Строительная механика. Часть I

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

(индекс состояния системы)

Перемещения

- линейные Δ_A , u_A , v_A
- угловые θ_A , θ_{ds}

Обобщённое обозначение перемещения:

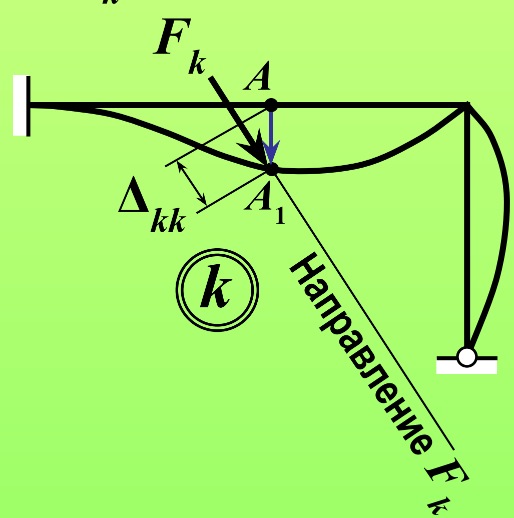
$$\Delta_{ik}$$

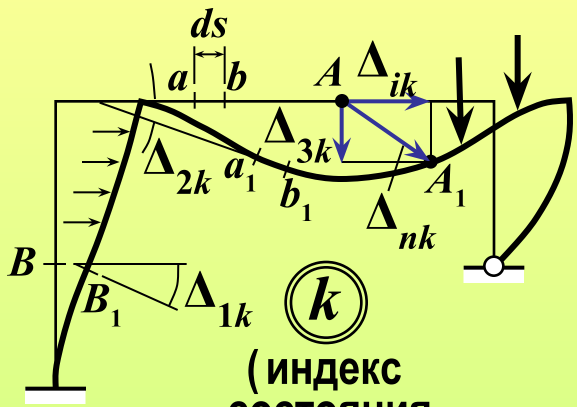
Символ типа, места и направления перемещения (по схеме)

Символ причины, вызвавшей перемещение (индекс состояния системы с соответствующим воздействием)

Читается: перемещение такой-то точки (сечения) по такому-то направлению от k–го воздействия.

Если $i = k$, то Δ_{kk} – *собственное* перемещение (перемещение, вызванное *силовым* воздействием F_k , по его направлению)





k (индекс состояния системы)

Перемещения

- линейные Δ_A, u_A, v_A
- угловые θ_A, θ_{ab}

Обобщённое обозначение перемещения:

$$\Delta_{ik}$$

Символ типа, места и направления перемещения (по схеме)

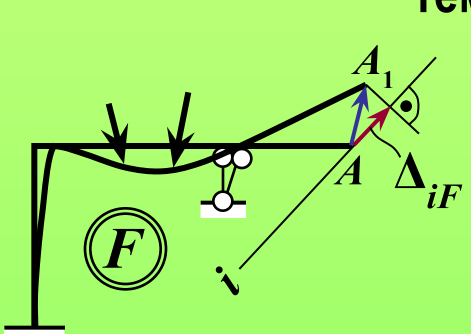
Символ причины, вызвавшей перемещение (индекс состояния системы с соответствующим воздействием)

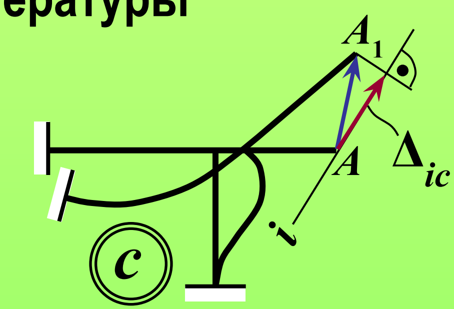
Конкретизация индекса состояния системы по виду воздействия:

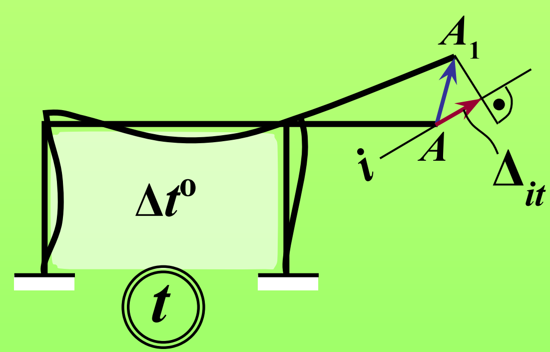
k →

- **F** силовое воздействие (нагрузки) — Δ_{iF}
- **c** кинематическое воздействие (смещения связей) — Δ_{ic}
- **t** температурное (тепловое) воздействие – изменение температуры — Δ_{it}

Δ_{iF}, Δ_{ic}, Δ_{it} → $\Delta_{i\Sigma}$ – от комбинаций воздействий F, c, t







i – направление искомого перемещения

Единичные перемещения

Перемещения (линейные, угловые), возникающие от равных единице *механических* воздействий (силовых или кинематических), называются *единичными перемещениями*.

i – направление искомого перемещения

Обозначение единичных перемещений:

От единичного силового воздействия — δ_{ik}

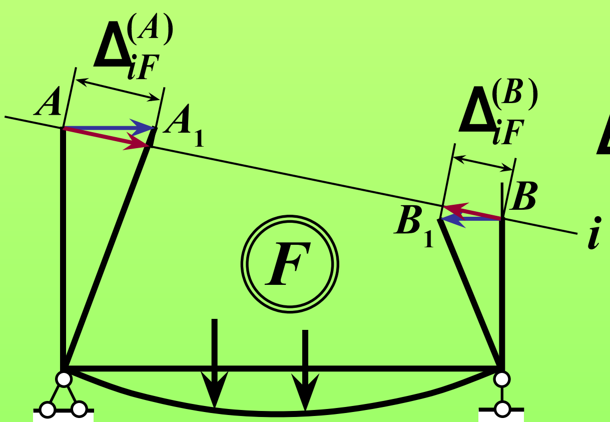
От единичного кинематического воздействия — δ'_{ik}

Символ типа, места и направления перемещения (по схеме)

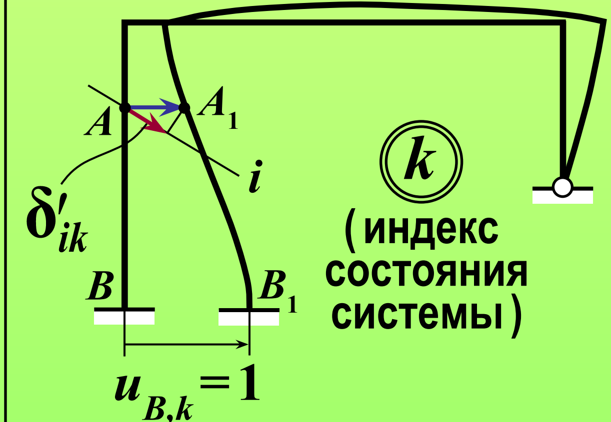
Символ причины, вызвавшей перемещение (индекс состояния системы с соответствующим единичным воздействием)

