СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. Часть I

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

2

ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Общий случай *формулы Максвелла – Мора* для перемещения от силовых воздействий:

$$\Delta_{iF}=\sum_{\text{по } S}\sum_{j=1}^{m_S}\int_{l_j}\frac{S_i\,S_F}{C_S}ds_j+\sum_{j=1}^{u}\frac{R_{j,i}\,R_{j,F}}{c_j}=$$

$$=\underbrace{\sum_{j=1}^{m_{M_z}}\int_{l_j}\frac{M_{z,i}\,M_{z,F}}{EI_z}ds_j}_{\text{Изгиб}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{m_{M_y}}\int_{l_j}\frac{M_{y,i}\,M_{y,F}}{EI_y}ds_j}_{\text{Изгиб}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{m_{Mt}}\int_{l_j}\frac{M_{t,i}\,M_{t,F}}{GI_t}ds_j}_{\text{Кручение}}+$$

$$+\underbrace{\sum_{j=1}^{m_N}\int_{l_j}\frac{N_i\,N_F}{EA}ds_j}_{\text{Растяжение/сжатие}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{m_{Q_y}}\int_{l_j}k_{\tau y}\frac{Q_{y,i}\,Q_{y,F}}{GA}ds_j}_{\text{Сдвиг}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{m_{Q_z}}\int_{l_j}k_{\tau z}\frac{Q_{z,i}\,Q_{z,F}}{GA}ds_j}_{\text{Сдвиг}}+\boxed{\sum_{j=1}^{u}\frac{R_{j,i}\,R_{j,F}}{c_j}}$$

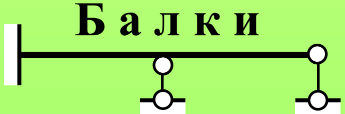
Частные случаи *формулы Максвелла – Мора*:

а) для плоской системы общего вида

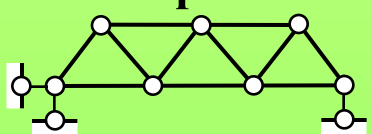
$$\Delta_{iF}=\sum_{j=1}^{m_M}\int_{l_j}\frac{M_i\,M_F}{EI}ds_j+\sum_{j=1}^{m_N}\int_{l_j}\frac{N_i\,N_F}{EA}ds_j+\sum_{j=1}^{m_Q}\int_{l_j}k_\tau\frac{Q_i\,Q_F}{GA}ds_j+\boxed{\sum_{j=1}^{u}\frac{R_{j,i}\,R_{j,F}}{c_j}}$$

$\Delta_{iF,c}$ – при наличии упругих связей

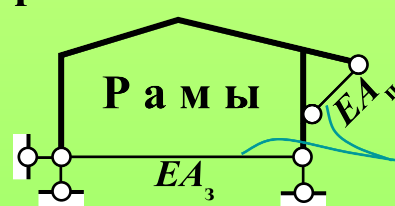
б) для стержневых систем разных типов



$$\Delta_{iF}=\sum_{j=1}^{m_M}\int_{l_j}\frac{M_i\,M_F}{EI}ds_j+\boxed{+\sum_{j=1}^{m_Q}\int_{l_j}k_\tau\frac{Q_i\,Q_F}{GA}ds_j+\Delta_{iF,c}}$$



$$\Delta_{iF}=\sum_{j=1}^{m_N}\frac{N_{j,i}\,N_{j,F}}{EA_j}l_j+\boxed{\Delta_{iF,c}}$$



$$\Delta_{iF}=\sum_{j=1}^{m_M}\int_{l_j}\frac{M_i\,M_F}{EI}ds_j+\boxed{\sum_{j=1}^{m_Q}\int_{l_j}k_\tau\frac{Q_i\,Q_F}{GA}ds_j}+\sum_{j=1}^{m_N}\frac{N_{j,i}\,N_{j,F}}{EA_j}l_j+\boxed{\Delta_{iF,c}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

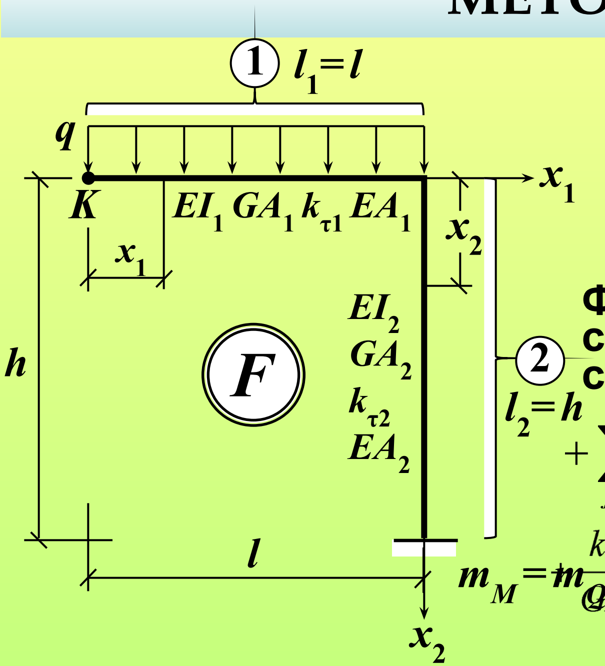
Алгоритм вычисления перемещения по формуле Максвелла – Мора

1. **Исходя из типа и особенностей рассматриваемой системы определяется, какие виды деформаций элементов должны быть учтены при вычислении перемещения; выбирается нужный вариант записи формулы Максвелла – Мора (общий или частный случай).**
2. **Рассматривается действительное состояние системы с определением входящих в выбранный вариант формулы М – М внутренних силовых факторов S_F и реакций $R_{j,F}$ упругих связей (при их наличии) от заданных нагрузок.**
3. **Рассматривается вспомогательное (фиктивное) состояние системы с единичным воздействием соответствующего типа по направлению искомого перемещения; определяются внутренние силовые факторы S_i и реакции $R_{j,i}$ упругих связей от единичного воздействия.**
4. **Найденные силовые факторы действительного и единичного состояний, представленные аналитически (функциональными выражениями внутренних усилий) или графически (в форме эпюр) используются в соответствующих членах формулы М – М; аналитически или численными способами выполняется вычисление интегралов.**

***Примечания*: 1). Если результат вычисления по формуле М – М имеет знак «плюс», то искомое перемещение направлено в ту же сторону, что и назначенное единичное воздействие, в случае знака «минус» – в противоположную сторону.**

2). Вычисление интеграла в формуле М – М называется «*перемножением эпюр*».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА



Пример

Определить v_K (вертикальное перемещение точки K).
Сечения ригеля и стойки – постоянные (разные).

Решение

1. Переобозначаем искомое перемещение: $v_K = \Delta_{1F}$

4. Вычисляем перемещение по формуле Максвелла – Мора:

Формула Максвелла – Мора для плоской стержневой системы с учётом изгиба, сдвига и растяжения-сжатия элементов:

$$\Delta_{1F} = \sum_{j=1}^{m_M}\int_{l_j}\frac{M_1(x_j)\,M_F(x_j)}{EI(x_j)}dx_j + \sum_{j=1}^{m_Q}\int_{l_j}k_\tau(x_j)\frac{Q_1(x_j)\,Q_F(x_j)}{GA(x_j)}dx_j + \sum_{j=1}^{m_N}\int_{l_j}\frac{N_1(x_j)\,N_F(x_j)}{EA(x_j)}dx_j .$$

$m_M = m_Q = m_N = 2$

$$v_K = \Delta_{1F} = \sum_{j=1}^{2}\int_{l_j}\frac{M_1(x_j)\,M_F(x_j)}{EI(x_j)}dx_j + \sum_{j=1}^{2}\int_{l_j}k_\tau(x_j)\frac{Q_1(x_j)\,Q_F(x_j)}{GA(x_j)}dx_j + \sum_{j=1}^{2}\int_{l_j}\frac{N_1(x_j)\,N_F(x_j)}{EA(x_j)}dx_j =$$

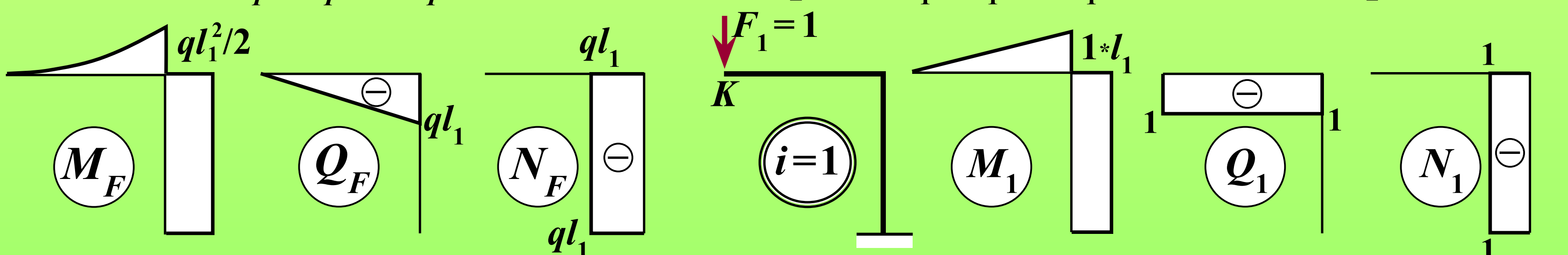
$$= \frac{1}{EI_1}\int_0^{l_1}(-x_1)\cdot(-qx_1^2/2)\,dx_1 + \frac{1}{EI_2}\int_0^{l_2} l_1\cdot(ql_1^2/2)\,dx_2 + \frac{k_{\tau1}}{GA_1}\int_0^{l_1}(-1)\cdot(-qx_1)\,dx_1 + \frac{k_{\tau2}}{GA_2}\int_0^{l_2}0\cdot 0\cdot dx_2 + \frac{1}{EA_1}\int_0^{l_1}0\cdot 0\cdot dx_1 + \frac{1}{EA_2}\int_0^{l_2}(-1)\cdot(-ql_1)\,dx_2 =$$

$$= \frac{ql_1^4}{8EI_1} + \frac{ql_1^3 l_2}{2EI_2} + \frac{ql_1^2 k_{\tau1}}{2GA_1} + \frac{ql_1 l_2}{EA_2} = \frac{ql_1^4}{8EI_1}\left(1+4\frac{EI_1}{EI_2}\frac{l_2}{l_1}\right) + \frac{ql_1^2 k_{\tau1}}{2GA_1}\left(1+2\frac{GA_1}{k_{\tau1}EA_2}\frac{l_2}{l_1}\right) =$$

$$= \frac{ql_1^4}{8EI_1}\left[1+4\frac{EI_1}{EI_2}\frac{l_2}{l_1} + 4\frac{EI_1\,k_{\tau1}}{GA_1\,l_1^2}\left(1+2\frac{GA_1}{k_{\tau1}EA_2}\frac{l_2}{l_1}\right)\right].$$

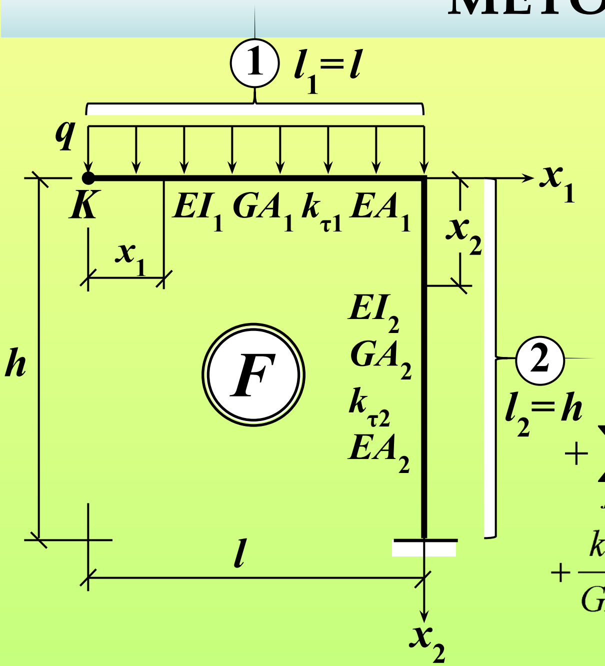
2. Рассматриваем действительное (грузовое) состояние системы – определяем внутренние силовые факторы M_F, Q_F и N_F.

3. Рассматриваем вспомогательное (фиктивное) состояние системы «$i=1$» с единичным воздействием по направлению искомого перемещения (силой $F_1=1$) – определяем внутренние силовые факторы M_1, Q_1 и N_1.



$$M_F(x_j)=\begin{cases}-qx_1^2/2,\\ +ql_1^2/2;\end{cases}\quad Q_F(x_j)=\begin{cases}-qx_1,\\ 0;\end{cases}\quad N_F(x_j)=\begin{cases}0, & (0\le x_1\le l_1),\\ -ql_1; & (0\le x_2\le l_2).\end{cases}\quad M_1(x_j)=\begin{cases}-1\cdot x_1,\\ +1\cdot l_1;\end{cases}\quad Q_1(x_j)=\begin{cases}-1,\\ 0;\end{cases}\quad N_1(x_j)=\begin{cases}0,\\ -1.\end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА



П р и м е р

Определить v_K (вертикальное перемещение точки K).
Сечения ригеля и стойки – постоянные (разные).

