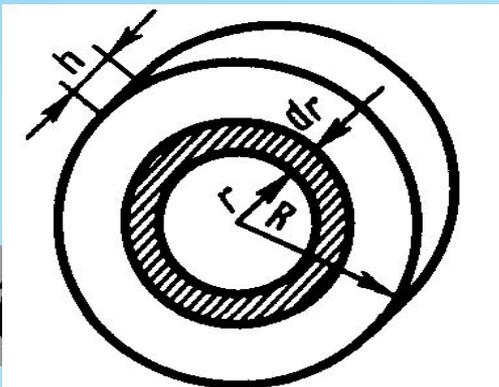
В качестве примера найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой h и радиусом R относительно его геометрической оси. Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним $r+dr$. Момент инерции каждого полого цилиндра $dJ=r^2 dm$ (так как $dr \ll r$, то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно r), где dm — масса всего элементарного цилиндра; его объем $2\pi r h dr$. Если ρ — плотность материала, то $dm=2\pi r h \rho dr$ и $dJ=2\pi h \rho r^3 dr$.

Тогда момент инерции сплошного цилиндра

$$J = \int dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h R^4 \rho.$$

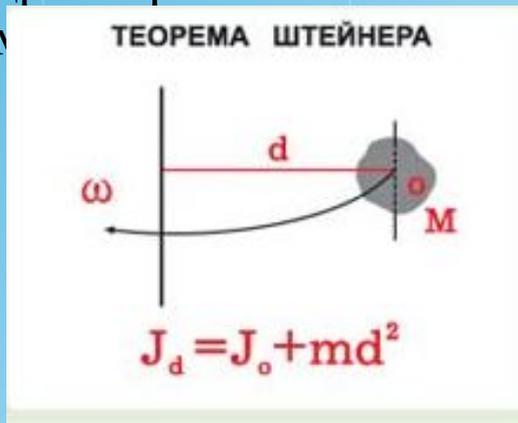
Но так как так как $m = \rho V$ — объем цилиндра, то его масса $m = \pi R^2 h \rho$, а момент инерции

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

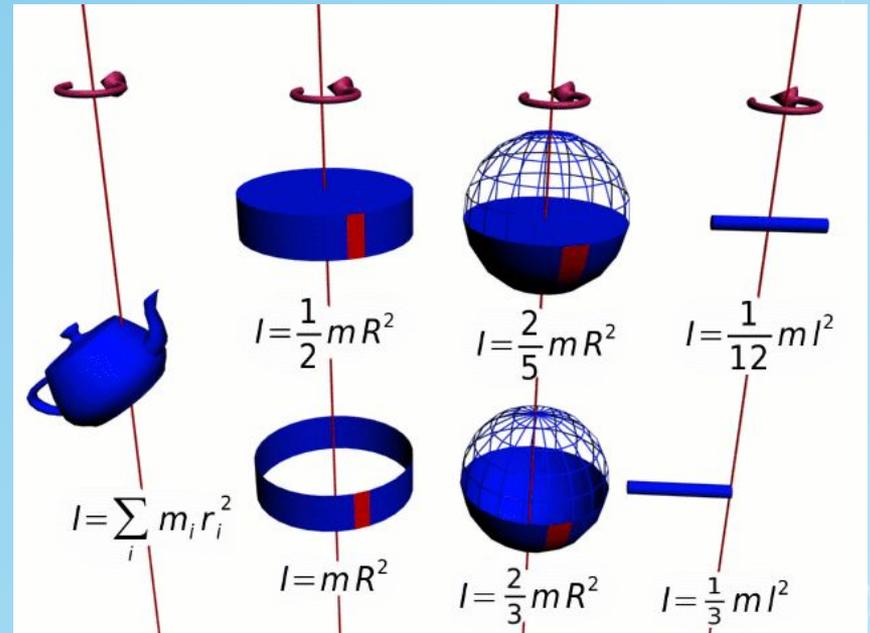


Теорема Штейнера

- Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется теоремой Штейнера: момент инерции тела J относительно произвольной оси равен моменту его инерции J_o относительно параллельной оси, проходящей через центр масс O тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния d между осями



- Моменты инерции для некоторых тел (тела считаются однородными, m – масса тела).



Кинетическая энергия вращения

- Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся около неподвижной оси z , проходящей через него. Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами m_1, m_2, \dots, m_n , находящиеся на расстоянии r_1, r_2, \dots, r_n от оси.

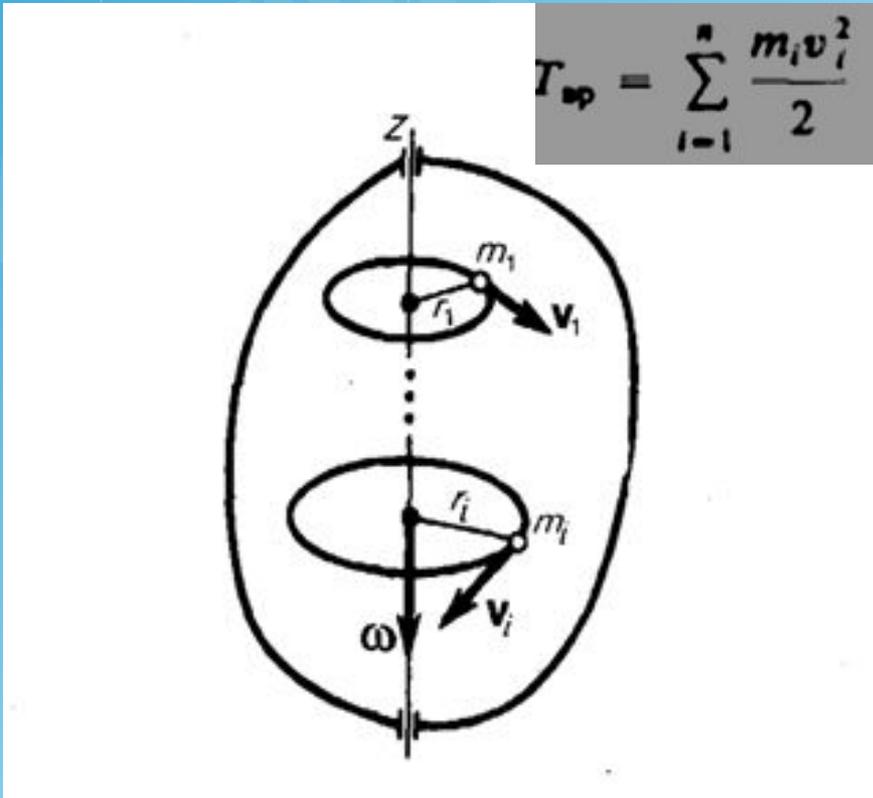
- При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объемы массами m_i опишут окружности различных радиусов r_i и имеют различные линейные скорости v_i . Но так как мы рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения этих объемов одинакова:

- $\omega = v_1/r_1 = v_2/r_2 = \dots = v_n/r_n$

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

$$T_{\text{вр}} = J_z \omega^2 / 2.$$



Плоское движение тела

□ В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

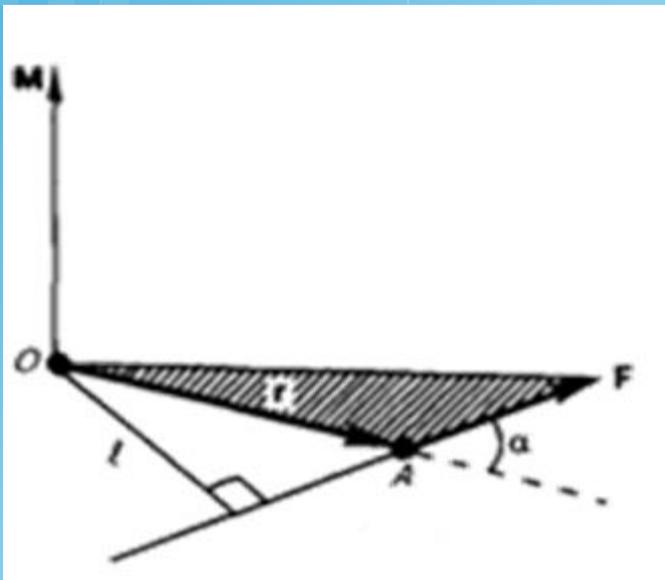
$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

□ где m — масса катящегося тела; v_c — скорость центра масс тела; J_c — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела.