Групповое перемещение

Пример: относительное (взаимное) линейное перемещение точек A и B по направлению линии AB.



$$\Delta_{iF} = \Delta_{iF}^{(A)} + \Delta_{iF}^{(B)}$$



МЕТОД МАКСВЕЛЛА – МОРА
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

(метод вспомогательных единичных нагрузок)

J.C. Maxwell (1864), O. Mohr (1874)

ИДЕЯ МЕТОДА МАКСВЕЛЛА – МОРА (ММ-М)

В дополнение к *действительному* состоянию рассчитываемой системы (при заданных воздействиях) рассматривается *вспомогательное* (фиктивное) состояние с *единичным силовым воздействием* по направлению искомого перемещения; силовые факторы вспомогательного единичного состояния затем используются, вместе с соответствующими характеристиками действительного состояния, для вычисления искомого перемещения.

МЕТОД МАКСВЕЛЛА – МОРА
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ
(метод вспомогательных единичных нагрузок)

Правило задания вспомогательного единичного воздействия

**Во вспомогательном (фиктивном) состоянии системы,
рассматриваемом *независимо (отдельно)*
от действительного состояния,
в месте, где определяется искомое перемещение,
по его направлению прикладывается численно равное
единице силовое воздействие, тип которого
(сила, момент либо группа сил и/или моментов)
соответствует типу определяемого перемещения
(линейное или угловое, одиночное либо обобщённое).**

**В общем случае вспомогательное (фиктивное)
единичное воздействие – обобщённое, соответствующее
определяемому обобщённому (групповому) перемещению.**

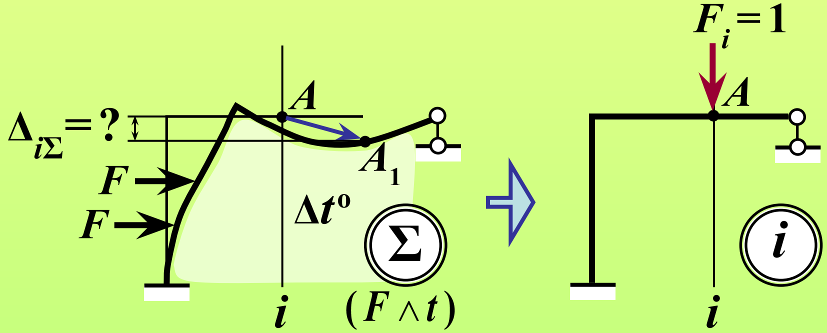
Кинематическое свойство вспомогательного единичного воздействия:
**оно (воздействие) таково, что способно совершить работу
на определяемом перемещении.**

МЕТОД МАКСВЕЛЛА – МОРА
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ
(метод вспомогательных единичных нагрузок)

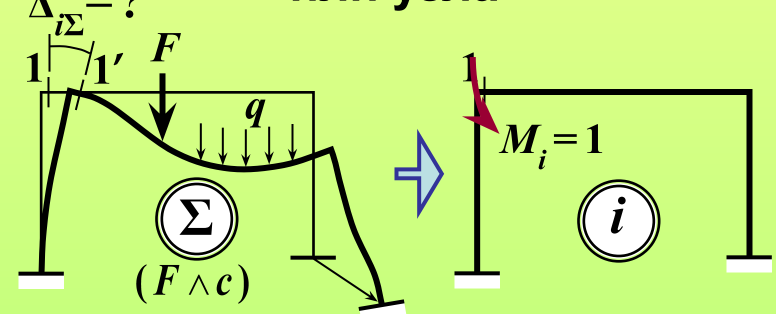
Типовые случаи вспомогательных единичных состояний

а) при определении одиночных перемещений

Линейное перемещение точки (A)



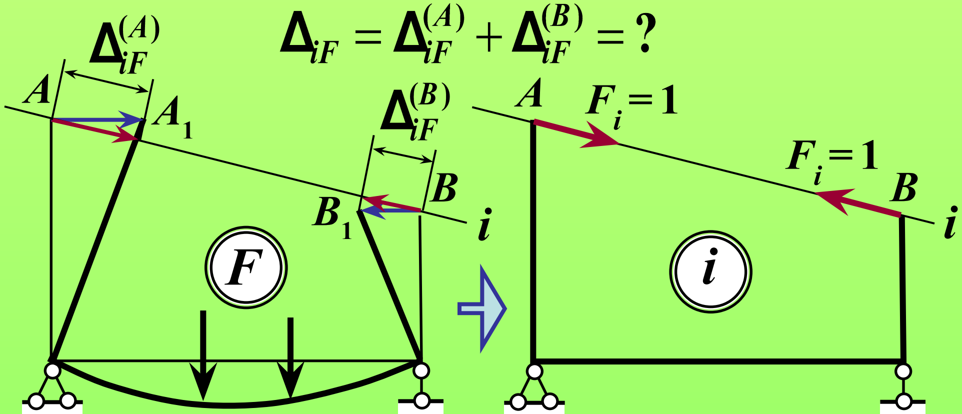
Угол поворота сечения (1) или узла



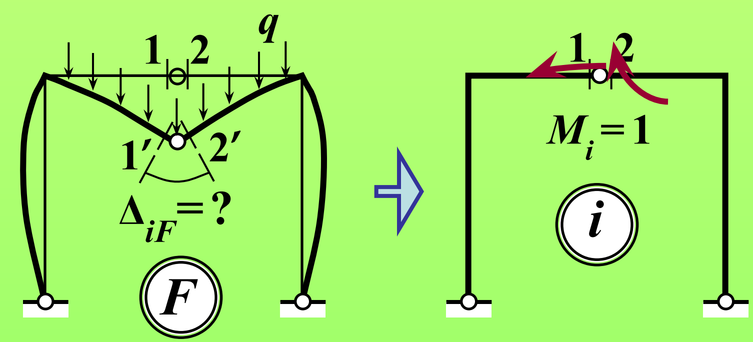
б) при определении групповых перемещений

Относительное (взаимное) линейное перемещение точек (A и B)

$$\Delta_{iF} = \Delta_{iF}^{(A)} + \Delta_{iF}^{(B)} = ?$$



Относительный (взаимный) угол поворота сечений (1 и 2)