Р е ш е н и е

4. Вычисляем перемещение по формуле Максвелла - Мора:

$$v_K = \Delta_{1F} = \sum_{j=1}^{2} \int_{l_j} \frac{M_1(x_j)\, M_F(x_j)}{EI(x_j)}\, dx_j + \sum_{j=1}^{2} \int_{l_j} k_\tau(x_j) \frac{Q_1(x_j)\, Q_F(x_j)}{GA(x_j)}\, dx_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \int_{l_j} \frac{N_1(x_j)\, N_F(x_j)}{EA(x_j)}\, dx_j = \frac{1}{EI_1}\int_0^{l_1} (-x_1)\cdot(-q x_1^2/2)\, dx_1 + \frac{1}{EI_2}\int_0^{l_2} l_1 \cdot (q l_1^2/2)\, dx_2 +$$

$$+ \frac{k_{\tau 1}}{GA_1}\int_0^{l_1} (-1)\cdot(-q x_1)\, dx_1 + \frac{k_{\tau 2}}{GA_2}\int_0^{l_2} 0\cdot 0 \cdot dx_2 + \frac{1}{EA_1}\int_0^{l_1} 0\cdot 0\cdot dx_1 + \frac{1}{EA_2}\int_0^{l_2} (-1)\cdot(-q l_1)\, dx_2 =$$

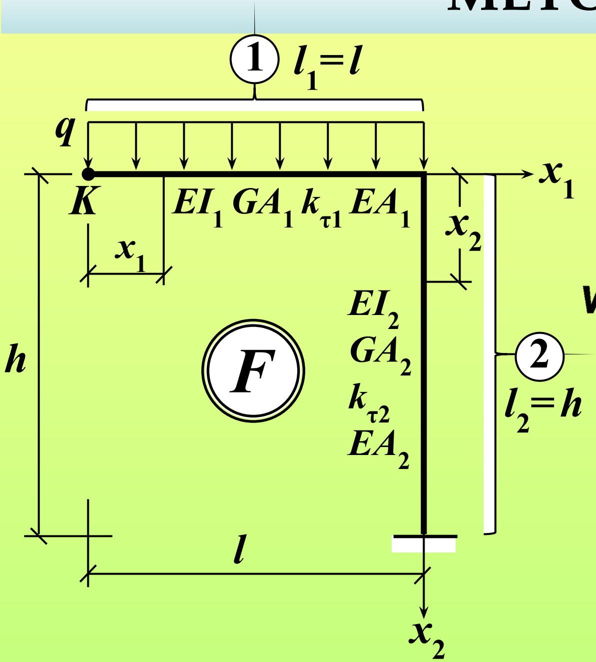
$$= \frac{q l_1^4}{8EI_1} + \frac{q l_1^3 l_2}{2EI_2} + \frac{q l_1^2 k_{\tau 1}}{2GA_1} + \frac{q l_1 l_2}{EA_2} = \frac{q l_1^4}{8EI_1}\left(1 + 4\frac{EI_1}{EI_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right) + \frac{q l_1^2 k_{\tau 1}}{2GA_1}\left(1 + 2\frac{GA_1}{k_{\tau 1} EA_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right) =$$

$$= \frac{q l_1^4}{8EI_1}\left[\left(1 + 4\frac{EI_1}{EI_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right) + 4k_{\tau 1}\frac{EI_1}{GA_1 l_1^2}\left(1 + 2\frac{GA_1}{k_{\tau 1} EA_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right)\right].$$

Учитывая, что $E_1/G_1 = 2(1+\nu_1)$ (ν_1 – коэффициент Пуассона), $I_1 = r_1^2 A_1 = (\eta_1 h_1)^2 A_1$ (здесь r_1 – радиус инерции сечения, h_1 – высота сечения на участке 1), получаем:

$$\mathbf{v}_k = \frac{q l_1^4}{8EI_1}\left[\underbrace{\left(1 + 4\frac{EI_1}{EI_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right)}_{\text{От изгиба}} + \underbrace{8(1+\nu_1)\, k_{\tau 1}\left(\eta_1 \frac{h_1}{l_1}\right)^2}_{\text{От сдвига}} \underbrace{\left(1 + 2\frac{GA_1}{k_{\tau 1} EA_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right)}_{\text{От укорочения стойки}}\right].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА



П р и м е р

Определить v_K (вертикальное перемещение точки K).

Сечения ригеля и стойки – постоянные (разные).

Р е ш е н и е

$$v_k=\frac{ql_1^4}{8EI_1}\left[\underbrace{\left(1+4\frac{EI_1}{EI_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right)}_{\text{От изгиба}}+\underbrace{8(1+\nu_1)k_{\tau 1}\left(\eta_1\frac{h_1}{l_1}\right)^2}_{\text{От сдвига}}\underbrace{\left(1+2\frac{GA_1}{k_{\tau 1}EA_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right)}_{\text{От укорочения стойки}}\right].$$

Для количественной оценки вклада каждого вида деформации в определяемое перемещение рассмотрим случай, когда ригель и стойка изготовлены из одного материала ($E_1=E_2$, $G_1=G_2$):

$$v_k=\frac{ql_1^4}{8EI_1}\left[\left(1+4\frac{I_1}{I_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right)+8(1+\nu_1)k_{\tau 1}\left(\eta_1\frac{h_1}{l_1}\right)^2\left(1+\frac{1}{k_{\tau 1}(1+\nu_1)}\cdot\frac{A_1}{A_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right)\right].$$

Для большинства изотропных материалов $\nu_1=0{,}15\ \dots\ 0{,}3$; для сечений от прямоугольных до двутавровых $\eta_1=0{,}3\dots0{,}45$; $k_{\tau 1}=1{,}2\dots3$, тогда

$$v_k=\frac{ql_1^4}{8EI_1}\left\{\left(1+4\frac{I_1}{I_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right)+(0{,}99...6{,}32)\left(\frac{h_1}{l_1}\right)^2\left[1+(0{,}256...0{,}725)\cdot\frac{A_1}{A_2}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right]\right\}.$$

Если ригель и рама имеют одинаковые сечения ($A_1=A_2$, $I_1=I_2$) и длины ($l_1=l_2$),

то $$v_k=\frac{5}{8}\cdot\frac{ql_1^4}{EI_1}\cdot\left[1+(0{,}25\ ...\ 2{,}2)\cdot\left(\frac{h_1}{l_1}\right)^2\right],$$

где второе слагаемое в скобках оценивает суммарный вклад в перемещение v_K деформации сдвига (в ригеле) и сжатия стойки. При обычных пропорциях колонн и ригелей рамных строительных конструкций $h_1/l_1=1/8\dots1/15$, и тогда доля перемещения за счёт сдвига и сжатия в сумме составляет 0,25 … 3,4 % от перемещения, возникающего от деформации изгиба элементов. При этом вклад сдвига в 1,4 … 4 раза превышает вклад сжатия.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ (СПОСОБЫ) ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В ФОРМУЛЕ МАКСВЕЛЛА – МОРА

$$Int_j = \int_{l_j} \frac{S_i(x_j)\cdot S_F(x_j)}{C_S(x_j)}\,dx_j = \int_{l_j} \Phi(x_j)\,dx_j, \text{ где } \Phi(x_j) = f_1(x_j)\cdot f_2(x_j)$$

Возможные варианты:

а) $f_1(x_j) = \dfrac{S_i(x_j)}{C_S(x_j)}, \quad f_2(x_j) = S_F(x_j);$ б) $f_1(x_j) = S_i(x_j), \quad f_2(x_j) = \dfrac{S_F(x_j)}{C_S(x_j)};$

в) при $= C_S(x_j) = \text{const} = C_S$: $Int_j = \dfrac{1}{C_S}\displaystyle\int_{l_j} \underbrace{S_i(x_j)}_{f_1(x_j)}\cdot \underbrace{S_F(x_j)}_{f_2(x_j)}\,dx_j$

или

$f_2(x_j) \quad f_1(x_j)$

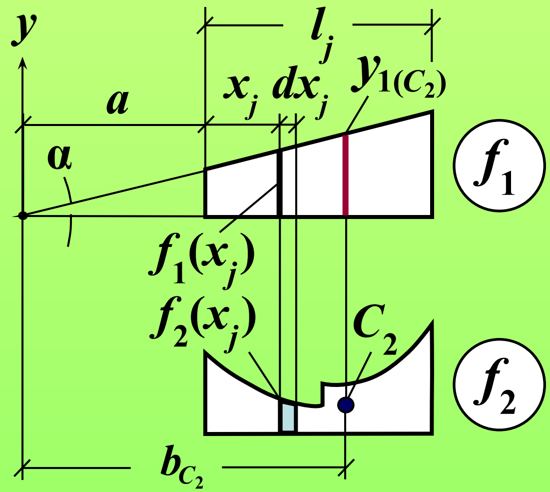
Правило Верещагина

(А.К. Верещагин, 1925)

Условие применимости:

одна из функций (f_1) – линейная

(при этом f_2 может быть любой – сложной или линейной)



$$\int_{l_j} f_1(x_j)\cdot f_2(x_j)\,dx_j = \int_{l_j} (a + x_j)\cdot \mathrm{tg}\,\alpha\cdot f_2(x_j)\,dx_j =$$

$$= \mathrm{tg}\,\alpha\cdot \int_{l_j} (a + x_j)\cdot f_2(x_j)\,dx_j = \mathrm{tg}\,\alpha\cdot S^{(f_2)} = \mathrm{tg}\,\alpha\cdot \omega_{f_2}\cdot b_{C_2} =$$

$$= \omega_{f_2}\cdot (b_{C_2}\cdot \mathrm{tg}\,\alpha) = \omega_{f_2}\cdot y_{1(C_2)}$$

Результат «перемножения эпюр» f_1 и f_2, из которых одна (f_1) линейная, равен произведению площади «сложной» эпюры (f_2) на ординату линейной эпюры в месте расположения центра тяжести «сложной»:

$$\int_{l_j} f_1(x_j)\cdot f_2(x_j)\,dx_j = \omega_{f_2}\cdot y_{1(C_2)}$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ (СПОСОБЫ) ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В ФОРМУЛЕ МАКСВЕЛЛА – МОРА

$$Int_j = \int\limits_{l_j} \frac{S_i(x_j)\cdot S_F(x_j)}{C_S(x_j)}\,dx_j = \int\limits_{l_j} \Phi(x_j)\,dx_j$$

Возможные варианты:

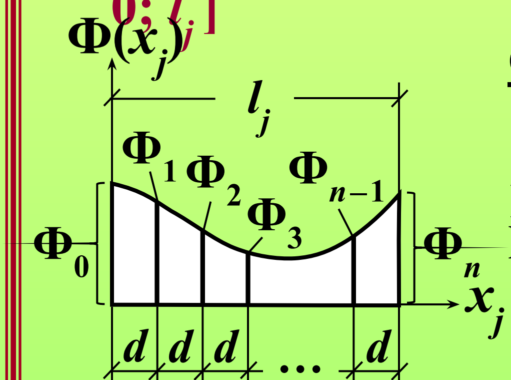
а) $\Phi(x_j) = \dfrac{S_i(x_j)\cdot S_F(x_j)}{C_S(x_j)}$; б) при $= C_S(x_j) = \mathrm{const} = C_S$: $\Phi(x_j) = S_i(x_j)\cdot S_F(x_j)$

Формула Симпсона

(T. Simpson, 1710 – 1761)

Условие применимости:

единое аналитическое выражение функции $\Phi(x_j)$ в интервале [0; l_j]

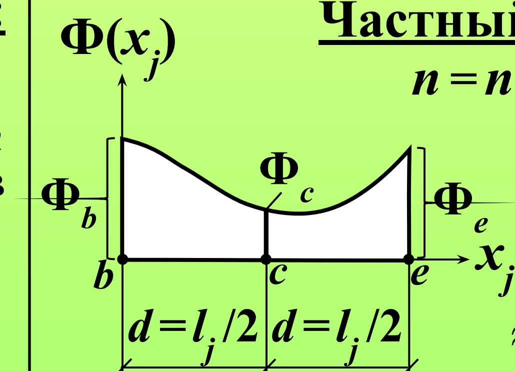


Общий случай:
интервал интегрирования разбивается на n равных участков (n – *чётное*)

$$\int\limits_{l_j} \Phi(x_j)\,dx_j \approx$$

$$\approx \frac{l_j}{3n}\left[\Phi_0 + 4\left(\Phi_1 + \Phi_3 + \dots + \Phi_{n\text{-}1}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\left(\Phi_2 + \Phi_4 + \dots + \Phi_{n\text{-}2}\right) + \Phi_n\right]$$

Свойство: если $\Phi(x_j)$ – полином до 3-й степени включительно, то результат – точный.