Момент силы относительно неподвижной точки

- Моментом силы относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из точки O в точку A приложения силы, на силу \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$$



- Здесь \vec{M} — псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от \vec{r} к \vec{F} .
- Модуль момента силы

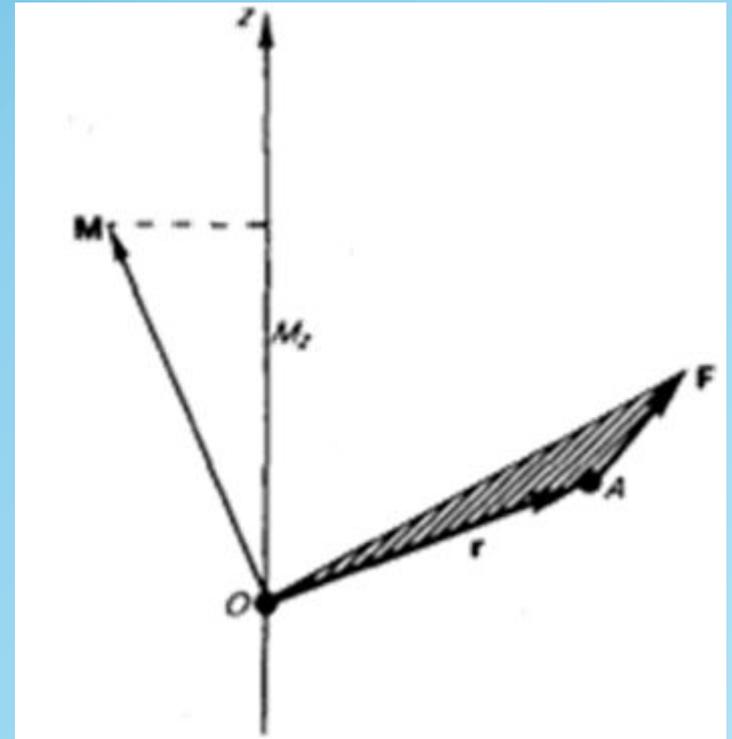
$$M = Fr \sin \alpha = Fl,$$

- где α — угол между \vec{r} и \vec{F} ;
- $r \sin \alpha = l$ — кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O — плечо силы.

Момент силы относительно неподвижной оси

- Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z , равная проекции на эту ось вектора \vec{M} момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси z . Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки O на оси z .
- Если ось z совпадает с направлением вектора \vec{M} , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью:

$$\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}]_z$$



Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

- Найдем выражение для работы при вращении тела. Пусть сила \vec{F} приложена в т. B , находящейся от оси z на расстоянии r , α — угол между направлением силы и радиусом-вектором \vec{r} . Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего

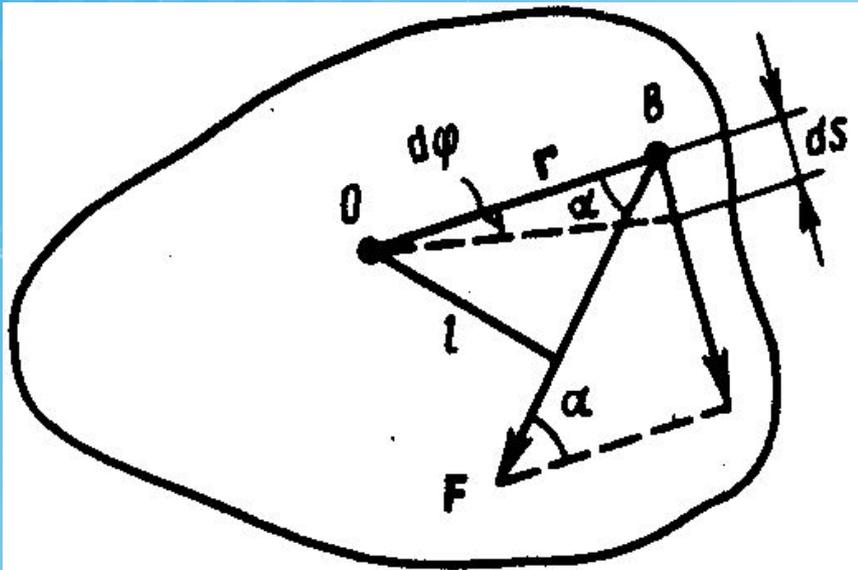
- При повороте тела на бесконечно малый угол $d\phi$ точка приложения B проходит путь $ds = r d\phi$ и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA = F \sin \alpha r d\phi$$



$$dA = M_z d\phi$$

- где $F r \sin \alpha = Fl = M_z$ — момент силы относительно оси z . Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.



- Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии: $dA = dT$, но

$$dT = d \left(\frac{J_z \omega^2}{2} \right) = J_z \omega d\omega$$

ПОЭТОМУ

- $M_z d\phi = J_z \omega d\omega$,

ИЛИ

$$M_z \frac{d\phi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}$$

- Учитываем, что

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

-

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon$$

уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Если ось z совпадает с осью инерции:

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}$$

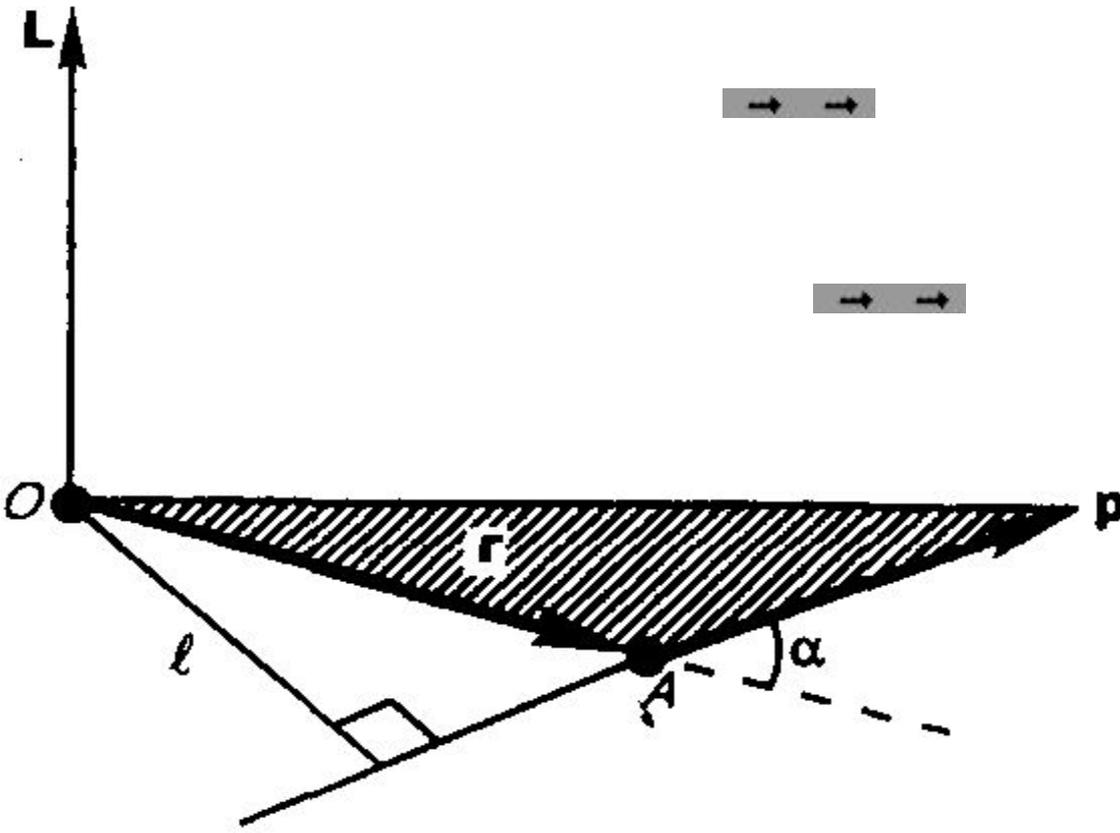
Момент импульса

относительно неподвижной точки

Моментом импульса (количества движения) материальной точки A относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}],$$

где \vec{r} — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A ; $\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс материальной точки; \vec{L} — момент импульса, направленный по правилу



Моментом импульса относительно неподвижной оси z

называется скалярная величина L_z , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки O данной оси. Момент импульса L_z не зависит от положения точки O на оси z .

Закон сохранения момента импульса

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси \mathbf{z} каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью v_i . Скорость v_i и импульс $m_i v_i$ перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора $m_i v_i$. Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы равен

$$L_{iz} = m_i v_i r_i$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i$$

Используя формулу $v_i = \omega r_i$, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega$$

$$L_z = J_z \omega$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

Закон сохранения момента импульса

Продифференцируем уравнение

$$L_z = J_z \omega$$

по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z,$$


$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Это выражение — еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси.