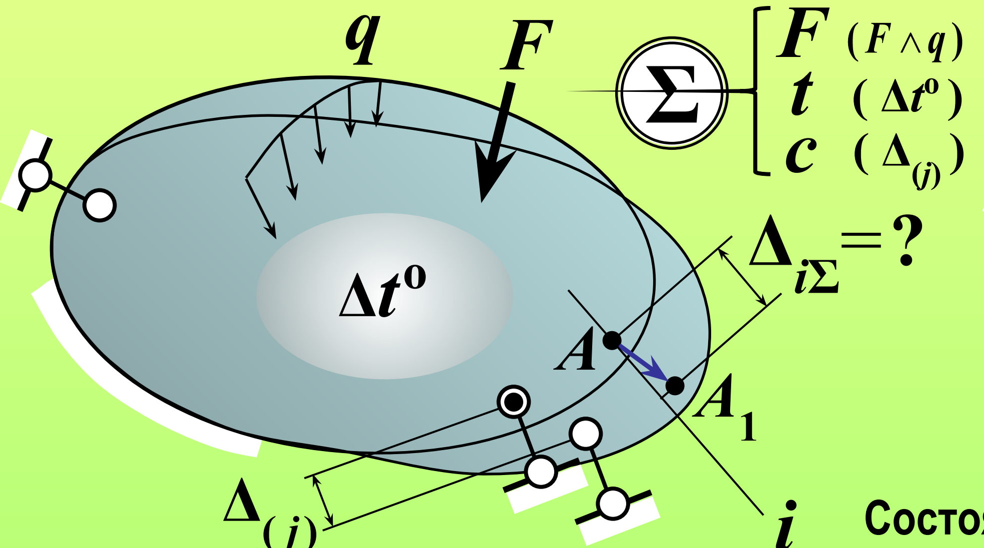


МЕТОД МАКСВЕЛЛА – МОРА
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

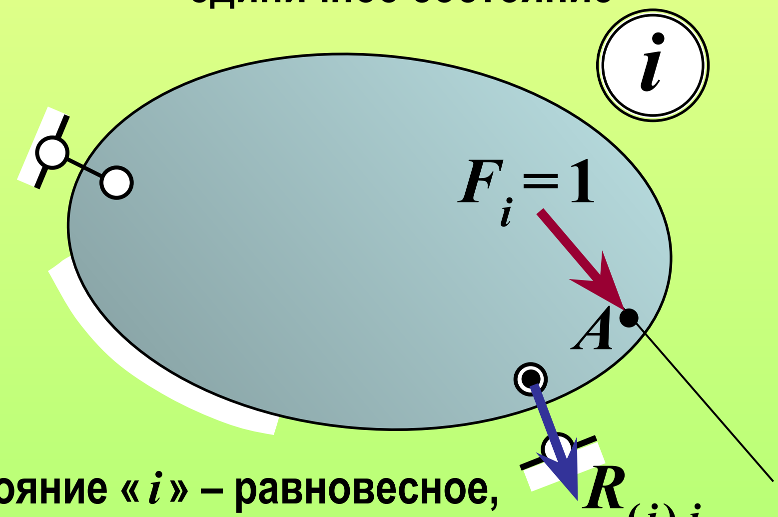
(метод вспомогательных единичных нагрузок)

Базовая формула ММ–М
в общем случае деформируемой системы

Действительное состояние системы



Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние



Состояние « i » – равновесное, его внутренние и внешние силы удовлетворяют *принципу Лагранжа*:

$$W_{ext,ik} + W_{int,ik} = 0,$$

$$W_{ext,i\Sigma} + W_{int,i\Sigma} = 0,$$

i – символ состояния, внешние и внутренние силы которого совершают возможную работу;

k – индекс виртуальных перемещений.

Σ – индекс виртуальных перемещений.

В случае *линейно деформируемой системы* (ЛДС) перемещения действительного состояния могут быть приняты в качестве виртуальных, т.е. $k = \Sigma$

Из уравнения возможных работ, с учётом того, что $F_i = 1$:

$$W_{ext,i\Sigma} = F_i \cdot \Delta_{i\Sigma} + R_{(j),i}\Delta_{(j)}$$

При одновременных смещениях связей $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \ldots, \Delta_{(r)}$:

$$W_{ext,i\Sigma} = F_i \cdot \Delta_{i\Sigma} + \sum_{j=1}^{r} R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}$$

$$\Delta_{i\Sigma} = -W_{int,i\Sigma} - \sum_{j=1}^{r} R_{(j),i}\Delta_{(j)}$$

базовая формула ММ–М

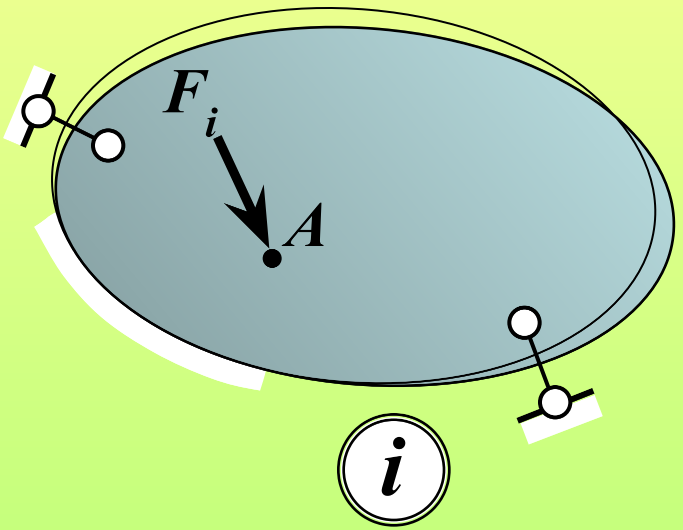
ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

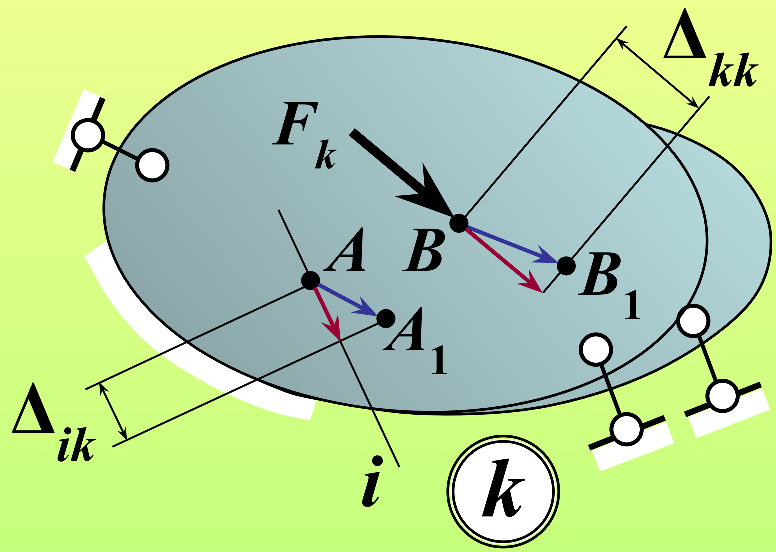
Возможной работой **внешних (внутренних) сил называется работа, совершаемая этими силами на перемещениях (деформациях), вызванных другими воздействиями (реальными или виртуальными).**