Частный случай:
$n = n_{\min} = 2$

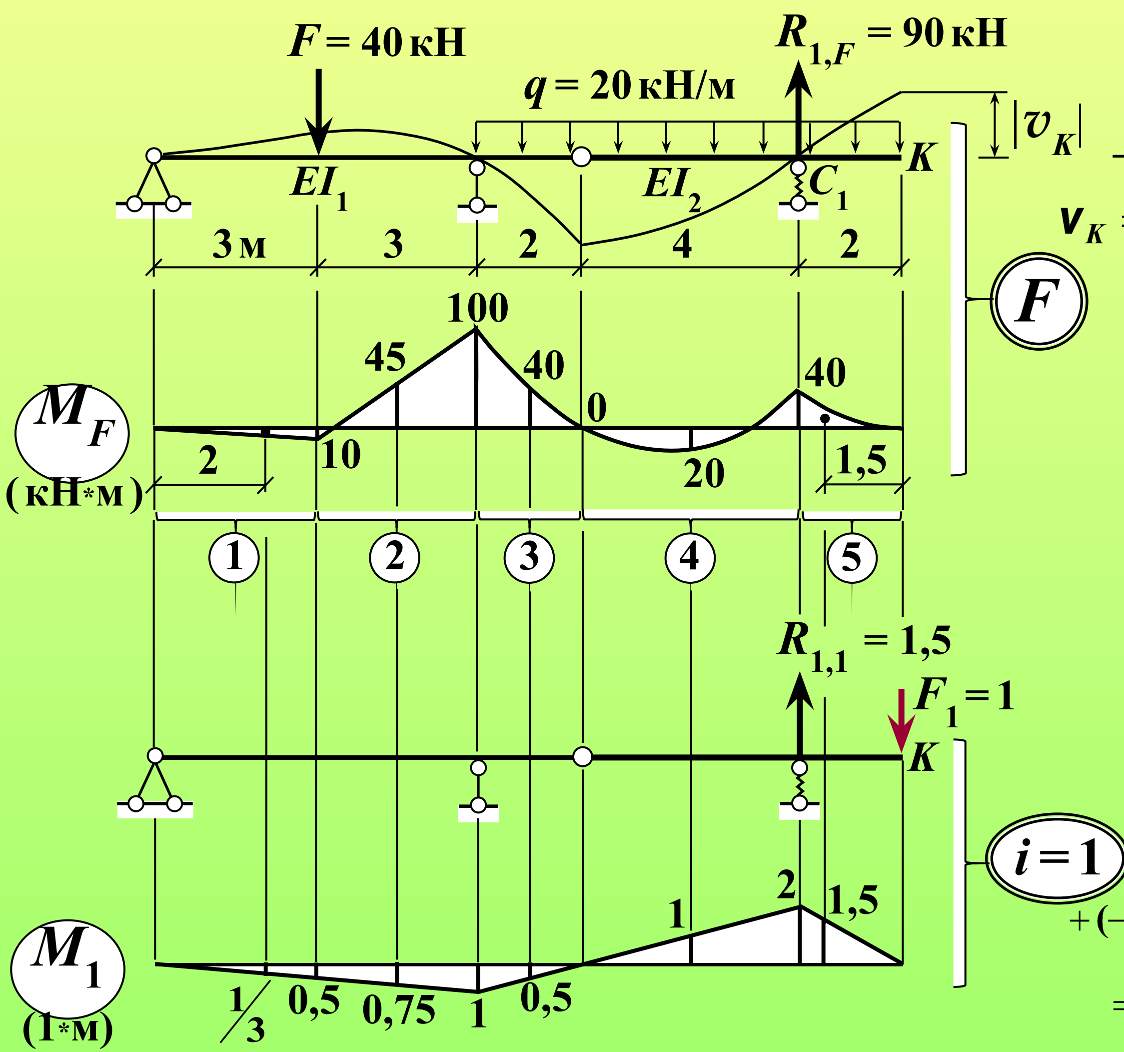
$$\int\limits_{l_j} \Phi(x_j)\,dx_j \approx$$
$$\approx \frac{l_j}{6}\left(\Phi_b + 4\Phi_c + \Phi_e\right)$$

Так как $\Phi(x_j) = f_1(x_j)\cdot f_2(x_j)$, то

$$\int\limits_{l_j} \Phi(x_j)\,dx_j \approx \frac{l_j}{6}\left(f_{1,b}f_{2,b} + 4f_{1,c}f_{2,c} + f_{1,e}f_{2,e}\right)$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ (СПОСОБЫ) ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В ФОРМУЛЕ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Пример



Требуется:

определить вертикальное перемещение $v_к$ точки K.

$$EI_2 = 2EI_1\,;\;\; C_1 = 5\text{м}^{-3}EI_1$$

$$v_K = \Delta_{1F} = \sum_{j=1}^{5}\int_{l_j}\frac{M_1M_F}{EI_j}\,dx_j + \frac{R_{1,1}R_{1,F}}{C_1}\,.$$

Интегралы в формуле Максвелла – Мора вычисляем на участках 1 и 5 по правилу Верещагина, а на участках 2, 3 и 4 – по формуле Симпсона:

$$v_K = \Delta_{1F} = \frac{1\ \text{кН}\cdot\text{м}^3}{EI_1}\cdot\left\{\frac{10\cdot 3}{2}\cdot 1/3 + \frac{3}{6}\cdot[10\cdot 0{,}5 + 4\cdot(-45)\cdot 0{,}75 + (-100)\cdot 1] + \frac{2}{6}\cdot[(-100)\cdot 1 + 4\cdot(-40)\cdot 0{,}5 + 0\cdot 0]\right\} +$$

$$+\frac{1\,\text{кН}\cdot\text{м}^3}{EI_2}\cdot\left\{\frac{4}{6}\cdot[0\cdot 0 + 4\cdot 20\cdot(-1) + (-40)\cdot(-2)] + \frac{1}{3}\cdot(-40)\cdot 2\cdot(-1{,}5)\right\} + \frac{90\,\text{кН}\cdot 1{,}5}{C_1} =$$

$$= -\frac{170\ \text{кН}\cdot\text{м}^3}{EI_1} + \frac{40\ \text{кН}\cdot\text{м}^3}{EI_2} + \frac{135\ \text{кН}}{C_1} =$$

$$= \left(-170 + \frac{40}{2} + \frac{135}{5}\right)\frac{\text{кН}\cdot\text{м}^3}{EI_1} = -\frac{123\ \text{кН}\cdot\text{м}^3}{EI_1}\,.$$

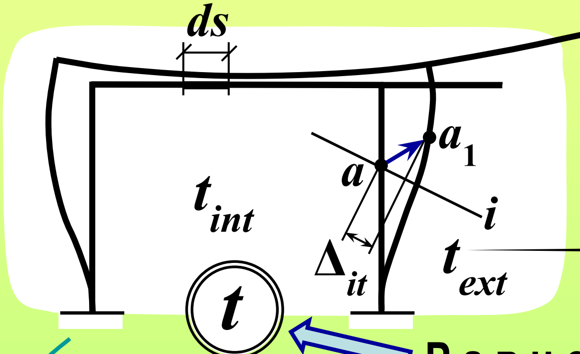
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Начальное (условно недеформированное) состояние системы

Действительное состояние системы после изменения температуры

t_{init} – начальное поле температур

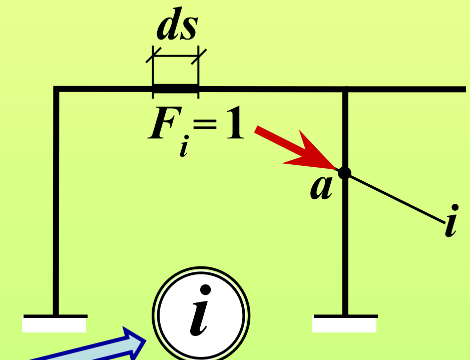
Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$

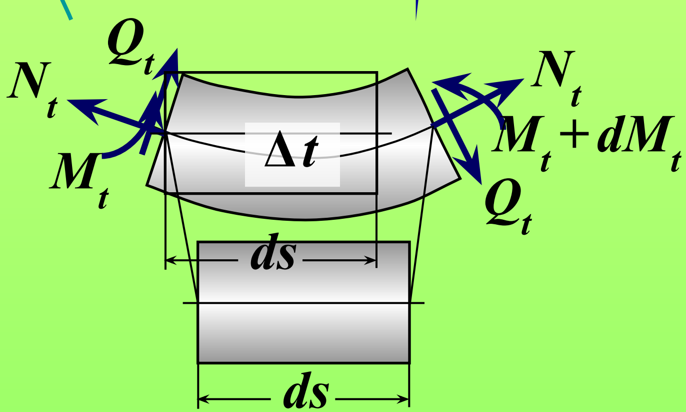
$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$

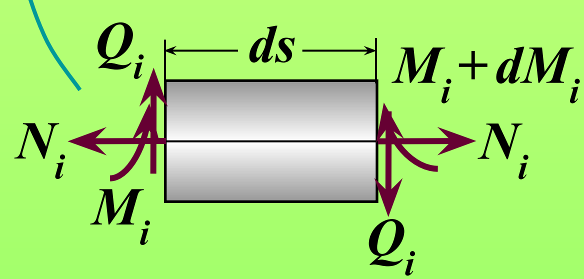


Равновесные состояния

$$\underbrace{W_{ext,ti}}_{0} + W_{int,ti} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{int,ti} = 0$$

$$\underbrace{W_{ext,it}}_{F_i * \Delta_{it}} + W_{int,it} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{it} = -W_{int,it}$$



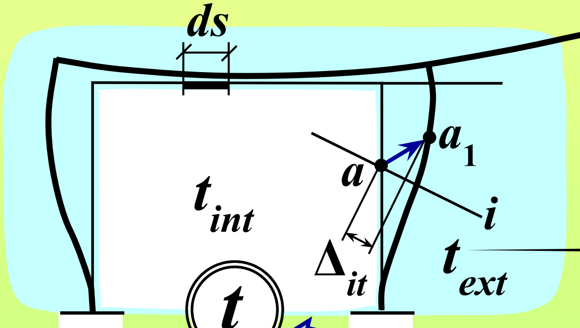


ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

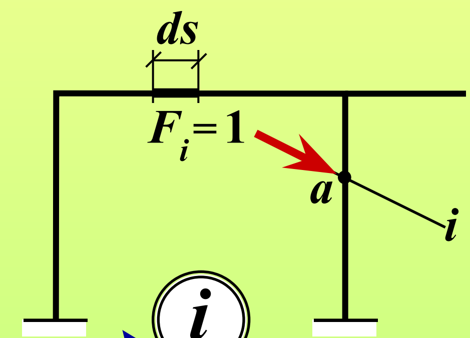
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

$$\begin{cases}\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}\\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}\end{cases}$$



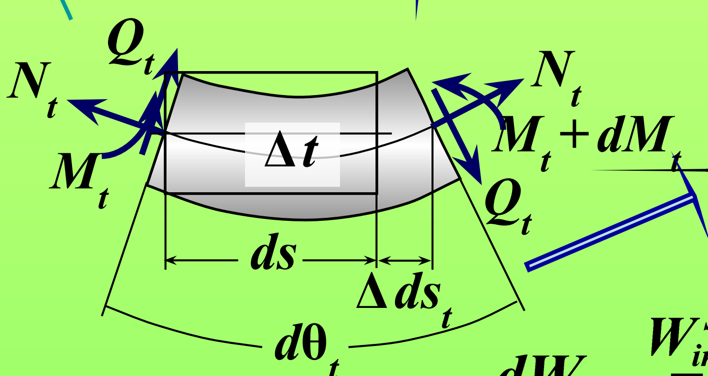
Равновесные состояния

$$\underbrace{W_{ext,ti}}_{=0} + W_{int,ti} = 0 \Rightarrow W_{int,ti} = 0$$

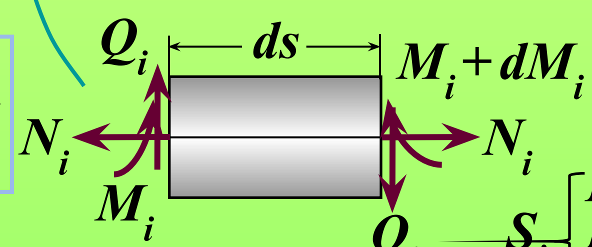
$$\underbrace{W_{ext,it}}_{F_i * \Delta_{it}} + W_{int,it} = 0 \Rightarrow \Delta_{it} = -W_{int,it}$$

Свободные (нестесненные) температурные деформации

Силовые (в частном случае – упругие) деформации



$$\begin{cases}\Delta ds_t = \boxed{\Delta ds_t^0} + \boxed{\Delta ds_{N_t}}\\ d\theta_t = \boxed{d\theta_t^0} + \boxed{d\theta_{M_t}}\end{cases}$$



$$S_i \begin{cases} M_i\\ N_i\\ Q_i\end{cases}$$

$$W^{S_t}_{int,it} = -\sum_{\text{по } S}\sum_{j=1}^{m}\int_{l_j}\frac{S_i S_t}{C_S}\,ds_j$$

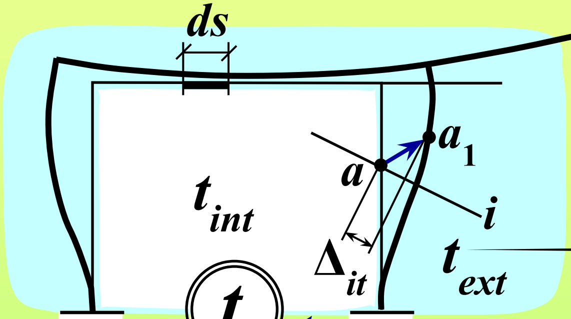
$$dW_{int,it} = dW^0_{int,it} + dW^{S_t}_{int,it} \Rightarrow W_{int,it} = W^0_{int,it} + W^{S_t}_{int,it}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

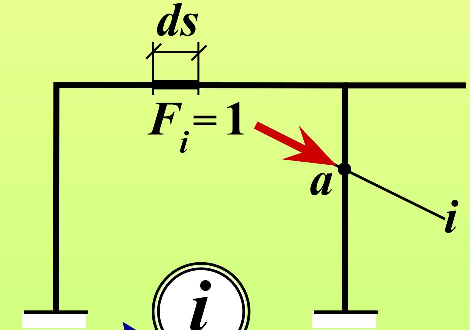
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

$$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$$
$$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$$



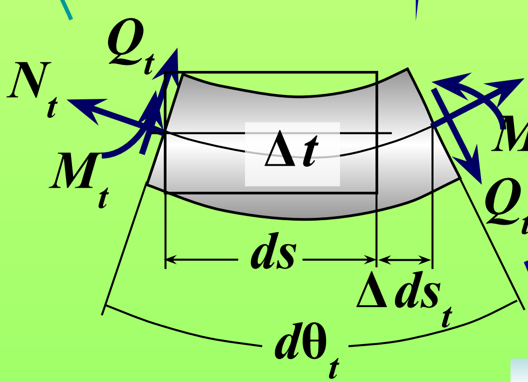
t **Р а в н о в е с н ы е   с о с т о я н и я** i

$$\underbrace{W_{ext,ti}}_{=0} + W_{int,ti} = 0 \qquad W_{int,ti} = 0$$

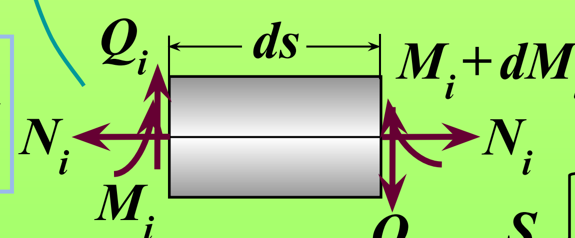
$$\underbrace{W_{ext,it}}_{F_i \cdot \Delta_{it}} + W_{int,it} = 0 \qquad \Delta_{it} = -W_{int,it}$$