Можно показать, что имеет место векторное равенство

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

В замкнутой системе момент внешних сил


$$\vec{M} = 0 \text{ и } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \vec{L} = \text{const.}$$

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени — *фундаментальный закон природы*. Он связан со свойством симметрии пространства — его *изотропностью*, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

Деформации твердого тела

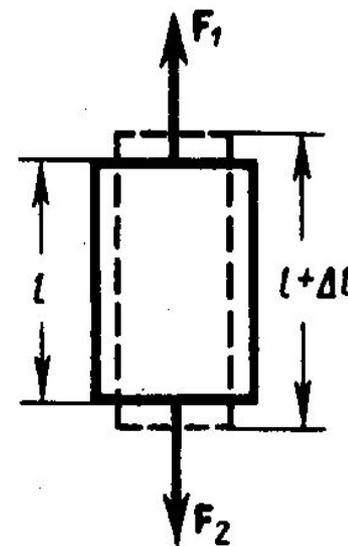
- Деформация (от лат. *deformatio* — «искажение») — изменение взаимного положения частиц тела, связанное с их перемещением относительно друг друга. Деформация представляет собой результат изменения межатомных расстояний и перегруппировки блоков атомов. Обычно деформация сопровождается изменением величин межатомных сил, мерой которого является упругое механическое напряжение.

Деформация называется упругой, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму. Деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются пластическими (или остаточными).

- ▢ Рассмотрим однородный стержень длиной l и площадью поперечного сечения S , к концам которого приложены направленные вдоль его оси силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 ($F_1 = F_2 = F$), в результате чего длина стержня меняется на величину Δl . Естественно, что при растяжении $\Delta l > 0$, а при сжатии $\Delta l < 0$.
- ▢ Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется **напряжением**:

$$\sigma = F/S$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется **нормальным**, если же по касательной к поверхности — **тангенциальным**.

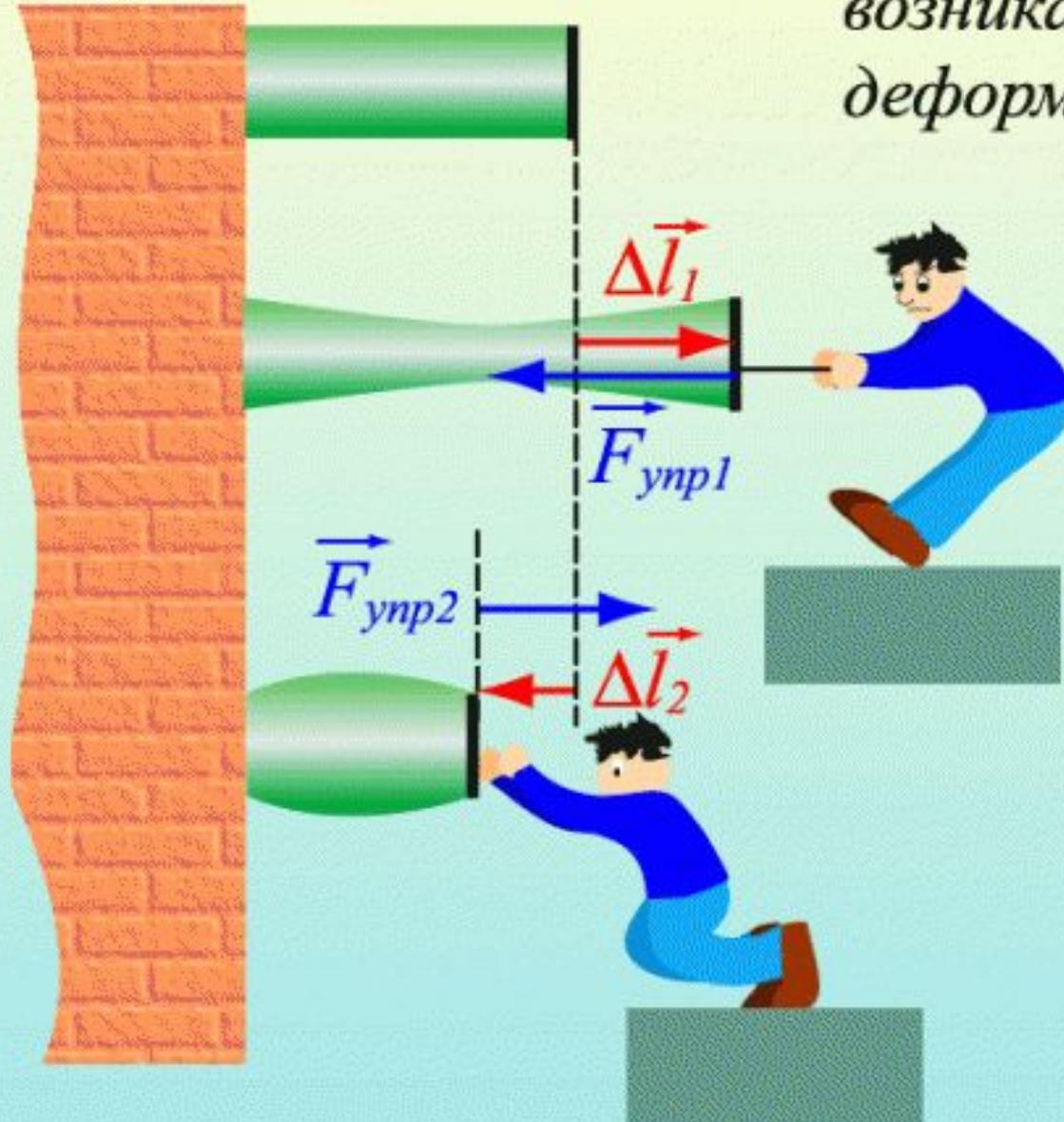


Сила упругости

Упругие силы – силы, возникающие при упругой деформации тел

Закон Гука для малых упругих деформаций

Сила упругости, возникающая при деформации тела, прямо пропорциональна его удлинению (сжатию) и направлена противоположно перемещению частиц тела при деформации



Закон Гука

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k \Delta \vec{l}$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ

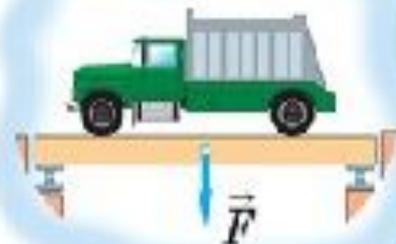
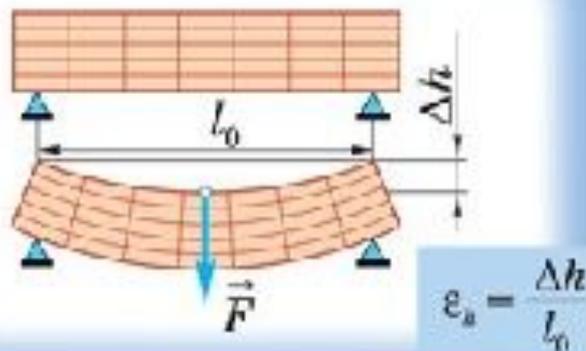
ДЕФОРМАЦИИ В ВЫТУ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ

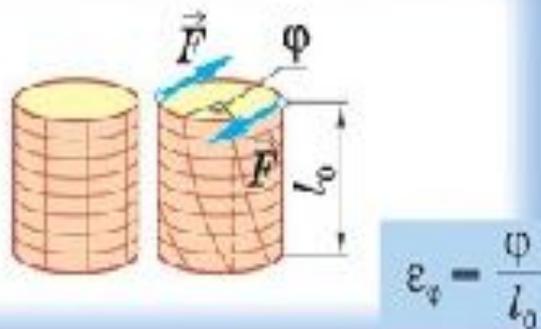
ДЕФОРМАЦИИ В ТЕХНИКЕ



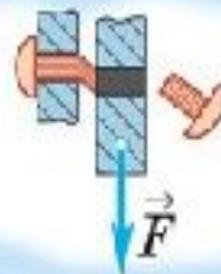
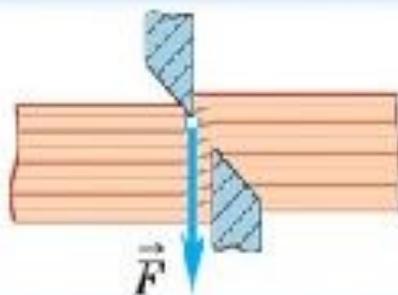
ИЗГИБ