Действительной работой **внешних (внутренних) сил называется работа, совершаемая ими на перемещениях (деформациях), вызванных самими этими силами.**

Потенциальная энергия деформации **– это энергия, накапливаемая в материале системы в процессе его деформирования заданными воздействиями и возвращаемая в виде механической работы при разгрузке системы (материала).**

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ



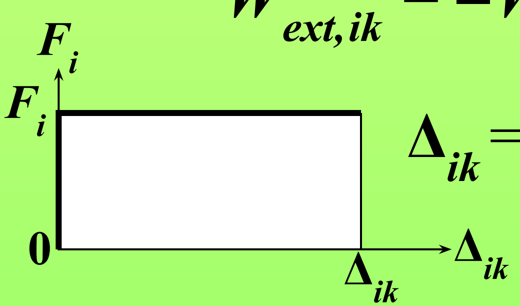


Δ_{kk} – собственное перемещение

Δ_{ik} – побочное перемещение

Возможные работы внешних и внутренних сил i–го состояния на перемещениях k–го состояния:

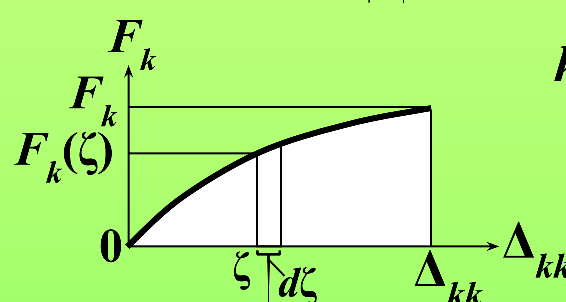
$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik}$$



$$\Delta_{ik} = \mathrm{inv}(F_i)$$

$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik} = F_i * \Delta_{ik}$$

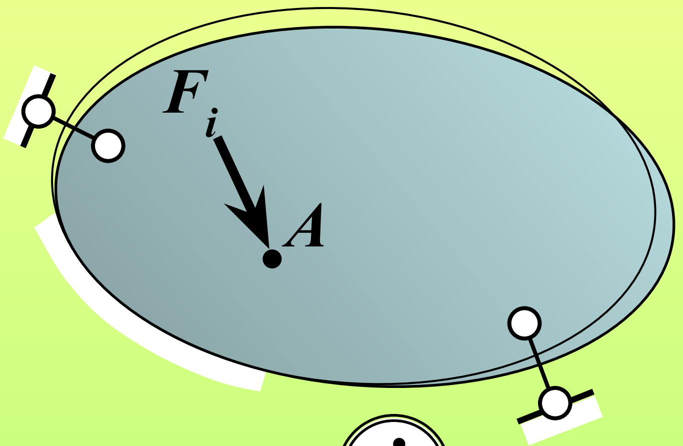
Действительная работа внешних сил k–го состояния:

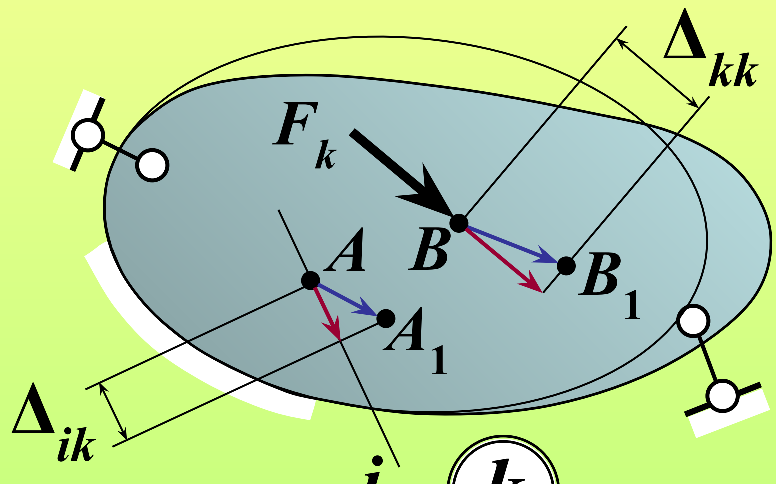


$$0 < \eta < 1$$

$$W_{ext,kk} = \int_0^{\Delta_{kk}} F_k(\zeta)\, d\zeta = \eta F_k \Delta_{kk}$$

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ



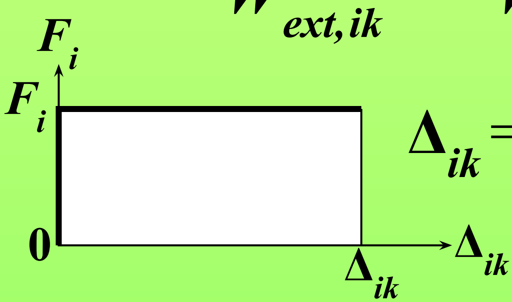


Возможные работы внешних и внутренних сил i–го состояния на перемещениях k–го состояния:

$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik}$$

Δ_{kk} – собственное перемещение

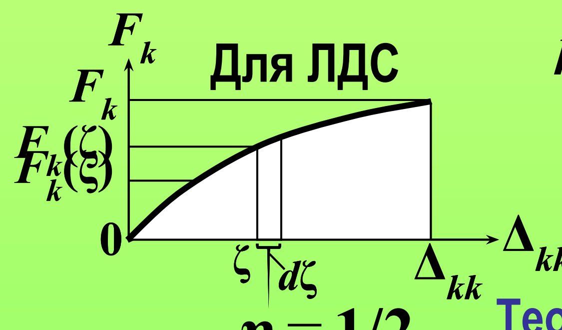
Δ_{ik} – побочное перемещение



$$\Delta_{ik} = \mathrm{inv}(F_i)$$

$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik} = F_i * \Delta_{ik}$$

Действительная работа внешних сил k–го состояния:



$$W_{ext,kk} = U = \int_0^{\Delta_{kk}} F_k(\zeta)\, d\zeta = \eta F_k \Delta_{kk}$$

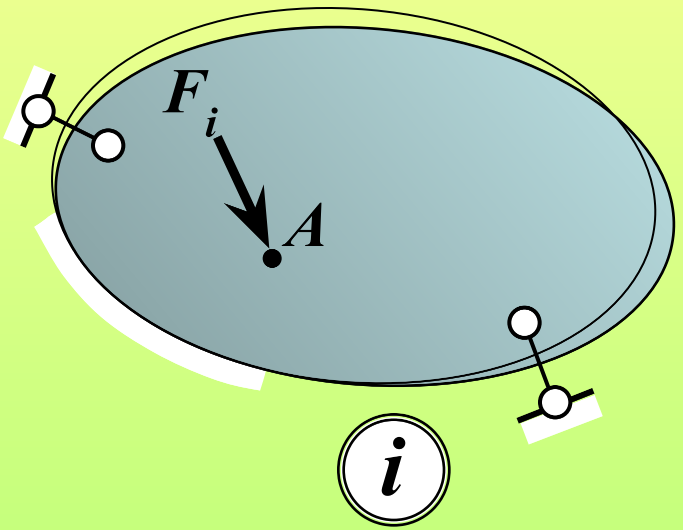
$$W_{kk} = \frac{1}{2} F_k \Delta_{kk}$$