Свободные (нестесненные) температурные деформации

Силовые (в частном случае – упругие) деформации



$$\Delta ds_t = \boxed{\Delta ds_t^0} + \boxed{\Delta ds_{N_t}}$$
$$d\theta_t = \boxed{d\theta_t^0} + \boxed{d\theta_{M_t}}$$



$$S_i \begin{cases} M_i \\ N_i \\ Q_i \end{cases}$$

$$W_{int,ti} = W_{int,it}^{S_t} = \theta \sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} \frac{S_i S_t}{C_S} ds_j$$

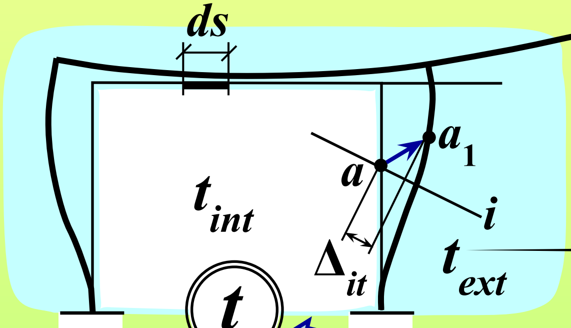
$$W_{int,it} = W_{int,it}^{0} + W_{int,it}^{S_t}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

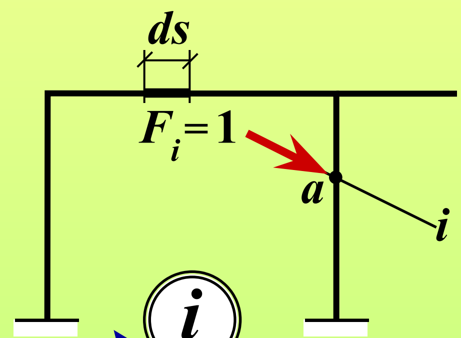
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

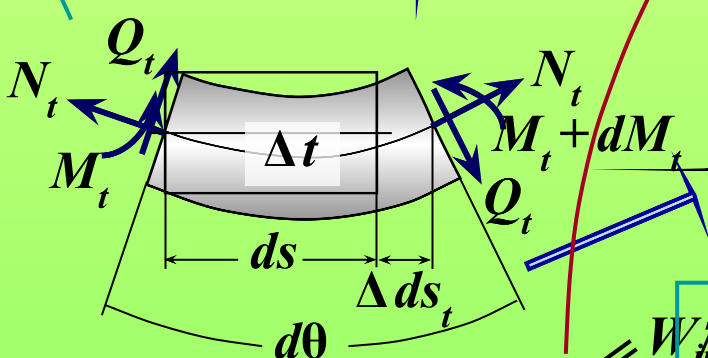
$$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$$
$$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$$



Равновесные состояния

$$\underbrace{W_{ext,ti}}_{=0} + W_{int,ti} = 0 \qquad W_{int,ti} = 0$$

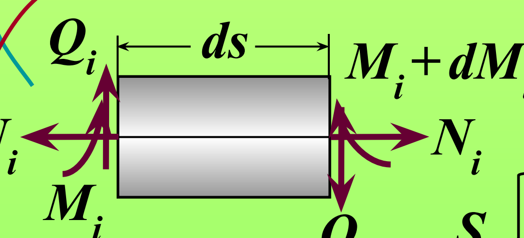
$$\underbrace{W_{ext,it}}_{F_i * \Delta_{it}} + W_{int,it} = 0 \qquad \Delta_{it} = -W_{int,it}$$



Свободные (нестесненные) температурные деформации

Силовые (в частном случае – упругие) деформации

$$\Delta ds_t = \boxed{\Delta ds_t^0} + \boxed{\Delta ds_{N_t}}$$
$$d\theta_t = \boxed{d\theta_t^0} + \boxed{d\theta_{M_t}}$$



$$S_i \begin{cases} M_i \\ N_i \\ Q_i \end{cases}$$

$$W_{int,ti} = W_{int,ti}^{S_t} = 0$$

$$\boxed{\Delta_{it} = -W_{int,it}^{0}}$$

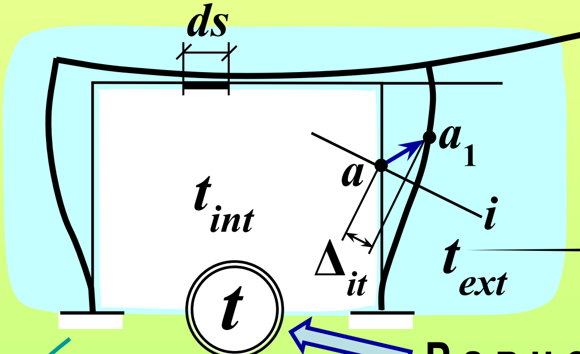
$$W_{int,it} = W_{int,it}^{0} + W_{int,it}^{S_t}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

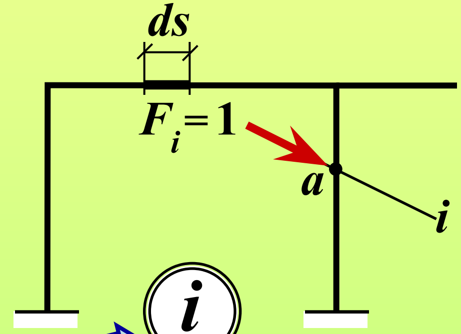
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

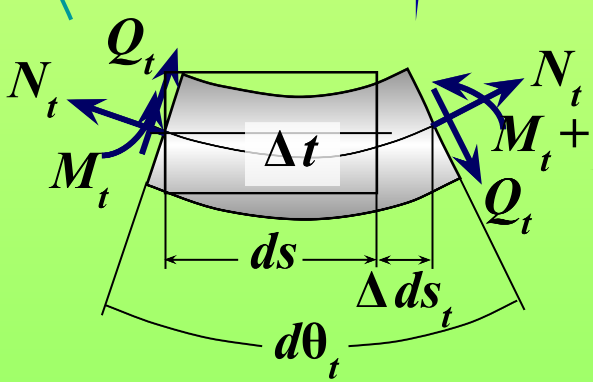
$$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$$
$$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$$



Равновесные состояния

$$\underbrace{W_{ext,ti}}_{=0} + W_{int,ti} = 0 \quad\Rightarrow\quad W_{int,ti} = 0$$

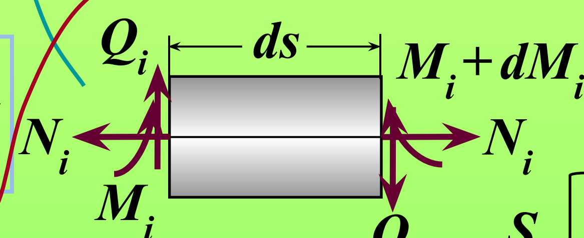
$$\underbrace{W_{ext,it}}_{F_i * \Delta_{it}} + W_{int,it} = 0 \quad\Rightarrow\quad \Delta_{it} = -W_{int,it}$$



Свободные (нестеснённые) температурные деформации

Силовые (в частном случае – упругие) деформации

$$\begin{cases} \Delta ds_t = \boxed{\Delta ds_t^0} + \boxed{\Delta ds_{N_t}} \\ d\theta_t = \boxed{d\theta_t^0} + \boxed{d\theta_{M_t}} \end{cases}$$



$$S_i \begin{cases} M_i \\ N_i \\ Q_i \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta_{it} = -W^0_{int,it}}$$

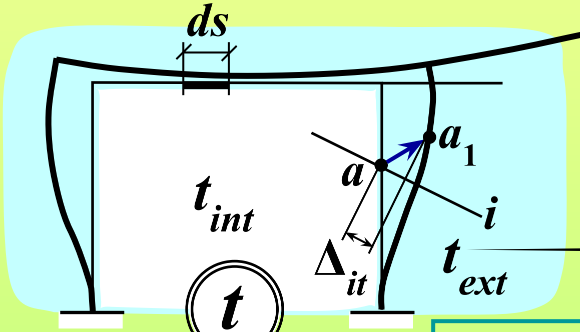
возможная работа внутренних сил i-го состояния на нестеснённых температурных деформациях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

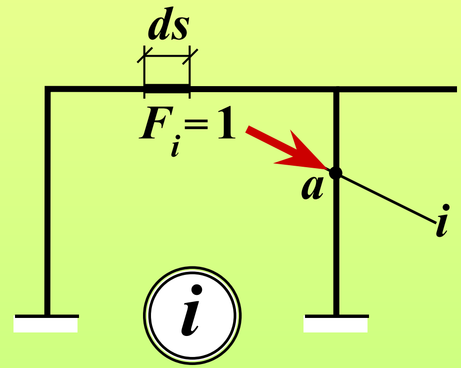
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

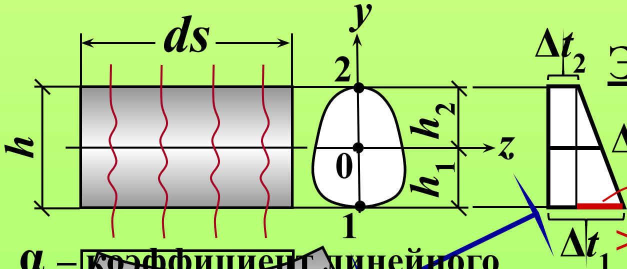
$$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$$
$$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$$



$$\Delta_{it} = -W^0_{int,it}$$

– возможная работа внутренних сил i-го состояния на свободных (нестеснённых) температурных деформациях Δds_t^0 и $d\theta_t^0$

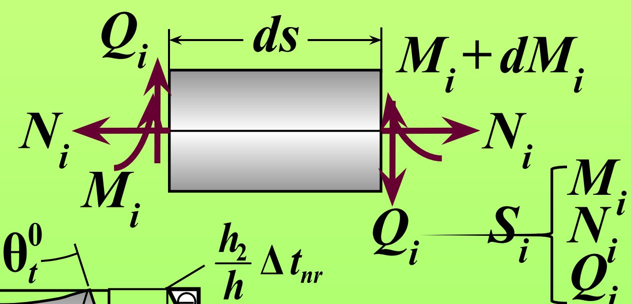
В случае стационарного теплового режима однородного стержня:



Эпюра Δt

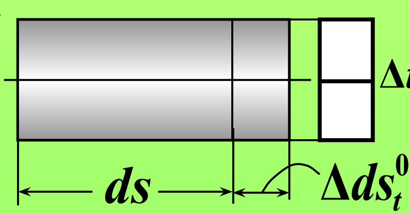
$$\Delta t_0 = \Delta t_2 + \frac{h_2}{h}\Delta t_{nr}$$

$$\Delta t_{nr} = \Delta t_1 - \Delta t_2$$



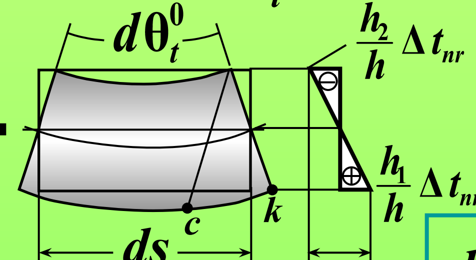
α – коэффициент линейного температурного расширения материала

$$\Delta ds_t^0 = \varepsilon_{0,t} \cdot ds = \alpha \cdot \Delta t_0 \cdot ds$$



Равномерное удлинение (укорочение)

+



Искривление

Деформация *сдвига* не учитывается (в случае постоянного сечения фактически отсутствует)

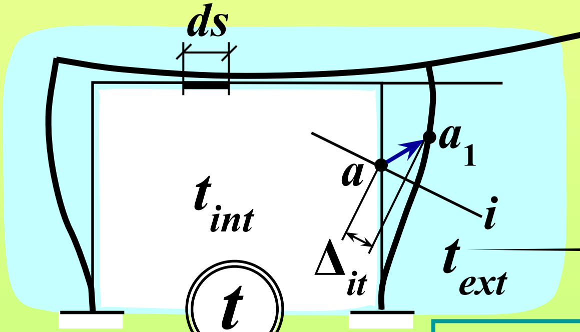
$$d\theta_t^0 = \varkappa_t ds = \frac{ck}{h}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

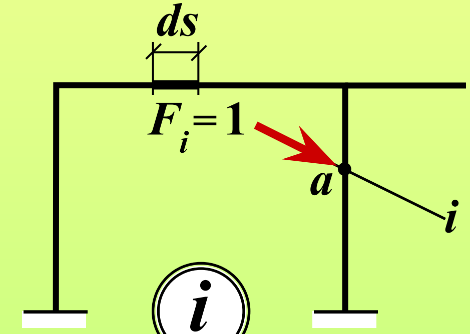
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

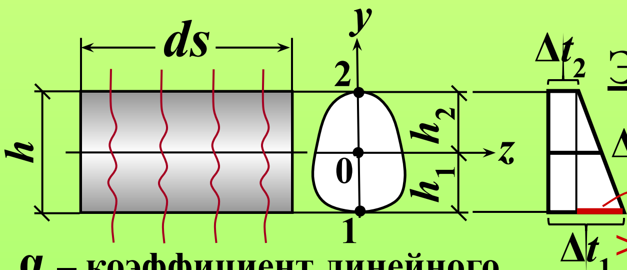
$$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$$
$$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$$



В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

$$\Delta_{it} = -W^0_{int,it}$$

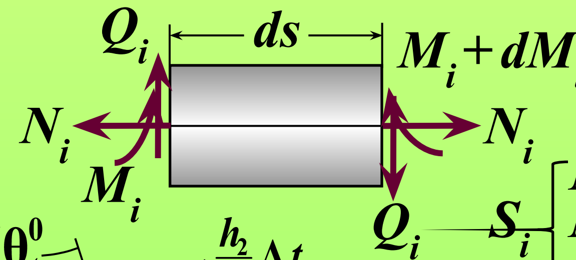
возможная работа внутренних сил i-го состояния на свободных (нестеснённых) температурных деформациях Δds_t^0 и $d\theta_t^0$