КРУЧЕНИЕ



СРЕЗ



ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ

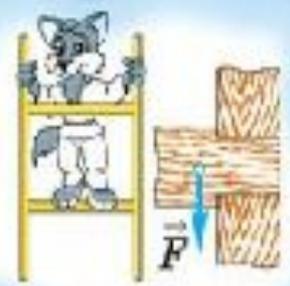
ДЕФОРМАЦИИ В БЫТУ



РАСТЯЖЕНИЕ

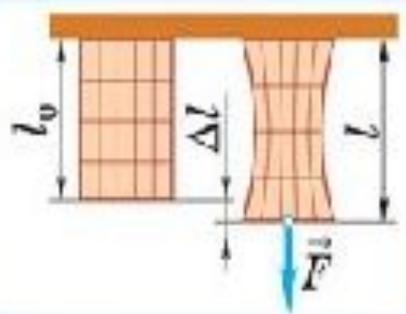


СЖАТИЕ

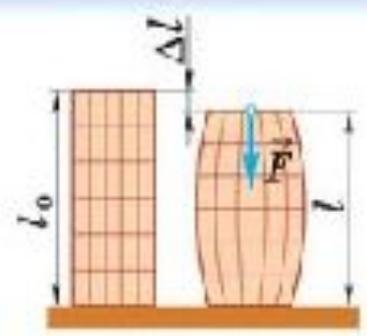


СДВИГ

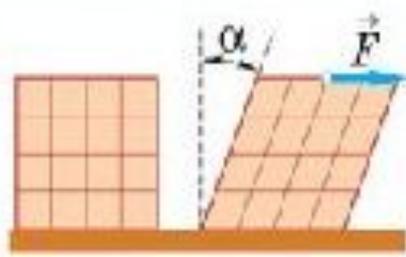
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ



$$\epsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0}$$

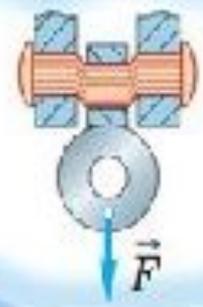
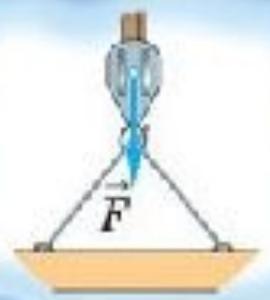


$$\epsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0}$$



$$\epsilon_\alpha = \text{tg } \alpha$$

ДЕФОРМАЦИИ В ТЕХНИКЕ



Механические свойства твердых тел:

- **Механические свойства** характеризуют способность материала сопротивляться воздействию внешних сил.
- **Прочность** – способность материала сопротивляться разрушению под воздействием нагрузок.
- **Пластичность** – способность материала изменять форму и размер под действием внешних сил.
- **Упругость** – способность материала восстанавливать первоначальную форму и размер.
- **Твердость** – сопротивление твердого тела изменению формы (деформации)

Все эти свойства проявляются под действием статических сил (постоянных по величине и направлению)

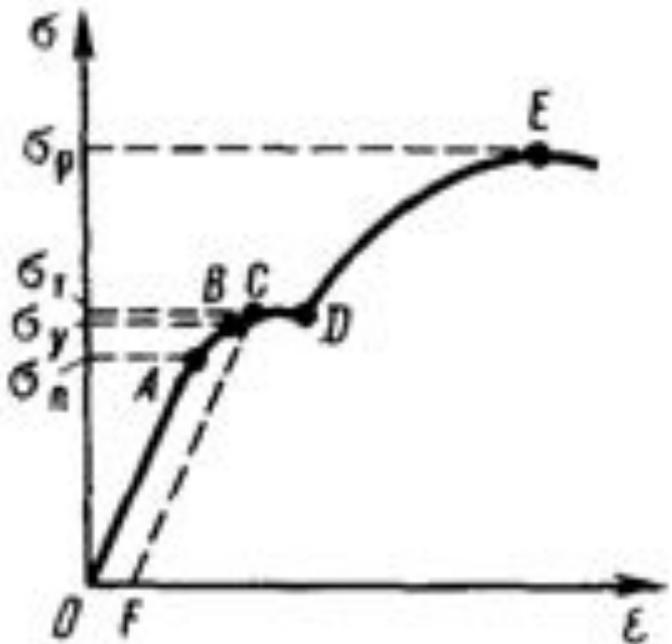
Диаграмма напряжений

Деформации твердых тел подчиняются закону Гука до известного предела. Связь между деформацией и напряжением представляется в виде диаграммы напряжений, качественный ход которой мы рассмотрим для металлического образца.

Линейная зависимость $\sigma(\epsilon)$, установленная Гуком, выполняется лишь в узких пределах до **предела пропорциональности** (σ_n). При дальнейшем увеличении напряжения деформация еще упругая (хотя зависимость $\sigma(\epsilon)$ уже нелинейна) и до **предела упругости** (σ_y) остаточные деформации не возникают.

За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации и график изобразится не кривой **ВО**, а прямой **CF**, параллельной **ОА**.

Напряжение, при котором появляется заметная остаточная деформация ($\approx 0,2\%$), называется **пределом текучести** (σ_T) — т.С. В области **CD** деформация возрастает без увеличения напряжения. Эта область называется **областью текучести** (или **областью пластических деформаций**). Материалы, для которых область текучести значительна, называются **вязкими**, для которых же она практически отсутствует — **хрупкими**. При дальнейшем растяжении (за т.С) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется **пределом прочности** (σ_p).



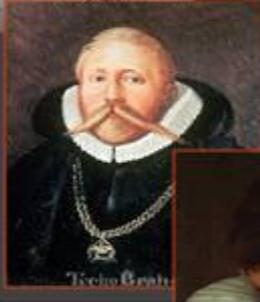
The background is a solid light blue color. It features several decorative elements: a large, faint, semi-circular pattern of horizontal lines on the left side; a grid of thin white lines; several bright white starburst or lens flare effects scattered across the page; and several overlapping, thin white curved lines on the right side, resembling orbits or field lines.

ТЯГОТЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

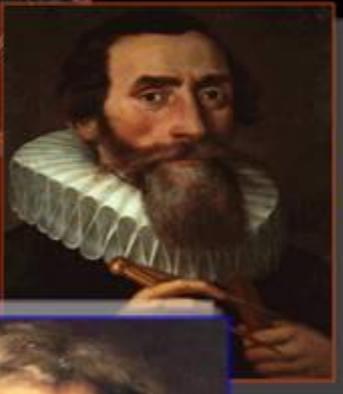
События, предшествующие открытию Закона всемирного тяготения



Гипотеза Николая Коперника о том, что все планеты движутся вокруг Солнца



Сбор эмпирических данных (измерения положения планет, выполненные астрономом Тихо Браге