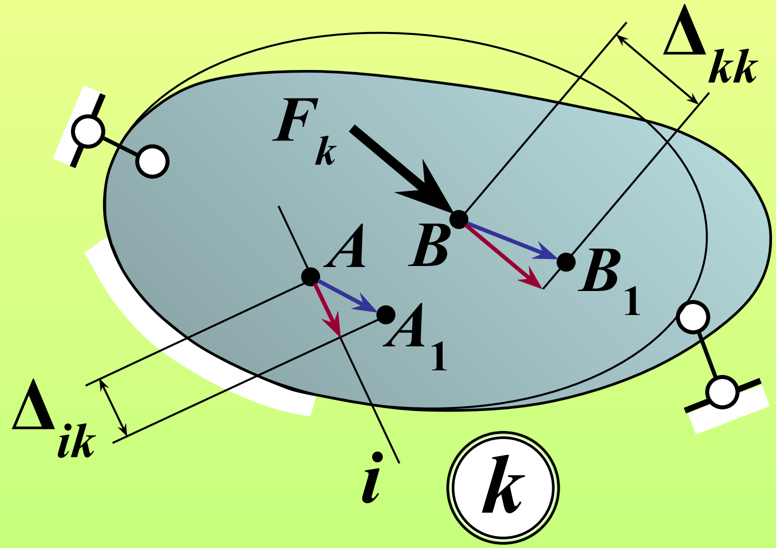
$\eta = 1/2$

U – ПЭУД

Теорема Клапейрона (B.P.E. Clapeyron, 1834)

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ





Возможные работы внешних и внутренних сил i–го состояния на перемещениях k–го состояния:

$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik} = F_i{}^{*}\Delta_{ik}$$

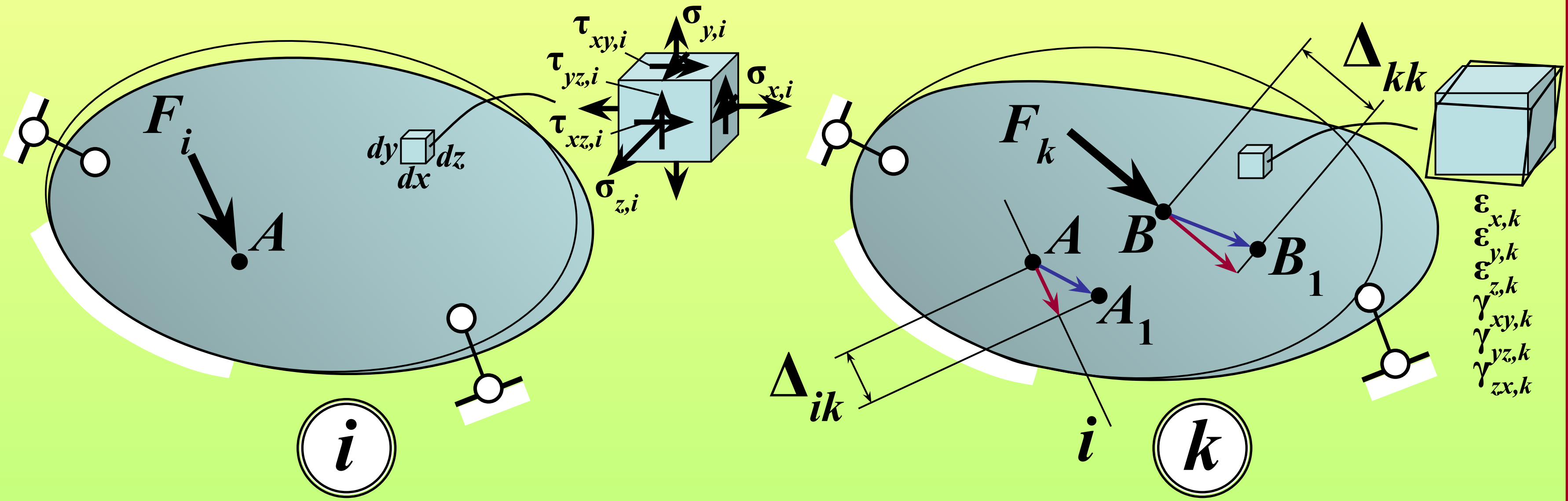
Действительная работа внешних и внутренних сил k–го состояния, потенциальная энергия упругой деформации (ПЭУД) ЛДС:

$$W_{ext,kk} = U = -W_{int,kk} = \frac{1}{2} F_k \Delta_{kk}$$

Теорема Клапейрона

Выражения возможных и действительных работ внешних и внутренних сил и ПЭУД через внешние силовые факторы и перемещения (через обобщённые нагрузки и обобщённые перемещения).

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ



Выражения возможных и действительных работ внешних и внутренних сил и ПЭУД через внутренние силовые факторы (напряжения) и деформации

$$W_{ext,\,ik} = -W_{int,\,ik} =$$

$$= \int\limits_V \left(\sigma_{x,i} \cdot \varepsilon_{x,k} + \sigma_{y,i} \cdot \varepsilon_{y,k} + \sigma_{z,i} \cdot \varepsilon_{z,k} + \tau_{xy,i} \cdot \gamma_{xy,k} + \tau_{yz,i} \cdot \gamma_{yz,k} + \tau_{zx,i} \cdot \gamma_{zx,k} \right) dV$$

$$W_{ext,\,kk} = -W_{int,\,kk} = U =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_V \left(\sigma_{x,k} \cdot \varepsilon_{x,k} + \sigma_{y,k} \cdot \varepsilon_{y,k} + \sigma_{z,k} \cdot \varepsilon_{z,k} + \tau_{xy,k} \cdot \gamma_{xy,k} + \tau_{yz,k} \cdot \gamma_{yz,k} + \tau_{zx,k} \cdot \gamma_{zx,k} \right) dV$$