Эпюра Δt

$$\Delta t_0 = \Delta t_2 + \frac{h_2}{h}\Delta t_{nr}$$

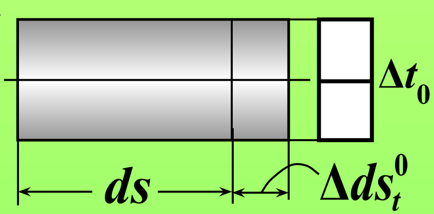
$$\Delta t_{nr} = \Delta t_1 - \Delta t_2$$



$$S_i \begin{cases} M_i \\ N_i \\ Q_i \end{cases}$$

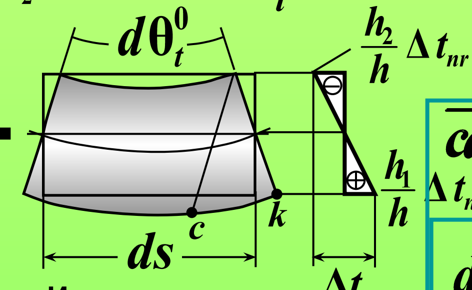
α – коэффициент линейного температурного расширения материала

$$\Delta ds_t^0 = \varepsilon_{0,t} \cdot ds = \boxed{\alpha \cdot \Delta t_0} \cdot ds$$



Равномерное удлинение (укорочение)

+



Искривление

$$\overline{ck} = ds \cdot \alpha \Delta t_{nr} = ds^0_{t(1)} - ds^0_{t(2)}$$

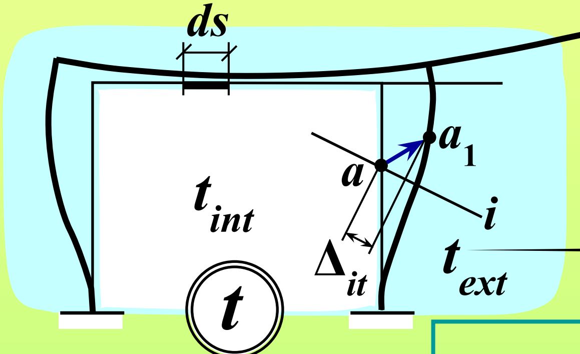
$$d\theta_t^0 = \frac{\alpha \cdot \Delta t_{nr}}{h} ds = \frac{\overline{ck}}{h}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

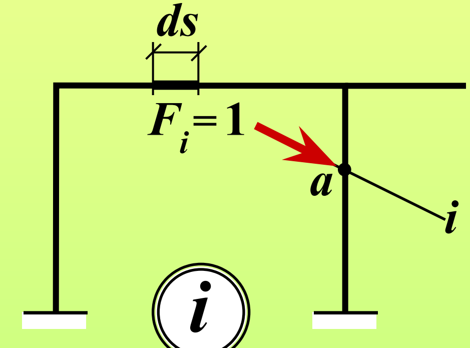
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

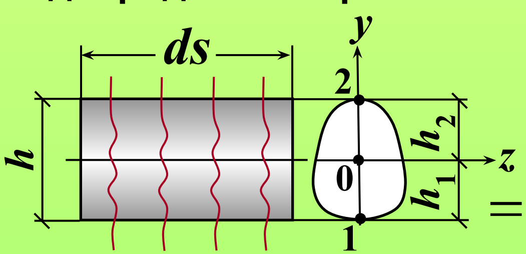
$$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$$
$$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$$



В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

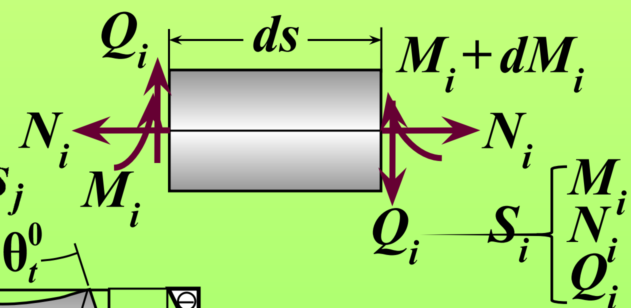
$$\Delta_{it} = -W^0_{int,it}$$

возможная работа внутренних сил i-го состояния на свободных (нестеснённых) температурных деформациях Δds^0_t и $d\theta^0_t$



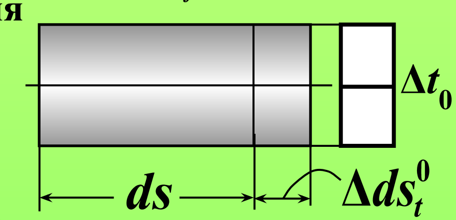
$$dW^0_{int,it} = -\left(N_i \cdot \Delta ds^0_t + M_i \cdot d\theta^0_t\right) = -\left(N_i \varepsilon_{0,t} + M_i \rho_t\right) ds$$

$$W^0_{int,it} = -\sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} \left(N_i \varepsilon_{0,t} + M_i \rho_t\right) ds_j$$



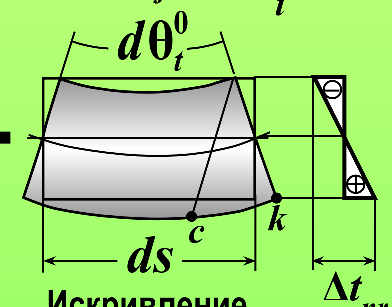
α – коэффициент линейного температурного расширения материала

$$\Delta ds^0_t = \varepsilon_{0,t} \cdot ds = \boxed{\alpha \cdot \Delta t_0} \cdot ds$$



Равномерное удлинение (укорочение)

+



Искривление

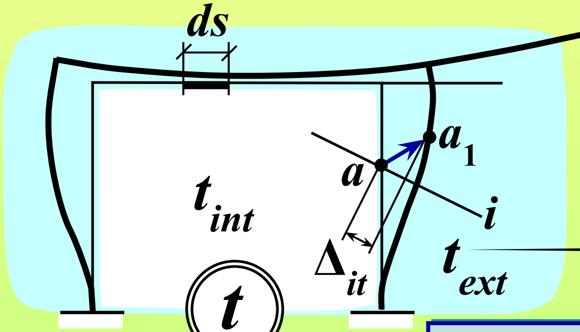
$$d\theta^0_t = \rho_t ds = \frac{\alpha \cdot \Delta t_{nr}}{h} ds$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

t_{init} – начальное поле температур

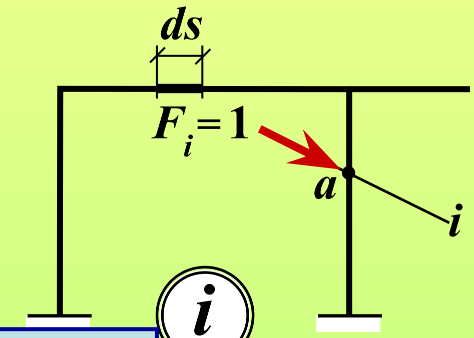
Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$

$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$

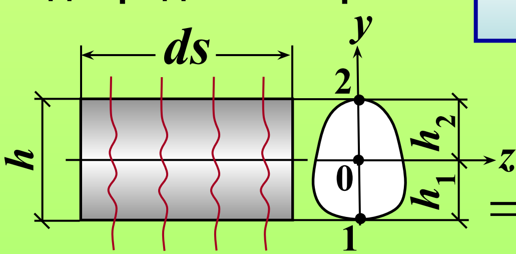


$$\Delta_{it} = \sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} \left(N_i \cdot \varepsilon_{0,t} + M_i \cdot \rho_t \right) ds_j$$

...енних сил *i*-го состояния ...нных) температурных ... θ_t^0

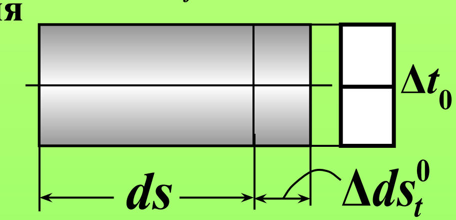
$$W^0_{int,it} = -\sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} \left(N_i \cdot \varepsilon_{0,t} + M_i \cdot \rho_t \right) ds_j$$

В случае стационарного теплового режима однородного стержня:



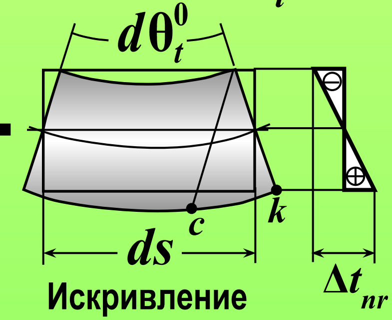
α – коэффициент линейного температурного расширения материала

$$\Delta ds_t^0 = \varepsilon_{0,t} \cdot ds = \boxed{\alpha \cdot \Delta t_0} \cdot ds$$

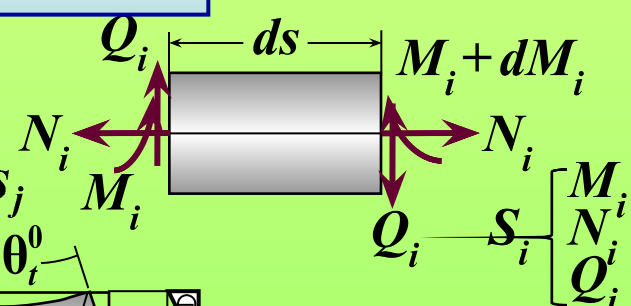


Равномерное удлинение (укорочение)

+



Искривление



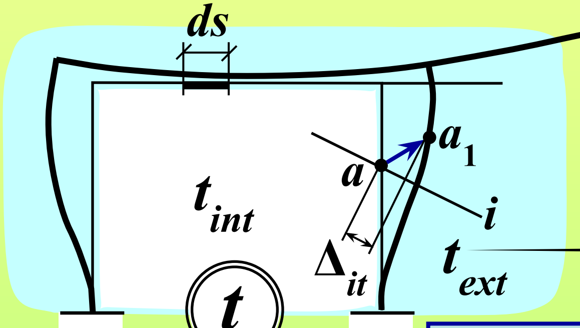
$$d\theta_t^0 = \rho_t ds = \frac{\alpha \cdot \Delta t_{nr}}{h} ds$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

t_{init} – начальное поле температур

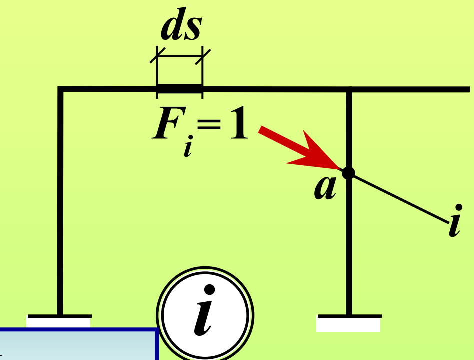
Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$

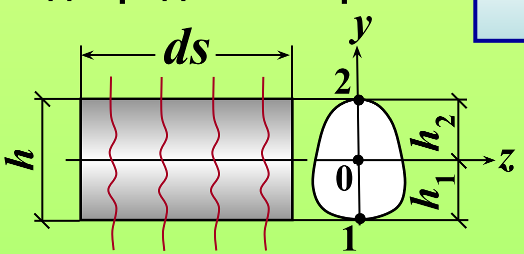
$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$



Вариант записи формулы М – М:

$$\Delta_{it} = \sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} (N_i \cdot \varepsilon_{0,t} + M_i \cdot \rho_t)\, ds_j$$

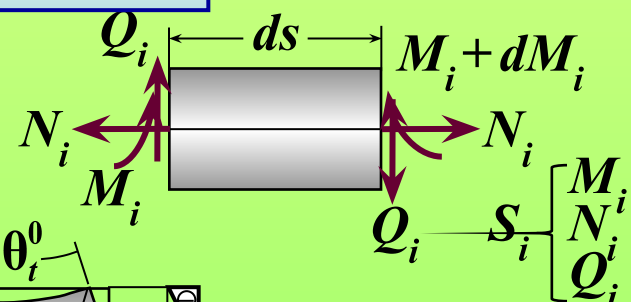
В случае стационарного теплового режима однородного стержня:



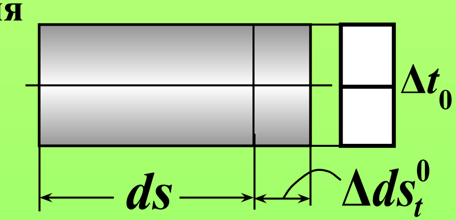
α – коэффициент линейного температурного расширения материала

$$\varepsilon_{0,t} = \alpha \cdot \Delta t_0$$

$$\rho_t = \frac{\alpha}{h} \cdot \Delta t_{nr}$$

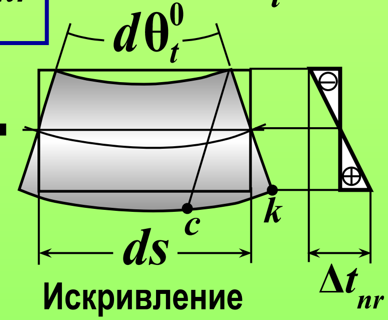


$$\Delta ds_t^0 = \varepsilon_{0,t} \cdot ds = \boxed{\alpha \cdot \Delta t_0} \cdot ds$$



Равномерное удлинение (укорочение)

+



Искривление

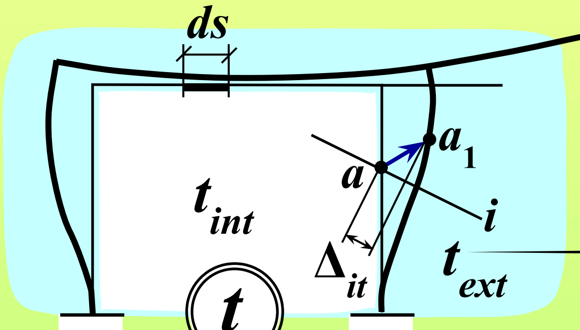
$$d\theta_t^0 = \rho_t ds = \frac{\alpha \cdot \Delta t_{nr}}{h} ds$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