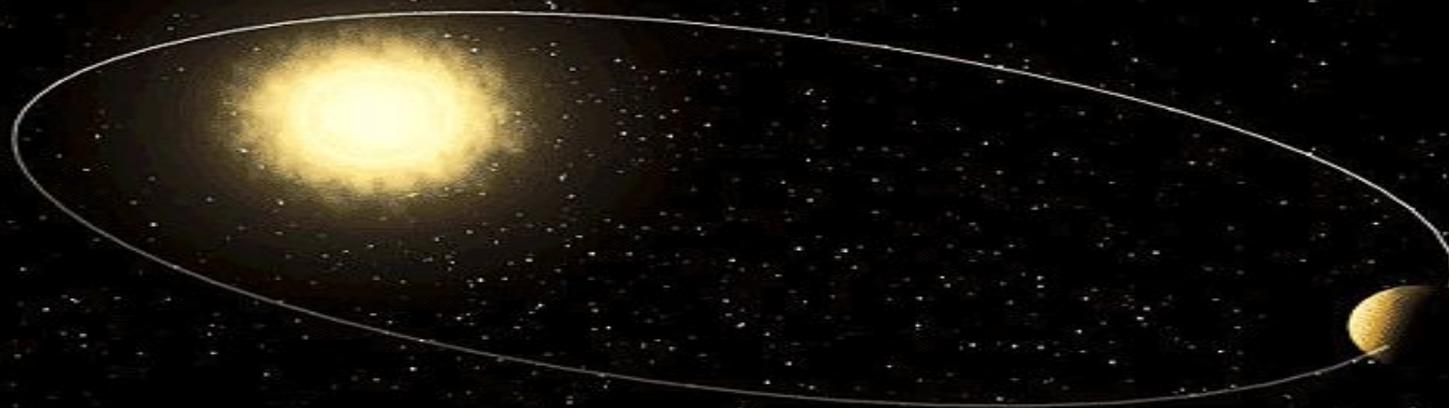


Анализ данных и их обобщение в эмпирических законах, сделанное Иоганном Кеплером



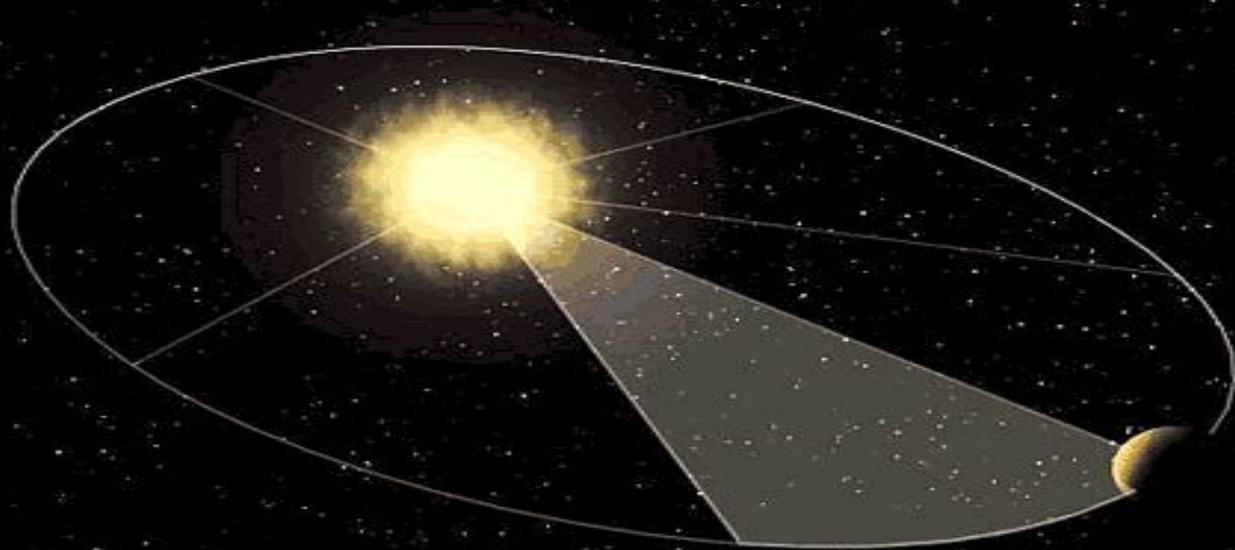
Построение теории, объясняющей все общие закономерности и предсказывающей многие новые следствия, сделанное Исааком Ньютоном

Первый закон Кеплера



Каждая планета движется вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце

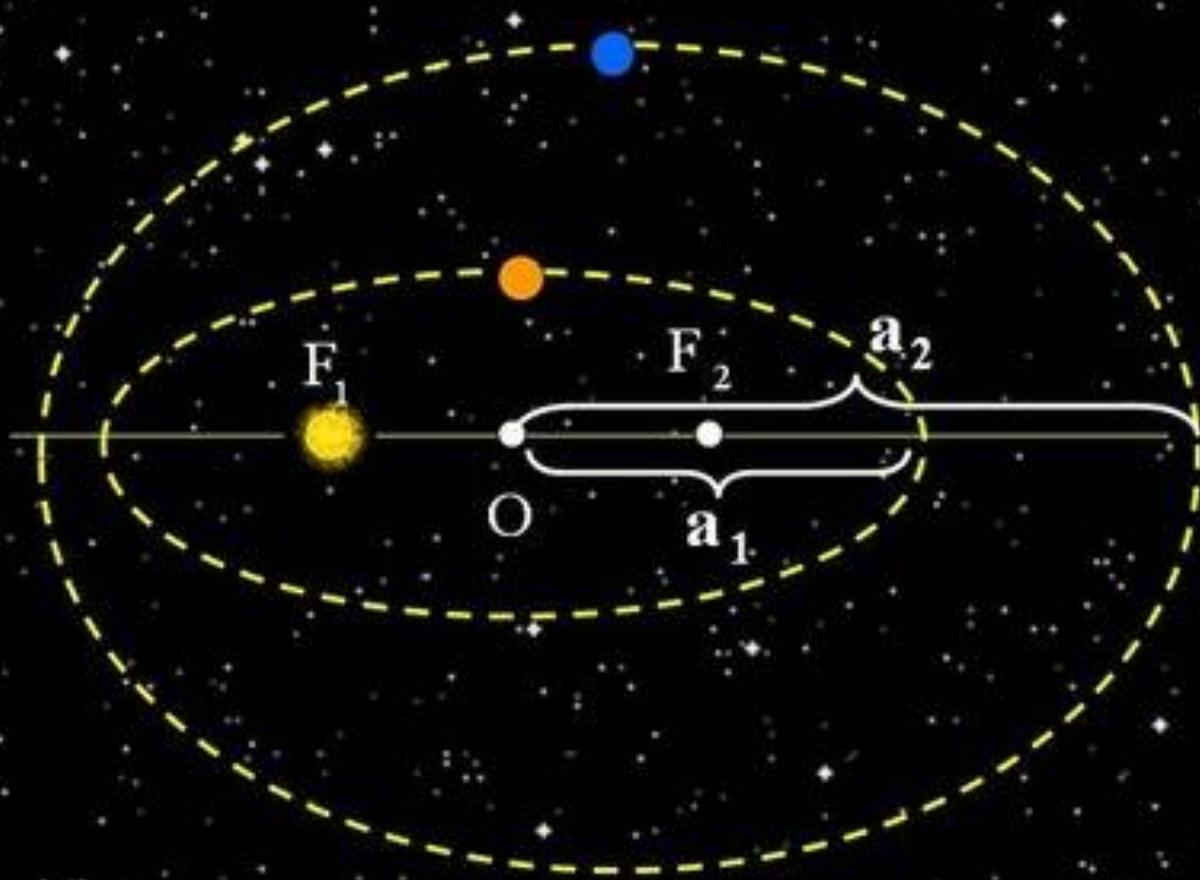
Второй закон Кеплера



Радиус – вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

Третий закон Кеплера.

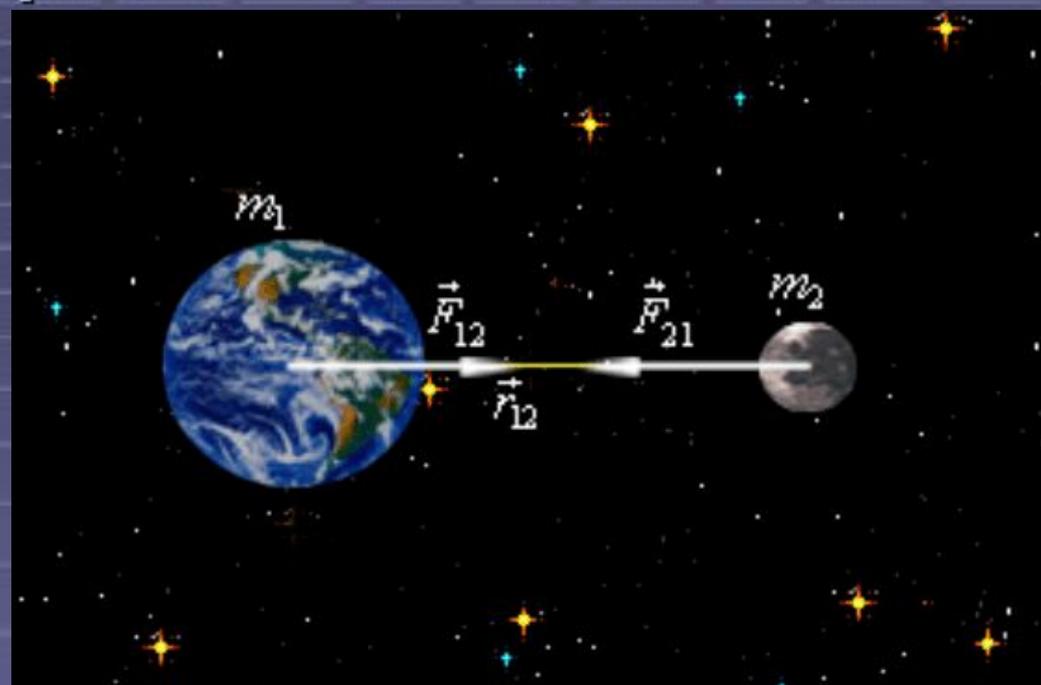
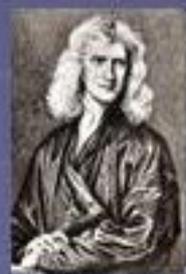
Квадраты звёздных периодов обращения двух планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.



$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения был открыт И. Ньютоном в 1682 году. Еще в 1665 году 23-летний Ньютон высказал предположение, что силы, удерживающие Луну на ее орбите, той же природы, что и силы, заставляющие яблоко падать на Землю. По его гипотезе между всеми телами Вселенной действуют силы притяжения (гравитационные силы), направленные по линии, соединяющей центры масс.