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных и действительных работ внешних и внутренних сил и ПЭУД через внутренние силовые факторы (напряжения) и деформации

$$W_{ext,\,ik} = -W_{int,\,ik} =$$

$$= \int_V \left(\sigma_{x,i} \cdot \varepsilon_{x,k} + \sigma_{y,i} \cdot \varepsilon_{y,k} + \sigma_{z,i} \cdot \varepsilon_{z,k} + \tau_{xy,i} \cdot \gamma_{xy,k} + \tau_{yz,i} \cdot \gamma_{yz,k} + \tau_{zx,i} \cdot \gamma_{zx,k} \right) dV$$

$$W_{ext,\,kk} = -W_{int,\,kk} = U =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \left(\sigma_{x,k} \cdot \varepsilon_{x,k} + \sigma_{y,k} \cdot \varepsilon_{y,k} + \sigma_{z,k} \cdot \varepsilon_{z,k} + \tau_{xy,k} \cdot \gamma_{xy,k} + \tau_{yz,k} \cdot \gamma_{yz,k} + \tau_{zx,k} \cdot \gamma_{zx,k} \right) dV$$

Физические зависимости, связывающие деформации k–го состояния с напряжениями (для линейно деформируемого изотропного тела, с учётом температурной составляющей)

$$\varepsilon_{x,k} = \left[\sigma_{x,k} - \nu \left(\sigma_{y,k} + \sigma_{z,k} \right) \right] / E + \alpha \cdot \Delta t; \ldots; \varepsilon_{z,k} = \left[\sigma_{z,k} - \nu \left(\sigma_{x,k} + \sigma_{y,k} \right) \right] / E + \alpha \cdot \Delta t;$$

$$\gamma_{xy,k} = \tau_{xy,k} / G; \ldots; \gamma_{zx,k} = \tau_{zx,k} / G; \ G = E / \left[2 \left(1 + \nu \right) \right]$$

$$W_{ext,\,ik} = -W_{int,\,ik} =$$

$$= \int_V \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{x,i} \cdot \sigma_{x,k} + \sigma_{y,i} \cdot \sigma_{y,k} + \sigma_{z,i} \cdot \sigma_{z,k} - \nu \left[\sigma_{x,i} \left(\sigma_{y,k} + \sigma_{z,k} \right) + \sigma_{y,i} \left(\sigma_{z,k} + \sigma_{x,k} \right) + \sigma_{z,i} \left(\sigma_{x,k} + \sigma_{y,k} \right) \right] + 2 \left(1 + \nu \right) \left(\tau_{xy,i} \cdot \tau_{xy,k} + \tau_{yz,i} \cdot \tau_{yz,k} + \tau_{zx,i} \cdot \tau_{zx,k} \right) + E\alpha \cdot \Delta t \left(\sigma_{x,i} + \sigma_{y,i} + \sigma_{z,i} \right) \right\} dV$$

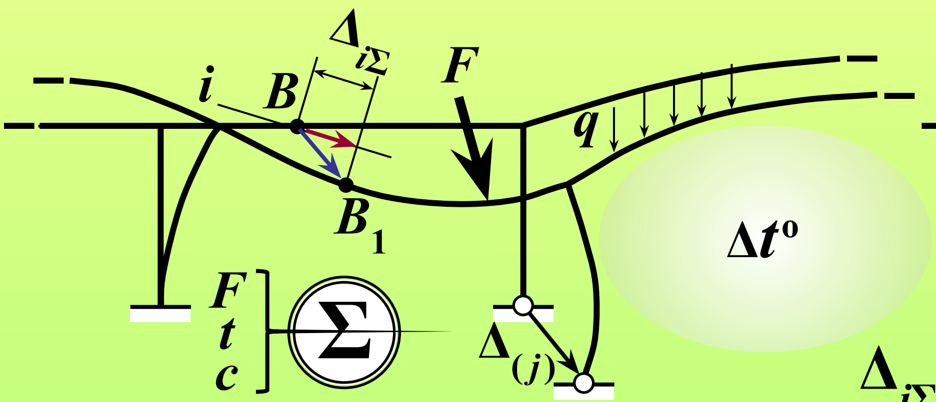
$$W_{ext,\,kk} = U = -W_{int,\,kk} =$$

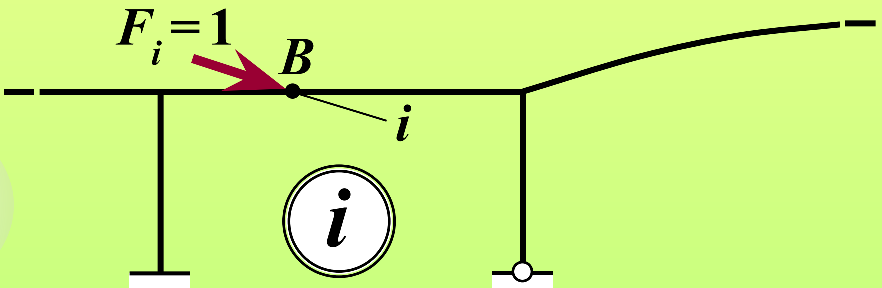
$$= \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{E} \left[\sigma^2_{x,k} + \sigma^2_{y,k} + \sigma^2_{z,k} - 2\nu \left(\sigma_{x,k} \cdot \sigma_{y,k} + \sigma_{y,k} \cdot \sigma_{z,k} + \sigma_{z,k} \cdot \sigma_{x,k} \right) + 2 \left(1 + \nu \right) \left(\tau^2_{xy,k} + \tau^2_{yz,k} + \tau^2_{zx,k} \right) + E\alpha \cdot \Delta t \left(\sigma_{x,k} + \sigma_{y,k} + \sigma_{z,k} \right) \right] dV$$

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Вспомогательное единичное состояние