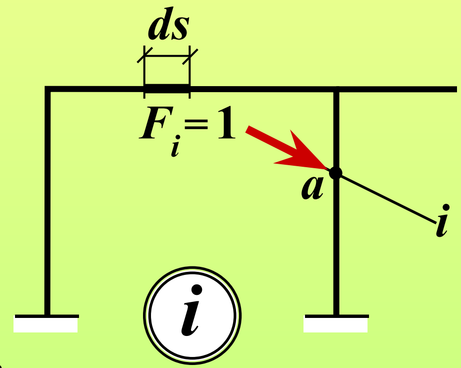
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы

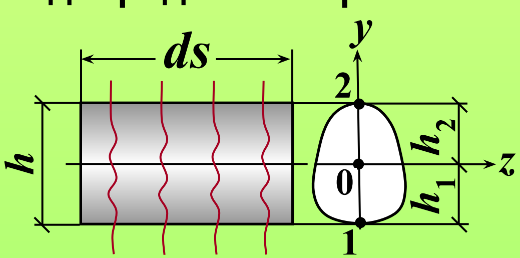


t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

$$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$$
$$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$$



В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

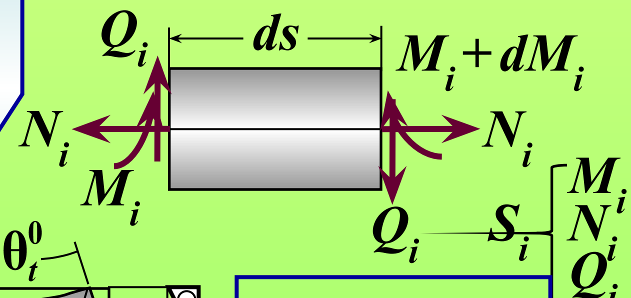


Вариант записи формулы М – М:

$$\Delta_{it} = \sum_{j=1}^{m_0} \int_{l_j} N_i \cdot \varepsilon_{0,t}\, ds_j + \sum_{j=1}^{m_{искр}} \int_{l_j} M_i \cdot \rho_t\, ds_j$$

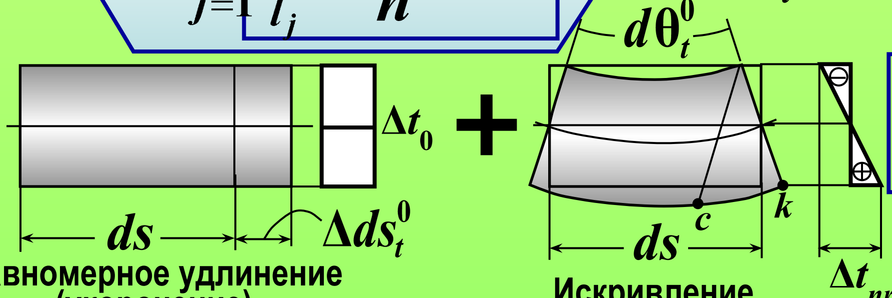
$$\varepsilon_{0,t} = \alpha \cdot \Delta t_0$$

$$\rho_t = \frac{\alpha}{h} \cdot \Delta t_{nr}$$



$$\varepsilon_{0,t} = \alpha \cdot \Delta t_0$$

$$\Delta ds_t^0 = \varepsilon_{0,t} \cdot ds = \boxed{\alpha \cdot \Delta t_0} \cdot ds$$



Равномерное удлинение (укорочение)

Искривление

$$\rho_t = \frac{\alpha}{h} \cdot \Delta t_{nr}$$

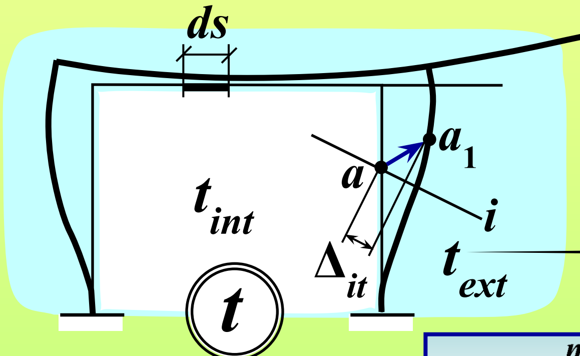
$$d\theta_t^0 = \rho_t\, ds = \frac{\alpha \cdot \Delta t_{nr}}{h} ds$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

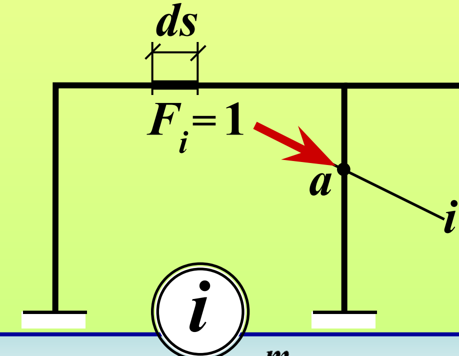
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

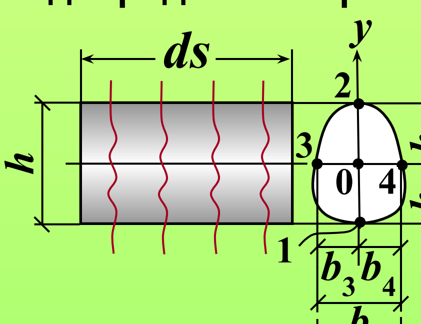
$$\Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init}$$
$$\Delta t_{int} = t_{int} - t_{init}$$



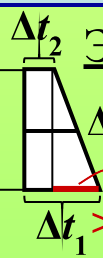
В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

Обобщение на случай пространственной температурной деформации:

$$\Delta_{it} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_{z,i} \cdot \rho_{z,t}\, ds_j + \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_{y,i} \cdot \rho_{y,t}\, ds_j + \sum_{j=1}^{m_0} \int_{l_j} N_i \cdot \varepsilon_{0,t}\, ds_j$$

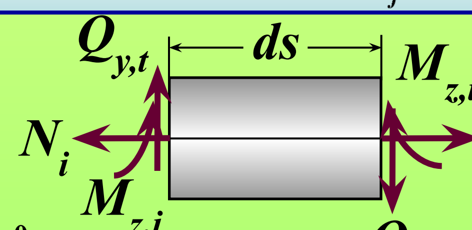


Эпюра Δt

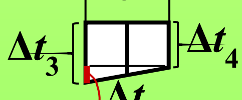


$$\Delta t_0 = \Delta t_2 + \frac{h_2}{h} \Delta t_{nr,\,y}$$

$$\Delta t_{nr,\,y} = \Delta t_1 - \Delta t_2$$

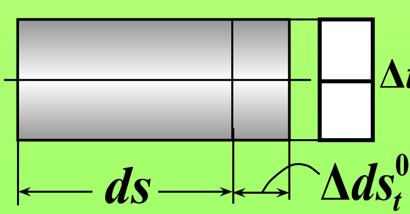


$$S_i \begin{cases} M_{z,i} \\ M_{y,i} \\ N_i \end{cases}$$



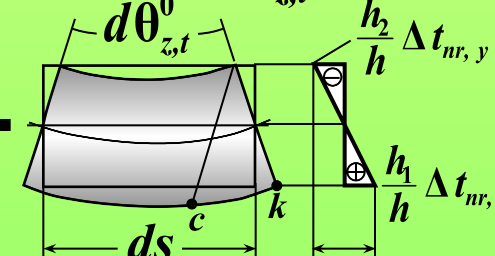
$$\Delta t_{nr,\,z} = \Delta t_3 - \Delta t_4$$

$$\boxed{\varepsilon_{0,t} = \alpha \cdot \Delta t_0}$$



Равномерное удлинение (укорочение)

+



Искривление

$$\boxed{\rho_{z,t} = \frac{\alpha}{h} \cdot \Delta t_{nr,\,y}}$$

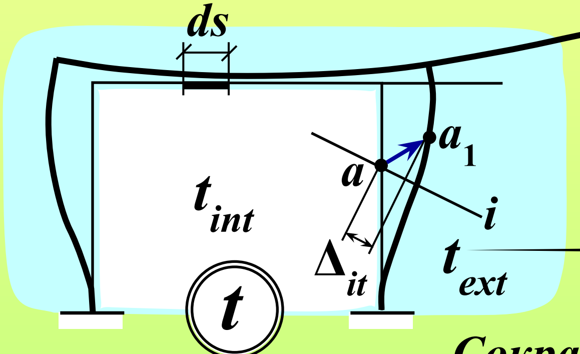
$$\boxed{\rho_{y,t} = \frac{\alpha}{b} \cdot \Delta t_{nr,\,z}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

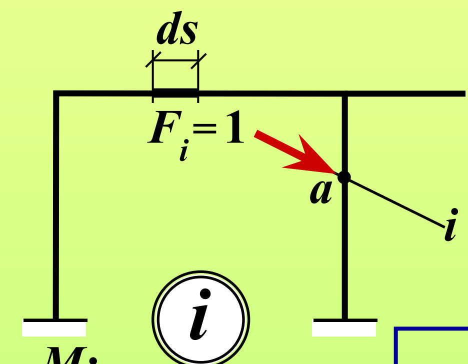
t_{init} – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



t_{int}, t_{ext} – рабочие (эксплуатационные) температуры

$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$

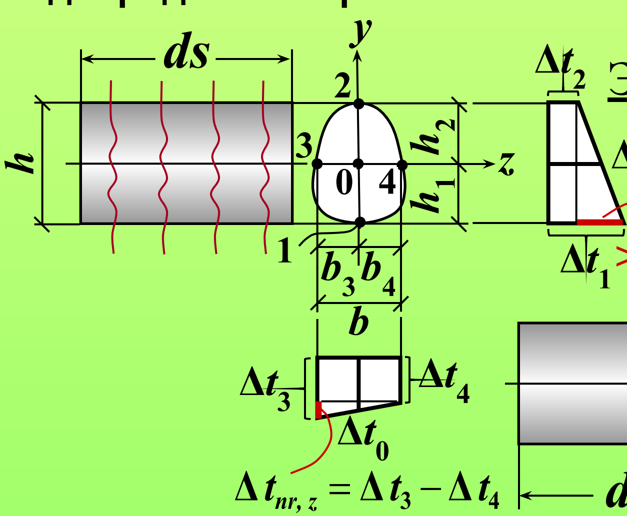


Сокращённая запись формулы М – М:

$$\Delta_{it} = \sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^{m_S} \int_{l_j} S_i \cdot \varepsilon^0_{S,t}\, ds_j$$

$$\varepsilon^0_{S,t} \begin{cases} \rho_{z,t} \\ \rho_{y,t} \\ \varepsilon_{0,t} \end{cases} \qquad S_i \begin{cases} M_{z,i} \\ M_{y,i} \\ N_i \end{cases}$$

В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

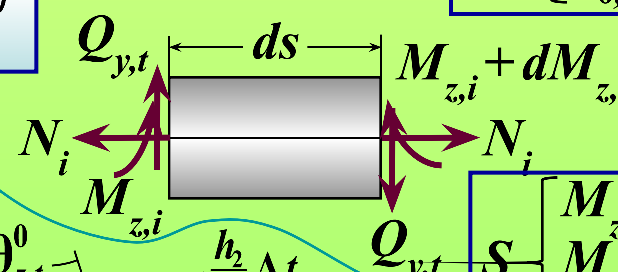


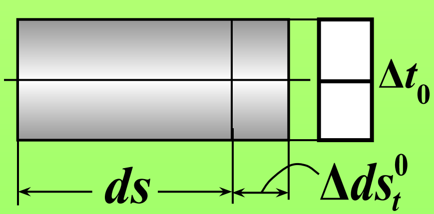
$$\Delta t_0 = \Delta t_2 + \frac{h_2}{h}\Delta t_{nr,\,y}$$

$$\Delta t_{nr,\,y} = \Delta t_1 - \Delta t_2$$

$$\Delta t_{nr,\,z} = \Delta t_3 - \Delta t_4$$

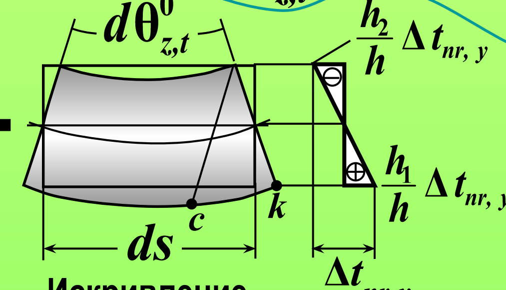
$$\boxed{\varepsilon_{0,t} = \alpha \cdot \Delta t_0}$$





Равномерное удлинение (укорочение)

\+

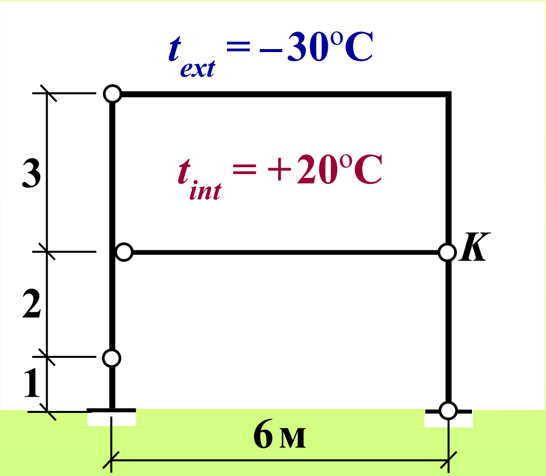


Искривление

$$\boxed{\rho_{z,t} = \frac{\alpha}{h} \cdot \Delta t_{nr,\,y}}$$

$$\boxed{\rho_{y,t} = \frac{\alpha}{b} \cdot \Delta t_{nr,\,z}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА



П р и м е р

Т р е б у е т с я: определить горизонтальное перемещение u_K узла *K* от изменения температуры при переходе от начального состояния конструкции с общей температурой $t_{init} = +15^oC$ к эксплуатационному тепловому режиму с наружной температурой $t_{ext} = -30^oC$ и внутренней (в объёме, ограниченном элементами рамы) $t_{int} = +20^oC$.