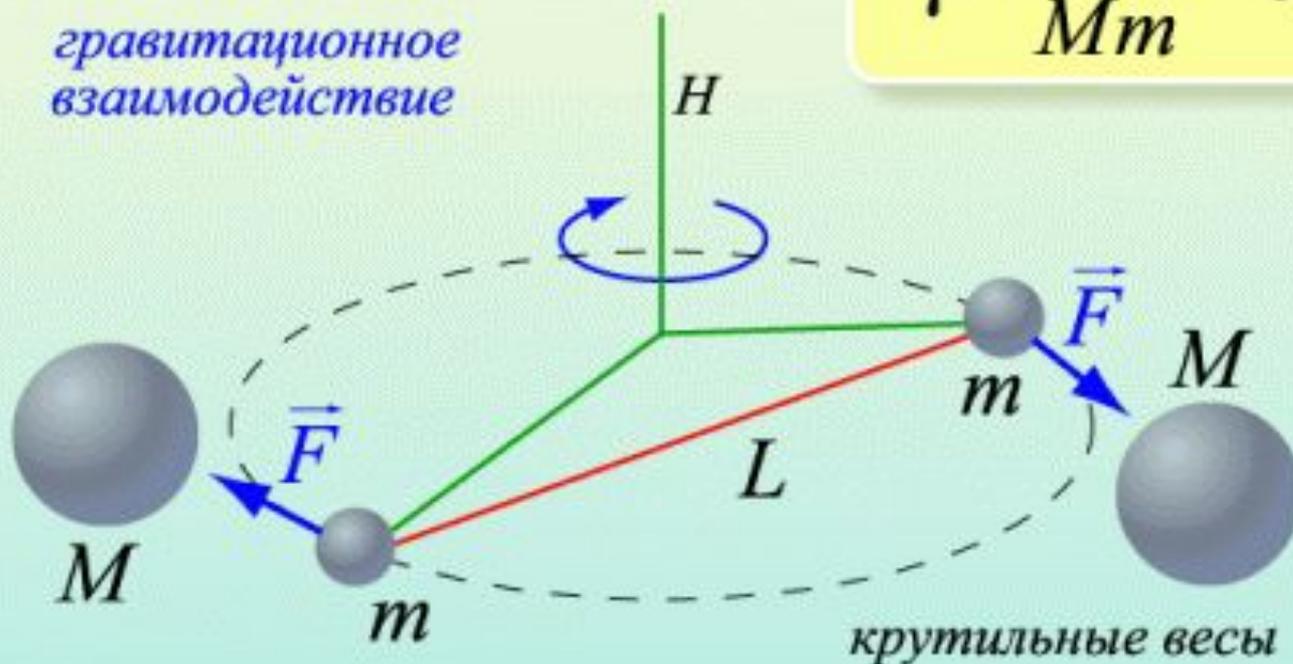


Центр масс, центр инерции, геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе.

Опыт Кавендиша

$$\gamma = \frac{Fr^2}{Mm} = 6,65 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

гравитационное
взаимодействие



H – тонкая нить

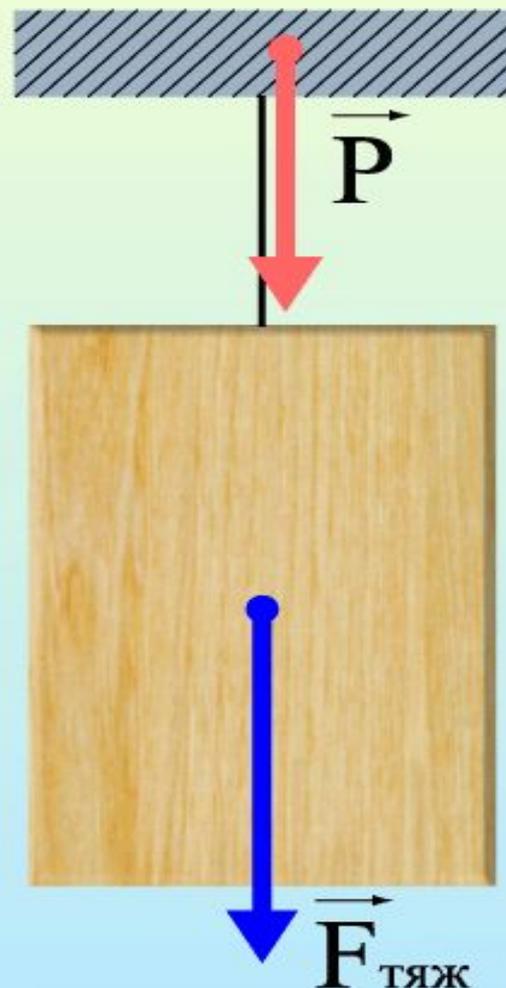
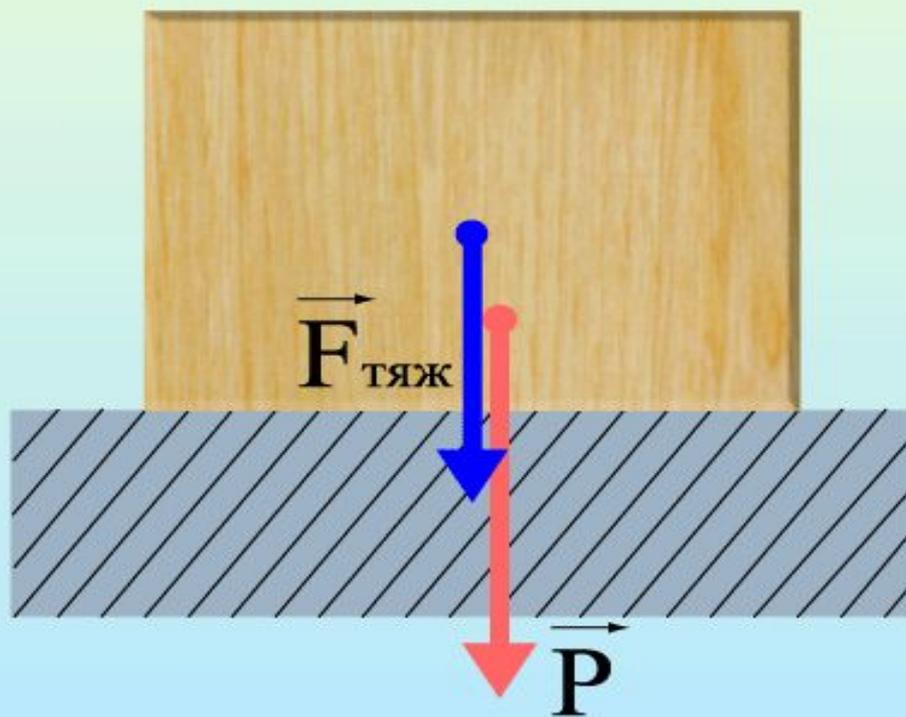
L – двухметровый стержень

t – свинцовые шары (диаметром 5 см и массой 775 г)

M – свинцовые шары (диаметром 20 см и массой 49,5 кг)

Одна из фундаментальных сил – сила гравитации проявляется на Земле в виде **силы тяжести** – сила, с которой все тела притягиваются к Земле.

$$|\vec{P}| = |\vec{F}_{\text{тяж}}|$$



Работа в поле тяготения

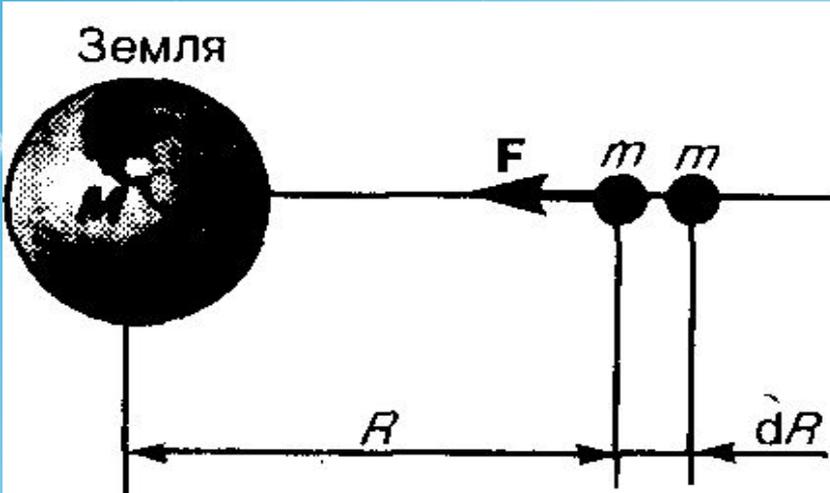
На расстоянии R на тело действует сила

$$F = GmM/R^2$$

При перемещении этого тела на расстояние dR совершается работа

$$dA = -G \frac{mM}{R^2} dR$$

Знак «-» появляется потому, что сила и перемещение в данном случае противоположны по направлению



Если тело перемещать с расстояния R_1 до R_2 , то работа

$$A = \int_{R_1}^{R_2} dA = - \int_{R_1}^{R_2} G \frac{mM}{R^2} dR = m \left(\frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1} \right)$$

Из формулы вытекает, что работа в поле тяготения не зависит от траектории перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положениями тела, т. е. *силы тяготения действительно консервативны, а поле тяготения является потенциальным.*

Работа, совершаемая консервативными силами, равна изменению потенциальной энергии системы, взятому со знаком минус:

$$A = -\Delta\Pi = -(\Pi_2 - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_2$$

$$\Pi_1 - \Pi_2 = -m (GM/R_1 - GM/R_2)$$

$$\Pi = -GmM/R$$

Поле тяготения и его характеристики

- Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью **поля тяготения**, или **гравитационного поля**. Это поле порождается телами и является формой существования материи.
- **Источниками** поля являются все **тела, масса которых отлична от нуля**.
- **Переносчиками** поля тяготения являются **гравитоны** (предсказаны, но еще не открыты).
- Основная силовая характеристика поля - **напряженность \vec{g}** .