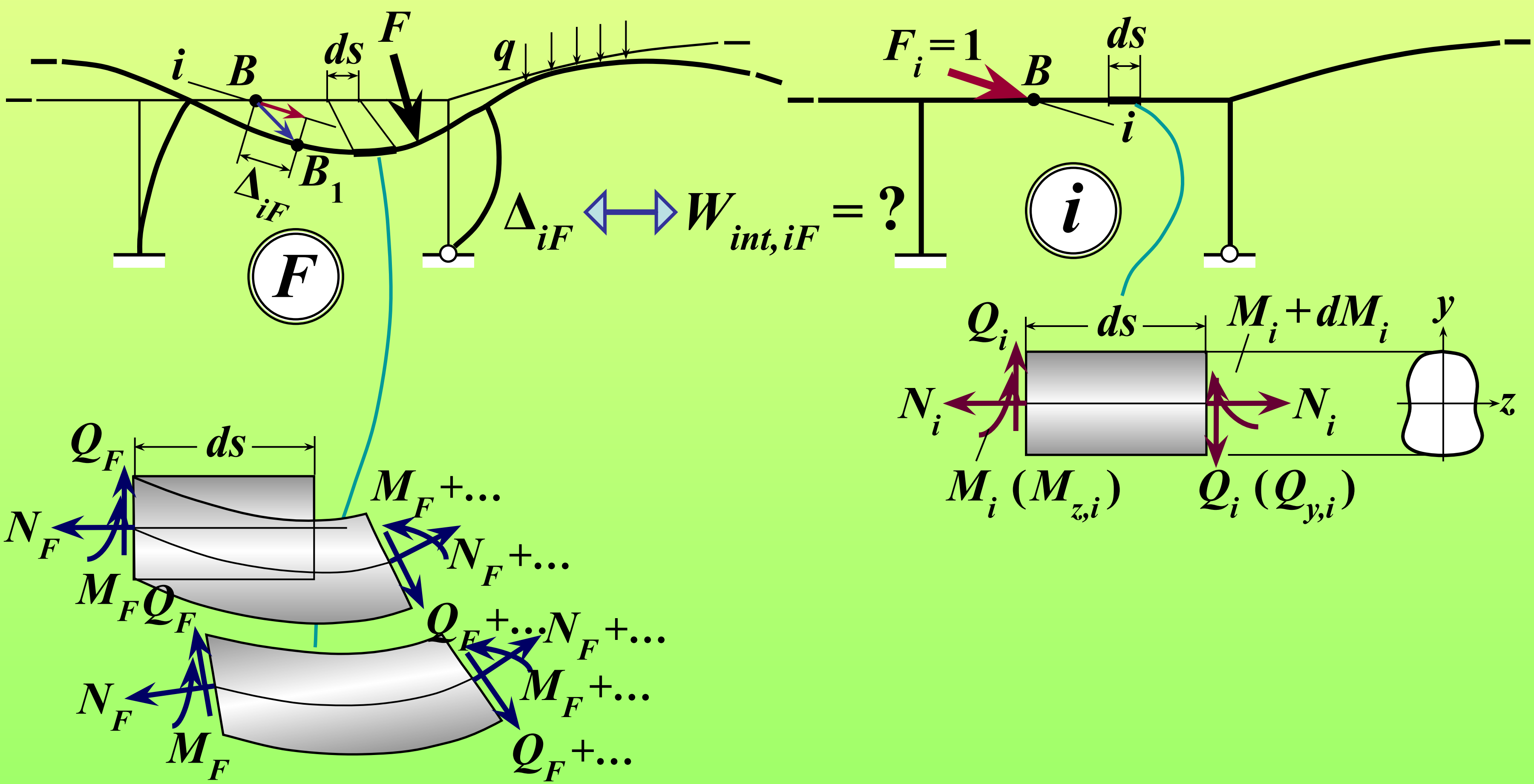
$\Delta_{i\Sigma} \Leftrightarrow W_{int,i\Sigma} = ?$

В случае ЛДС $\Delta_{i\Sigma} = \Delta_{iF} + \Delta_{it} + \Delta_{ic}$

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Действительное состояние – силовое | **Вспомогательное единичное состояние**

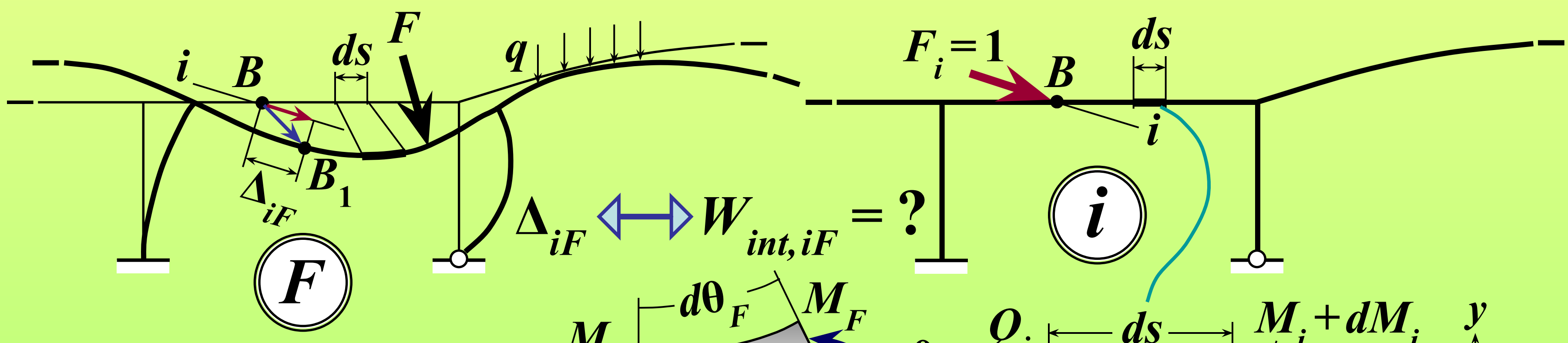


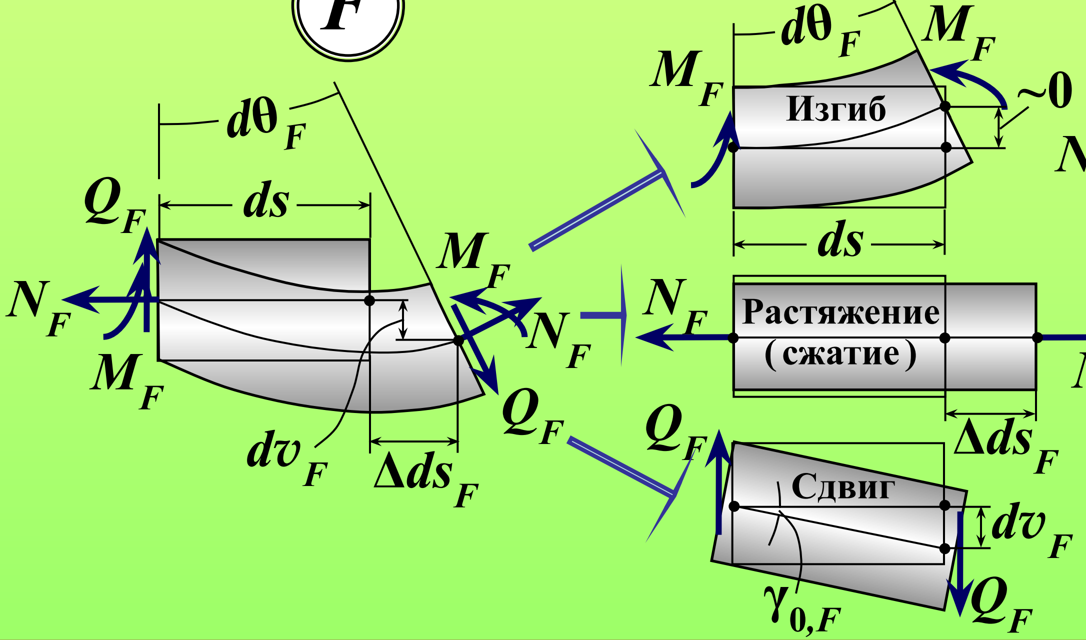
ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