И с х о д н ы е д а н н ы е:

материал всех стержней рамы – сталь с коэффициентом температурного линейного расширения $\alpha = 12{*}10^{-6}\,(^oC)^{-1}$;
высоты сечений – ригеля $h_p = 50$ см, стоек $h_c = 30$ см
(сечения симметричные).

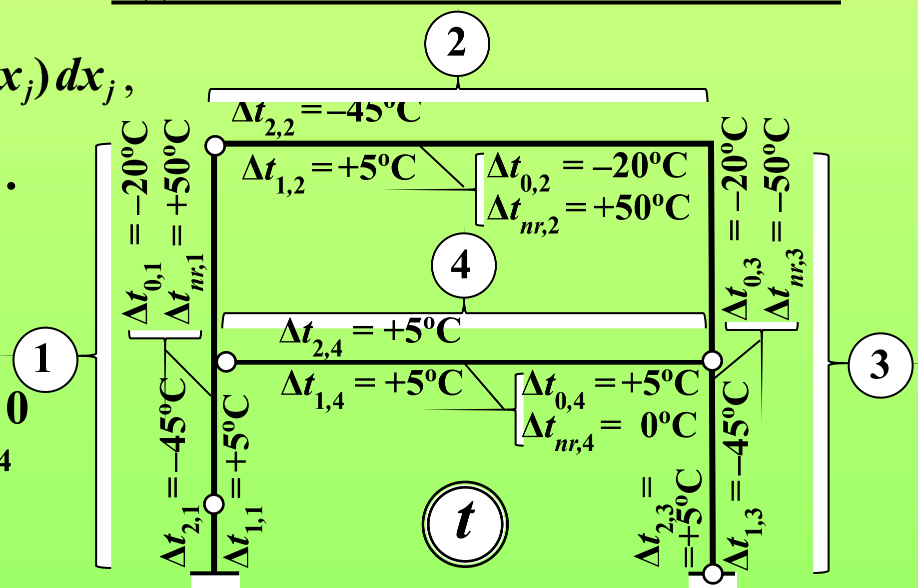
Р е ш е н и е:

1. Перемещение $u_K = \Delta_{1t}$ определяется по формуле:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_1(x_j)\cdot\rho_t(x_j)\,dx_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} N_1(x_j)\cdot\varepsilon_{0,t}(x_j)\,dx_j\,,$$

$$\rho_t(x_j) = \frac{\alpha}{h(x_j)}\cdot\Delta t_{nr}(x_j);\quad \varepsilon_{0,t}(x_j) = \alpha\cdot\Delta t_0(x_j)\,.$$

2а. Приращения температур элементов в действительном состоянии системы



2б. Температурные деформации стержней:

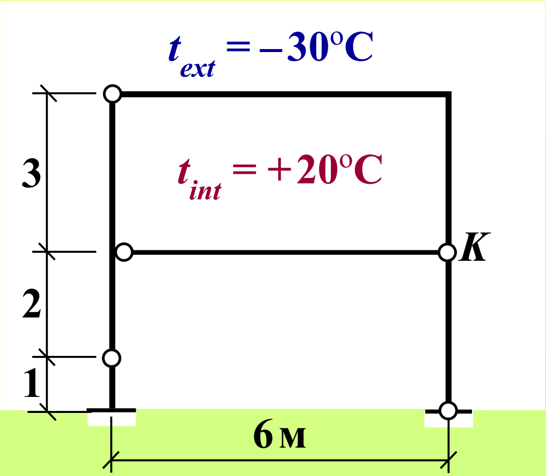
$\rho_{t,1} = -\rho_{t,3} = 12{*}10^{-6}{*}(+50)/0{,}3 = 20{*}10^{-4}\ (м^{-1})$

$\rho_{t,2} = 12{*}10^{-6}{*}(+50)/0{,}5 = 12{*}10^{-4}\ (м^{-1})$; $\rho_{t,4} = 0$

$\varepsilon_{0,t,1} = \varepsilon_{0,t,2} = \varepsilon_{0,t,3} = 12{*}10^{-6}{*}(-20) = -2{,}4{*}10^{-4}$

$\varepsilon_{0,t,4} = 12{*}10^{-6}{*}(+5) = 0{,}6{*}10^{-4}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА



П р и м е р

Т р е б у е т с я: определить горизонтальное перемещение u_K узла *K* от изменения температуры при переходе от начального состояния конструкции с общей температурой $t_{init} = +15^{o}C$ к эксплуатационному тепловому режиму с наружной температурой $t_{ext} = -30^{o}C$ и внутренней (в объёме, ограниченном элементами рамы) $t_{int} = +20^{o}C$.

И с х о д н ы е   д а н н ы е:

материал всех стержней рамы – сталь с коэффициентом температурного линейного расширения $\alpha = 12{*}10^{-6}\,(^{o}C)^{-1}$;
высоты сечений – ригеля $h_p = 50$ см, стоек $h_c = 30$ см
(сечения симметричные).

Р е ш е н и е:

1. Перемещение $u_K = \Delta_{1t}$ определяется по формуле:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_1(x_j)\cdot\rho_t(x_j)\,dx_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} N_1(x_j)\cdot\varepsilon_{0,t}(x_j)\,dx_j\,,$$

$$\rho_t(x_j) = \frac{\alpha}{h(x_j)}\cdot\Delta t_{nr}(x_j); \quad \varepsilon_{0,t}(x_j) = \alpha\cdot\Delta t_0(x_j)\,.$$

2б. Температурные деформации стержней:

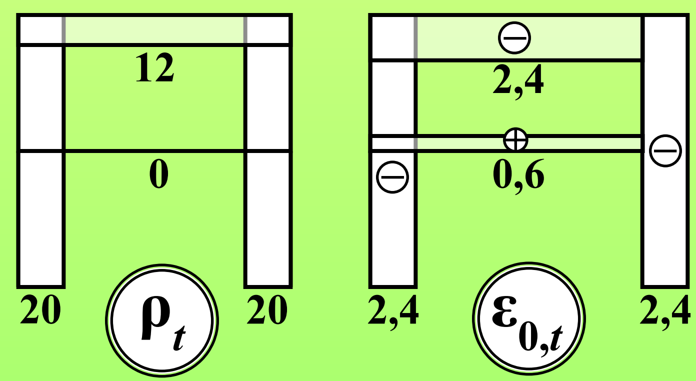
$\rho_{t,1} = -\rho_{t,3} = 12{*}10^{-6}{*}(+50)/0{,}3 = 20{*}10^{-4}$ (м$^{-1}$)

$\rho_{t,2} = 12{*}10^{-6}{*}(+50)/0{,}5 = 12{*}10^{-4}$ (м$^{-1}$); $\rho_{t,4} = 0$

$\varepsilon_{0,t,1} = \varepsilon_{0,t,2} = \varepsilon_{0,t,3} = 12{*}10^{-6}{*}(-20) = -2{,}4{*}10^{-4}$

$\varepsilon_{0,t,4} = 12{*}10^{-6}{*}(+5) = 0{,}6{*}10^{-4}$

2в. Эпюры температурных деформаций в действительном состоянии системы

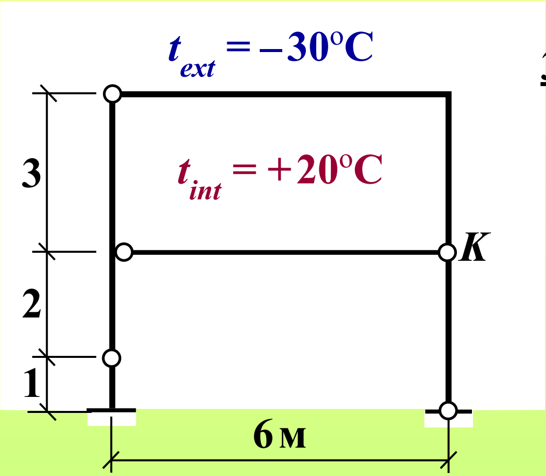


(10^{-4} м$^{-1}$)   (10^{-4})

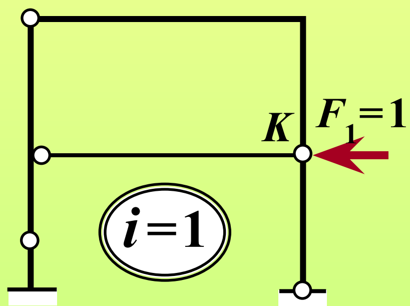
Правило: эпюра ρ_t строится на «более теплых» волокнах

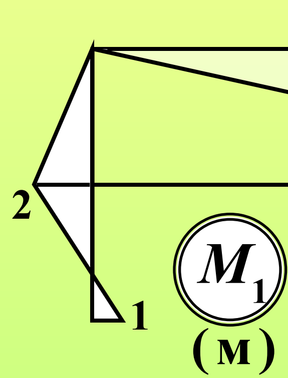
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

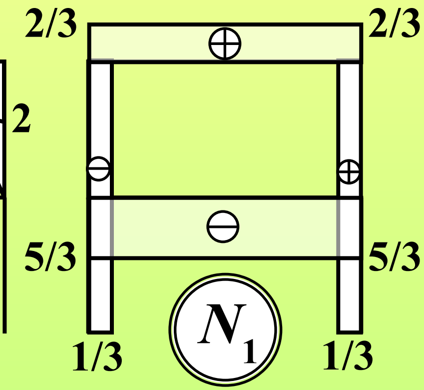
П р и м е р



3. Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы







***Р е ш е н и е*:**

1. Перемещение $u_K = \Delta_{1t}$ определяется по формуле:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_1(x_j)\cdot\rho_t(x_j)\,dx_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} N_1(x_j)\cdot\varepsilon_{0,t}(x_j)\,dx_j\,,$$

$$\rho_t(x_j) = \frac{\alpha}{h(x_j)}\cdot\Delta t_{nr}(x_j); \quad \varepsilon_{0,t}(x_j) = \alpha\cdot\Delta t_0(x_j)\,.$$

4. Вычисление перемещения по формуле М – М:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M}\Omega_{M_i}\rho_{t,i} + \sum_{j=1}^{m_N}\Omega_{N_i}\varepsilon_{0,t} \quad (m_M\ ;\ m_N = 4)$$

2б. Температурные деформации стержней:

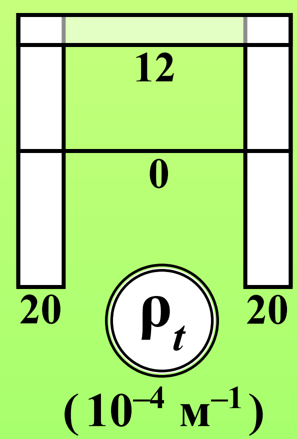
$$\rho_{t,1} = \rho_{t,3} = 12*10^{-6}*(+50)/0{,}3 = 20*10^{-4}\ (м^{-1})$$

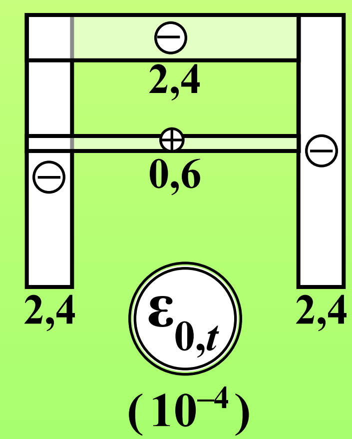
$$\rho_{t,2} = 12*10^{-6}*(+50)/0{,}5 = 12*10^{-4}\ (м^{-1});\ \ \rho_{t,4} = 0$$

$$\varepsilon_{0,t,1} = \varepsilon_{0,t,2} = \varepsilon_{0,t,3} = 12*10^{-6}*(-20) = -2{,}4*10^{-4}$$

$$\varepsilon_{0,t,4} = 12*10^{-6}*(+5) = 0{,}6*10^{-4}$$

2в. Эпюры температурных деформаций в действительном состоянии системы

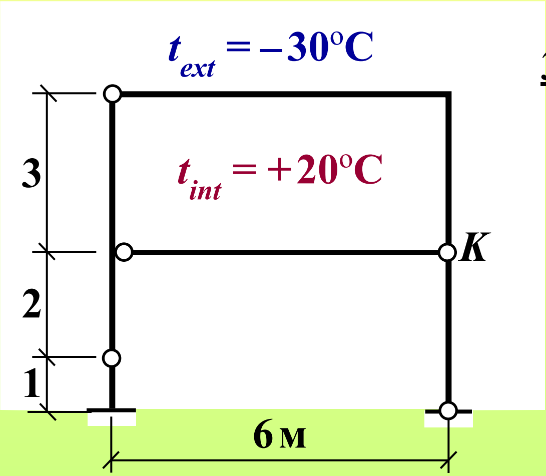




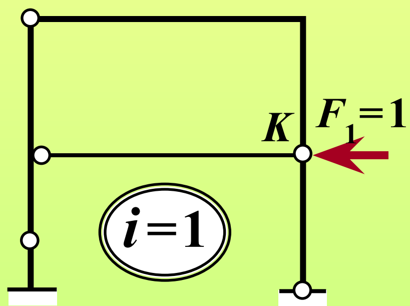
Правило: **эпюра ρ_t строится на «более теплых» волокнах**

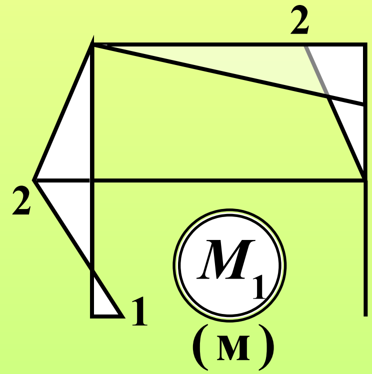
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