Напряженность поля тяготения определяется силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает по направлению с действующей силой.

Для графического изображения силового поля используются *силовые линии* (*линии напряженности*). Силовые линии выбираются так, что вектор напряженности поля направлен по касательной к силовой линии.

- Основная энергетическая характеристика поля – **потенциал $\varphi = \Pi/m$**

Потенциал поля тяготения φ — скалярная величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля или работой по перемещению единичной массы из данной точки поля в бесконечность.

Геометрическое место точек с одинаковым потенциалом образует сферическую поверхность. Такие поверхности, для которых потенциал постоянен, называются **эквипотенциальными**.

$$\vec{g} = -\text{grad } \varphi$$

The background is a solid light blue color. It features several abstract geometric elements: a large, semi-circular pattern of horizontal lines on the left side; a grid of thin white lines; several white starburst or lens flare effects scattered across the page; and a series of overlapping white curved lines on the right side that resemble orbital paths or a stylized globe.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

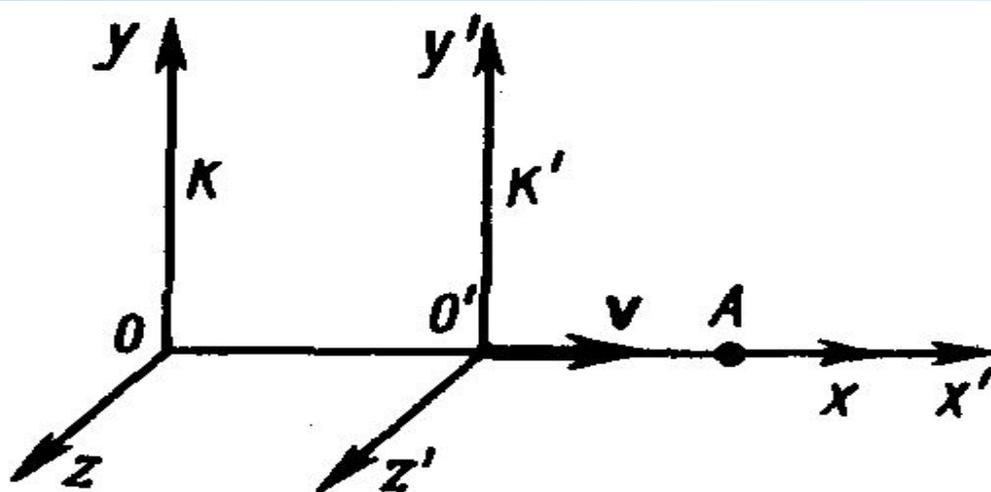
Постулаты специальной (частной) теории относительности

- А. Эйнштейн заложил основы **специальной теории относительности**. Эта теория представляет собой современную физическую теорию пространства и времени, в которой, как и в классической ньютоновской механике, предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно. Специальная теория относительности часто называется также **релятивистской теорией**, а специфические явления, описываемые этой теорией, — **релятивистскими эффектами**.
- В основе специальной теории относительности лежат **постулаты Эйнштейна**, сформулированные им в 1905 г.
- **I. Принцип относительности:** никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; *все законы природы инвариантны* по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.
- **II. Принцип инвариантности скорости света:** *скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Преобразования Лоренца

Анализ явлений в инерциальных системах отсчета, проведенный А. Эйнштейном на основе сформулированных им постулатов, показал, что классические преобразования Галилея несовместимы с ними и, следовательно, должны быть заменены преобразованиями, удовлетворяющими постулатам теории относительности.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета: K (с координатами x, y, z) и K' (с координатами x', y', z'), движущуюся относительно K (вдоль оси x) со скоростью $v = const$.



Пусть в начальный момент времени $t=t'=0$ (начала координат O и O' совпадают) излучается световой импульс. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах равна c . Поэтому если за время t в системе K сигнал дойдет до некоторой точки A , пройдя расстояние

$$x = ct,$$

то в системе K' координата светового импульса в момент достижения точки A

$$x' = ct',$$

где t' — время прохождения светового импульса от начала координат до т. A в системе K' . Тогда получаем

$$x' - x = c(t' - t).$$

Т. к. $x' \neq x$, то $t' \neq t$,

т. е. отсчет времени в системах K и K' различен — отсчет времени имеет относительный характер

Эти преобразования предложены Лоренцем в 1904 г., еще до появления теории относительности, как преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны.

Преобразования Лоренца имеют вид:

$$\begin{array}{l} \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}' \\ \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{K}' \rightarrow \mathbf{K} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \end{array} \right. \end{array}$$
$$\beta = v/c.$$

Из преобразований Лоренца: при малых скоростях), т. е. когда $\beta \ll 1$, они переходят в классические преобразования Галилея (принцип соответствия), которые являются предельным случаем преобразований Лоренца. При $v > c$ выражения для x , t , x' , t' теряют физический смысл (становятся мнимыми). Это находится, в свою очередь, в соответствии с тем, что движение со скоростью, большей скорости распространения света в вакууме, невозможно.

Следствия из преобразований Лоренца

Одновременность событий в разных системах отсчета.

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. В системе K' им соответствуют координаты x_1' и x_2' и моменты времени t_1' и t_2' . Если события в системе K происходят в одной точке ($x_1 = x_2$) и являются одновременными ($t_1 = t_2$), то, согласно преобразованиям Лоренца:

$$x_1' = x_2' \text{ и } t_1' = t_2',$$

т. е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.

Если события в системе K пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), но одновременны ($t_1 = t_2$), то в системе K' , согласно преобразованиям Лоренца:

$$\begin{aligned}x_1' &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & x_2' &= \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\t_1' &= \frac{t - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & t_2' &= \frac{t - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\x_1' &\neq x_2', & t_1' &\neq t_2' .\end{aligned}$$

Таким образом, в системе K' эти события, оставаясь пространственно разобщенными, оказываются и неодновременными. Следовательно, в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, в то время как в других системах отсчета, наоборот, второе событие предшествует первому. Сказанное, однако, не относится к причинно-следственным событиям.

Следствия из преобразований Лоренца

Длительность событий в разных системах отсчета

Пусть в некоторой точке (с координатой x), покоящейся относительно системы K , происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события) $\tau = t_2 - t_1$, где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе K'

$$\tau' = t_2' - t_1'$$

$$t_1' = \frac{t_1 - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\tau' = (t_2 - t_1) / \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$\tau' = \tau / \sqrt{1 - \beta^2}$$

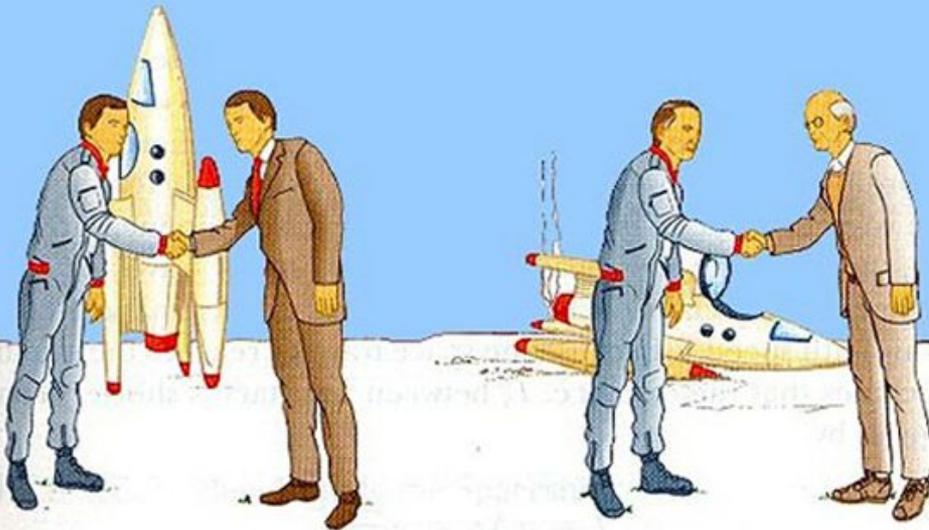
$\tau < \tau'$, т. е. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна. Интервал времени τ' , отсчитанный по часам в системе K' , с точки зрения наблюдателя в системе K , продолжительнее интервала τ , отсчитанного по его часам. Следовательно, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов, т. е. ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся. На основании относительности понятий «неподвижная» и «движущаяся» системы соотношения для τ и τ' обратимы. Замедление хода часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости распространения света в вакууме.