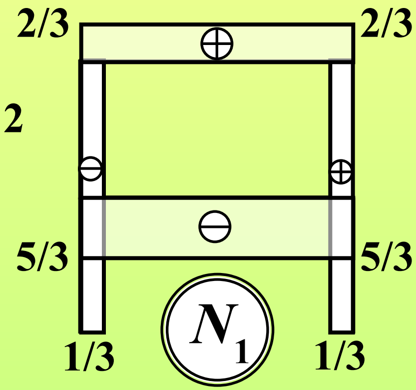
П р и м е р



3. Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы







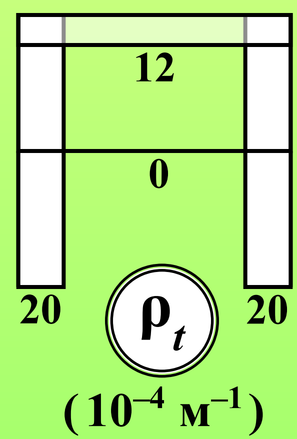
Р е ш е н и е:

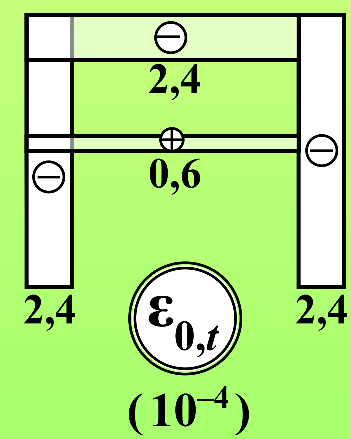
1. Перемещение $u_K = \Delta_{1t}$ определяется по формуле:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_1(x_j)\cdot \rho_t(x_j)\, dx_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} N_1(x_j)\cdot \varepsilon_{0,t}(x_j)\, dx_j\,,$$

$$\rho_t(x_j) = \frac{\alpha}{h(x_j)}\cdot \Delta t_{nr}(x_j); \quad \varepsilon_{0,t}(x_j) = \alpha\cdot \Delta t_0(x_j)\,.$$

2в. Эпюры температурных деформаций в действительном состоянии системы





4. Вычисление перемещения по формуле М – М:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \Omega_{M_i}\cdot \rho_t + \sum_{j=1}^{m_N} \Omega_{N_i}\cdot \varepsilon_{0,t} \quad (m_M = 4;\ m_N = 4)$$

$$\Delta_{1t} = u_K = 10^{-4}\cdot \left[\frac{1-2}{2}\cdot 3\cdot (+20) + \frac{(-2)\cdot 3}{2}\cdot (+20) + \frac{2\cdot 6}{2}\cdot (+12) + \right.$$

$$\left. + \frac{(-2)\cdot 3}{2}\cdot (-20) + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 6\cdot (-2{,}4) + \frac{2}{3}\cdot 6\cdot (-2{,}4) + \frac{1}{3}\cdot 6\cdot (-2{,}4) + \left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 6\cdot (+0{,}6)\right] = 10^{-4}\cdot (42 - 15{,}6) = 26{,}4\cdot 10^{-4}\ (м)$$

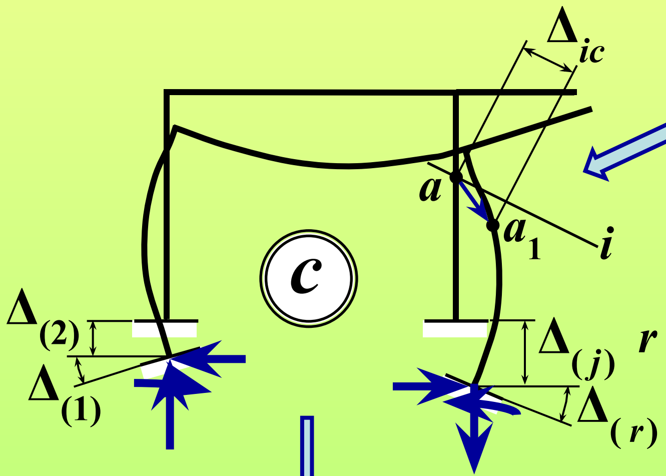
Правило: эпюра ρ_t строится на «более теплых» волокнах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СМЕЩЕНИЙ СВЯЗЕЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

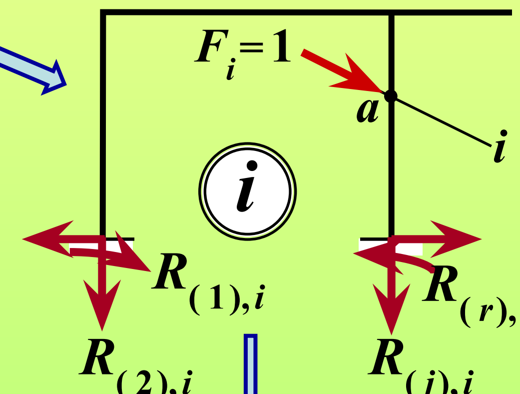
Действительное состояние системы с кинематическими возмущениями (смещениями связей)

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы

Равновесные состояния



r – число компонентов заданных смещений связей



$$\underbrace{W_{ext,ci}}_{\| \atop 0} + W_{int,ci} = 0$$

$$\boxed{W_{int,ci} = 0}$$

$$W_{int,ic} = -\sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} \frac{\widehat{S_i S_c}}{C_S} ds_j = -W_{int,ci}$$

$$W_{ext,ic} + W_{int,ic} = 0$$

$$F_i \cdot \Delta_{ic} + \sum_{j=1}^{r} R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}$$

Правило знаков для единичных реакций смещаемых связей:

реакция $R_{(j),i}$ положительная, если её возможная работа на перемещении $\Delta_{(j)}$ положительная (*иначе*: векторы $R_{(j),i}$ и $\Delta_{(j)}$ направлены в одну и ту же сторону)

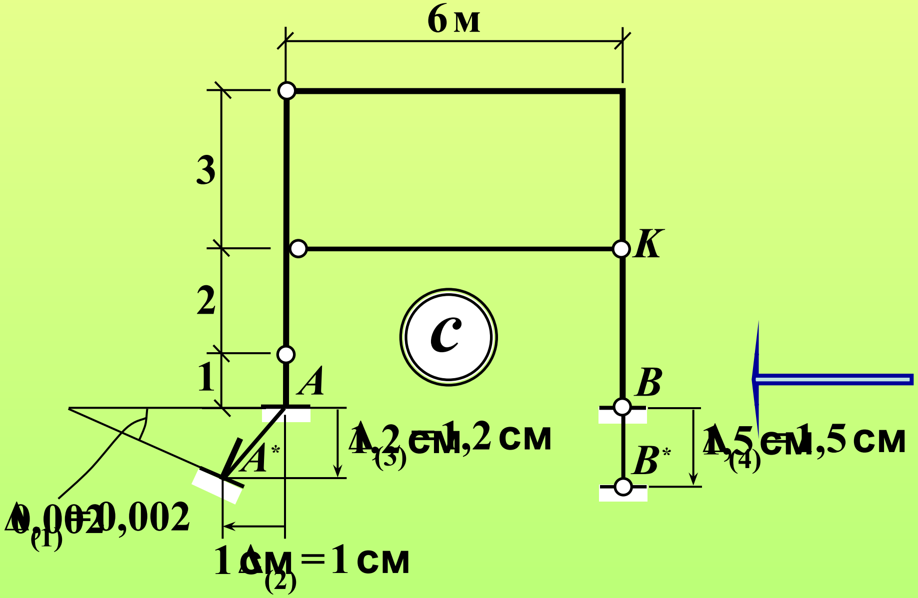
$$\boxed{\Delta_{ic} = -\sum_{j=1}^{r} R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)} - W_{int,ic}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СМЕЩЕНИЙ СВЯЗЕЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

П р и м е р

2. Действительное состояние системы с заданными смещениями связей

Т р е б у е т с я:
определить горизонтальное перемещение u_K узла K от углового и линейных смещений опор A и B.

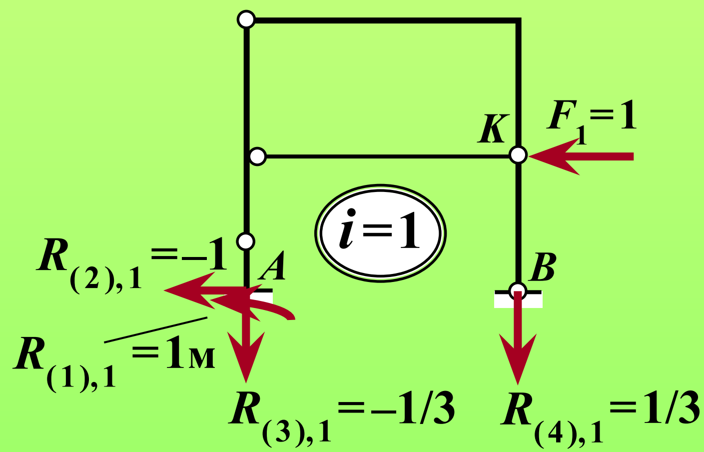


Р е ш е н и е:
1. Перемещение $u_K = \Delta_{1c}$ определяется по формуле:

$$\Delta_{1c} = -\sum_{j=1}^{r} R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}\ , \ \text{где}\ \ r = 4$$

Нумерация компонентов смещений связей

3. Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



4. Вычисление перемещения по формуле М – М:

$$u_K = \Delta_{1c} = -\sum_{j=1}^{4} R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)} =$$

$$= -\left[(+1\,\text{м}) \cdot 0{,}002 + (-1) \cdot 0{,}01\,\text{м} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}012\,\text{м} + \right.$$

$$\left. + \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}015\,\text{м}\right] = 0{,}007\,\text{м}$$

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА МАКСВЕЛЛА – МОРА ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

$$\Delta_{i\Sigma} = \Delta_{iF} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m_{M_z}} \int_{l_j} \frac{M_{z,i}\, M_{z,F}}{EI_z} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_y}} \int_{l_j} \frac{M_{y,i}\, M_{y,F}}{EI_y} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Mt}} \int_{l_j} \frac{M_{t,i}\, M_{t,F}}{GI_t} ds_j +$$

Изгиб; Изгиб; Кручение

$$+ \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} \frac{N_i\, N_F}{EA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_y}} \int_{l_j} k_{\tau y} \frac{Q_{y,i}\, Q_{y,F}}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_z}} \int_{l_j} k_{\tau z} \frac{Q_{z,i}\, Q_{z,F}}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^{u} \frac{R_{j,i}\, R_{j,F}}{c_j} +$$

Растяжение/сжатие; Сдвиг; Сдвиг; Деформации упругих связей

$$+ \sum_{j=1}^{m_{M_z}} \int_{l_j} M_{z,i} \cdot \rho_{z,t}\, ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_y}} \int_{l_j} M_{y,i} \cdot \rho_{y,t}\, ds_j + \sum_{j=1}^{m_0} \int_{l_j} N_i \cdot \varepsilon_{0,t}\, ds_j -$$

Температурные искривления; Температурные искривления; Продольные температурные деформации

$$- \sum_{j=1}^{r} R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}$$

Смещения связей

Сокращённая форма записи:

$$\Delta_{i\Sigma} = \Delta_{iF} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} =$$

$$= \sum_{\text{по}\, S} \sum_{j=1}^{m_S} \int_{l_j} \frac{S_i\, S_F}{C_S} ds_j + \sum_{j=1}^{u} \frac{R_{j,i}\, R_{j,F}}{c_j} + \sum_{\text{по}\, S} \sum_{j=1}^{m_S} \int_{l_j} S_i \cdot \varepsilon^0_{S,t}\, ds_j - \sum_{j=1}^{r} R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}$$

От силовых воздействий (нагрузок); От изменения температуры; От смещений связей

К о н т р о л ь н ы е   в о п р о с ы

*(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы;
для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*) ;
для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши
и выбрать «Перейти к слайду 30»)*

1. **Частные случаи формулы Максвелла – Мора (ФМ – М) для перемещений от силовых воздействий: а) в случае плоской стержневой системы;** (2)
   б) для стержневых систем разных типов. (2)
2. **Алгоритм вычисления перемещения по ФМ – М.** (3)
3. **Как истолковываются знаки «+» или «–» в результате вычисления перемещения по ФМ – М?** (3)
4. **Что означает термин «перемножение эпюр»?** (3)
5. **Формулировка правила Верещагина для «перемножения эпюр». Каково необходимое условие применимости правила Верещагина?** (7)
6. **Как используется правило Верещагина для «перемножения эпюр» в случае, когда «грузовая» эпюра – параболическая общего вида? (разложение на простые составляющие – *самостоятельно*)**
7. **Формула Симпсона, условие её применимости для «перемножения эпюр».** (8)
8. **В каких случаях вычисление интегралов в ФМ – М по формуле Симпсона даёт точный результат?** (8)
9. **Формула Максвелла – Мора для перемещения от изменения температуры, варианты её записи.** (18 – 22)
10. **От каких характеристик температурного режима и параметров системы зависит температурное перемещение?** (15)
11. **Как вычисляются нестеснённые температурные деформации (кривизна и относительная продольная деформация) в ФМ – М для перемещения от изменения температуры?** (19)

---

*) **Только в режиме «Показ слайдов»**

К о н т р о л ь н ы е   в о п р о с ы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы;
для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках);*
для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши
и выбрать «Перейти к слайду 31»)

12. **Почему в ФМ – М для температурного перемещения отсутствуют характеристики жёсткости элементов системы?** (12)
13. **Правила знаков для температурных деформаций. Как стоится эпюра кривизн?** (24)
14. **Формула Максвелла – Мора для перемещения от кинематических воздействий (смещений связей).** (27)
15. **Правило знаков для единичных реакций смещаемых связей.** (27)
16. **Универсальная формула Максвелла – Мора для перемещений линейно деформируемых пространственных стержневых систем (полная развернутая запись).** (29)
17. **Сокращённая запись универсальной формулы Максвелла – Мора, смысл её составляющих.** (29)

---

*) **Только в режиме «Показ слайдов»**