«Парадокс близнецов»

Представим себе, что осуществляется космический полет к звезде, находящейся на расстоянии 500 световых лет (расстояние, на которое свет от звезды до Земли доходит за 500 лет), со скоростью, близкой к скорости света. По земным часам полет до звезды и обратно продлится 1000 лет, в то время как для системы корабля и космонавта в нем такое же путешествие займет всего 1 год. Таким образом, космонавт возвратится на Землю более молодым, чем его брат-близнец, оставшийся на Земле.

Это явление **парадокса близнецов** в действительности парадокса не содержит., т.к. принцип относительности утверждает равноправность не всяких систем отсчета, а только **инерциальных**. Неправильность рассуждения состоит в том, что системы отсчета, связанные с близнецами, не эквивалентны: земная система инерциальна, а корабельная — неинерциальна, поэтому к ним принцип относительности неприменим.

Релятивистский эффект замедления хода часов получил экспериментальное подтверждение при изучении нестабильных элементарных частиц в опытах с π -мезонами. Среднее время жизни покоящихся π -мезонов (по часам, движущимся вместе с ними) $\tau \approx 2,2 \cdot 10^{-8}$ с. Следовательно, π -мезоны, образующиеся в верхних слоях атмосферы (на высоте ≈ 30 км) и движущиеся со скоростью, близкой к скорости c , должны были бы проходить расстояния $c\tau \approx 6,6$ м, т. е. не могли бы достигать земной поверхности, что противоречит действительности.



Длина тел в разных системах отсчета

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы K' . Длина стержня в системе K' будет $l_0' = x_2' - x_1'$, где x_1' и x_2' — не изменяющиеся со временем t' координаты начала и конца стержня, а индекс 0 показывает, что в системе отсчета K' стержень покоится. Определим длину этого стержня в системе K , относительно которой он движется со скоростью v . Для этого необходимо измерить координаты его концов x_1 и x_2 в системе K в один и тот же момент времени t . Их разность $l = x_2 - x_1$ и определяет длину стержня в системе K .

Длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится. Линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения.

Лоренцево сокращение длины тем больше, чем больше скорость движения.

Поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится.

$$l_0' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$l_0' = l / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Релятивистский закон сложения скоростей

Рассмотрим движение материальной точки в системе K' , в свою очередь движущейся относительно системы K со скоростью v . Определим скорость этой же точки в системе K . Если в системе K движение точки в каждый момент времени t определяется координатами x, y, z , а в системе K' в момент времени t' — координатами x', y', z' , то

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad \text{и} \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

представляют собой соответственно проекции на оси x, y, z и x', y', z' вектора скорости рассматриваемой точки относительно систем K и K' . Согласно преобразованиям Лоренца

$$\begin{matrix} K' \rightarrow K & dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} & dy = dy' & dz = dz' & dt = \frac{dt' + v dx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ & K \rightarrow K' & & & \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + vu'_x/c^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \end{array} \right.$$

релятивистский закон сложения скоростей

- Если материальная точка движется параллельно оси x , то скорость u относительно системы K совпадает с u_x , а скорость u' относительно K' — с u'_x . Тогда закон сложения скоростей примет вид

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}.$$

- Легко убедиться в том, что если скорости v , u' и u малы по сравнению со скоростью c , то формулы переходят в закон сложения скоростей в классической механике. Релятивистский закон сложения скоростей подчиняется второму постулату Эйнштейна.
- Действительно, если $u' = c$, то формула примет вид $u = \frac{c+v}{1+cv/c} = c$
- Этот результат свидетельствует о том, что релятивистский закон сложения скоростей находится в согласии с постулатами Эйнштейна.
- Докажем также, что если складываемые скорости сколь угодно близки к скорости c , то их результирующая скорость всегда меньше или равна c . В качестве примера рассмотрим предельный случай $u' = v = c$. После подстановки в формулу получим $u = c$. Таким образом, при сложении любых скоростей результат не может превысить скорости света c в вакууме. *Скорость света в вакууме есть предельная скорость, которую невозможно превысить.* Скорость света в какой-либо среде, равная c/n (n — абсолютный показатель преломления среды), предельной величиной не является.

Интервал между событиями

Относительный характер длин и промежутков времени в теории Эйнштейна означает относительность отдельных компонентов какой-то реальной физической величины, не зависящей от системы отсчета, т. е. являющейся *инвариантной* по отношению к преобразованиям координат.

В четырехмерном пространстве Эйнштейна, в котором каждое событие характеризуется четырьмя координатами (x, y, z, t) , такой физической величиной является **интервал** между двумя событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2},$$

где $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l_{12}$ — расстояние между точками трехмерного пространства, в которых эти события произошли.

Введя обозначение $t_{12} = t_2 - t_1$, получим $s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$.

$\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ и $\Delta z = z_2 - z_1$

$$s_{12}^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

- Интервал между теми же событиями в системе K' равен

$$(s'_{12})^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$$

- Согласно преобразованиям Лоренца:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - v \Delta x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$(s'_{12})^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$



$$(s'_{12})^2 = s_{12}^2$$

Интервал, определяя пространственно-временные соотношения между событиями, является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Инвариантность интервала означает, что, несмотря на относительность длин и промежутков времени, течение событий носит объективный характер и не зависит от системы отсчета.

Основной закон релятивистской динамики материальной точки

□ Масса движущихся релятивистских частиц зависит от их скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 — масса покоя частицы, т. е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой частица находится в покое; c — скорость света в вакууме; m — масса частицы в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью v . Следовательно, масса одной и той же частицы различна в разных инерциальных системах отсчета.

Из принципа относительности Эйнштейна, утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует условие инвариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца. Основным законом динамики Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

оказывается также инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, если в нем справа стоит производная по времени от релятивистского импульса.

Основной закон релятивистской динамики материальной точки имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right)$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

— **релятивистский импульс** материальной точки.

Физический смысл: справа стоит производная по времени от релятивистского импульса. Таким образом, уравнение инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца и, следовательно, удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна. Следует учитывать, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами. Более того, в общем случае ускорение не совпадает по направлению с силой.

В силу однородности пространства в релятивистской механике выполняется **закон сохранения релятивистского импульса**: релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Закон взаимосвязи массы и энергии

Приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$dT = dA$$



$$dT = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = c^2 dm,$$

Так как кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна массе покоя m_0 , то, проинтегрировав, получим

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

- А. Эйнштейн пришел к универсальной зависимости между полной энергией тела E и его массой m :

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$\Delta E = c^2 \Delta m$$

закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии: полная энергия системы равна произведению ее массы на квадрат скорости света в вакууме.

В полную энергию E не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

- Покоящееся тело также обладает энергией $E_0 = m_0 c^2$, называемой энергией покоя.

Релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы

$$E^2 = m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \quad E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

- Закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии блестяще подтвержден экспериментом о выделении энергии при протекании ядерных реакций. Он широко используется для расчета энергетических эффектов при ядерных реакциях и превращениях элементарных частиц.
- Масса тела не остается постоянной величиной, а зависит от скорости тела; длина тел и длительность событий не являются абсолютными величинами, а носят относительный характер; наконец, масса и энергия оказались связанными друг с другом, хотя они и являются качественно различными свойствами материи.
- Основной вывод теории относительности сводится к тому, что пространство и время органически взаимосвязаны и образуют единую форму существования материи — пространство-время. Только поэтому пространственно-временной интервал между двумя событиями является абсолютным, в то время как пространственные и временные промежутки между этими событиями относительны. Следовательно, вытекающие из преобразований Лоренца следствия являются выражением объективно существующих пространственно-временных соотношений движущейся материи.