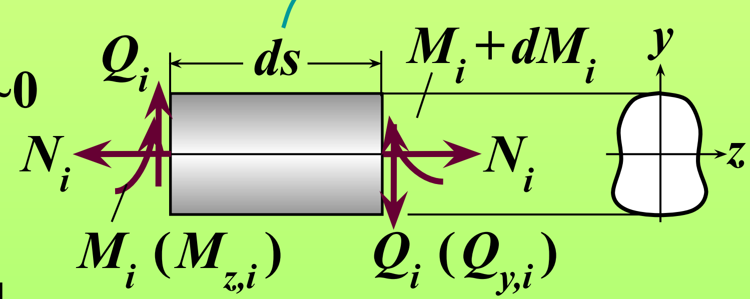
Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

<u>**Действительное состояние – силовое**</u>

Вспомогательное единичное состояние







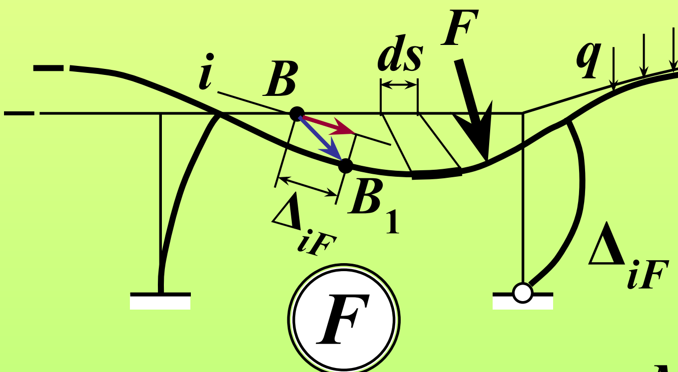
Для *i*-го *равновесного* состояния элемента *ds* линейно деформируемой системы:

$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} =$$
$$= -(dW_{M,iF} + dW_{N,iF} + dW_{Q,iF})$$

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

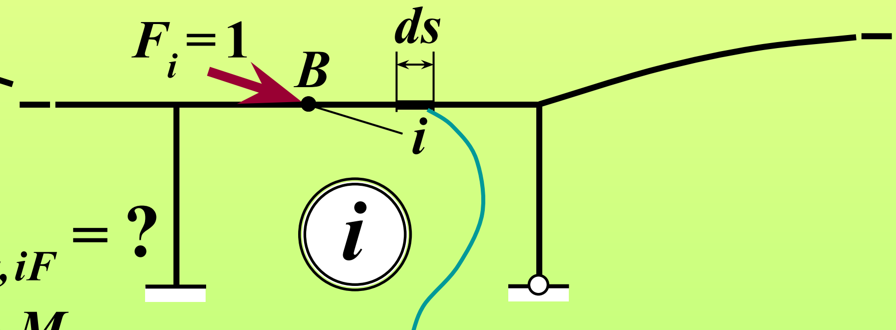
Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Действительное состояние – силовое



$\Delta_{iF} \Leftrightarrow W_{int,iF} = ?$

Вспомогательное единичное состояние



$dW_{M,iF} = M_i * d\theta_F = M_i * \rho_F * ds$

$dW_{N,iF} = N_i * \Delta ds_F = N_i * \varepsilon_F * ds$

$dW_{M,iF} = M_i \cdot d\theta_F = \dfrac{M_i \cdot M_F}{EI} ds$

$dW_{Q,iF} = Q_i * dv_F = Q_i * \gamma_{0,F} * ds$

По закону Гука при изгибе, растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно

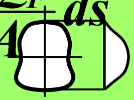
$dW_{N,iF} = N_i \cdot \Delta ds_F = \dfrac{N_i \cdot N_F}{EA} ds$

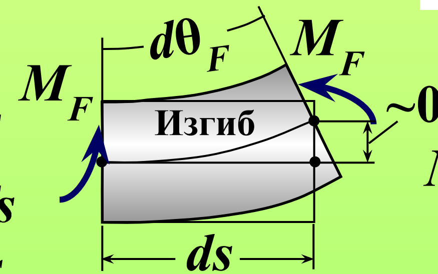
$\rho_F = M_F / EI; \quad \varepsilon_F = N_F / EA; \quad Q_F$

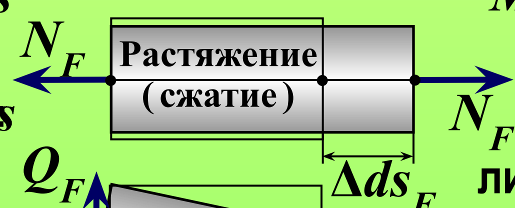
$\gamma_{0,F} = \tau_{0,F} / G = (k_\tau * Q_F / A)/G$

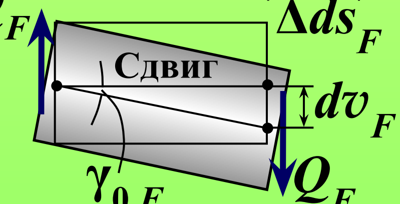
$dW_{Q,iF} = Q_i \cdot dv_F = k_\tau \dfrac{Q_i \cdot Q_F}{GA} ds$

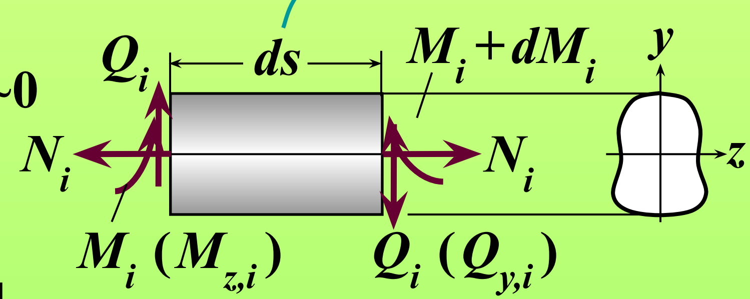
k_τ – коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений по сечению











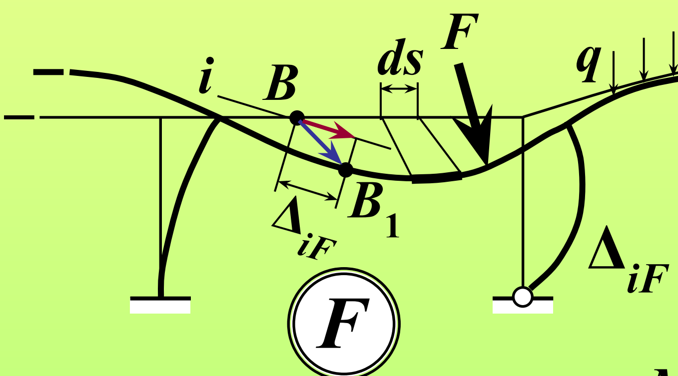
Для i-го *равновесного* состояния элемента ds линейно деформируемой системы:

$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} = -(dW_{M,iF} + dW_{N,iF} + dW_{Q,iF})$$

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

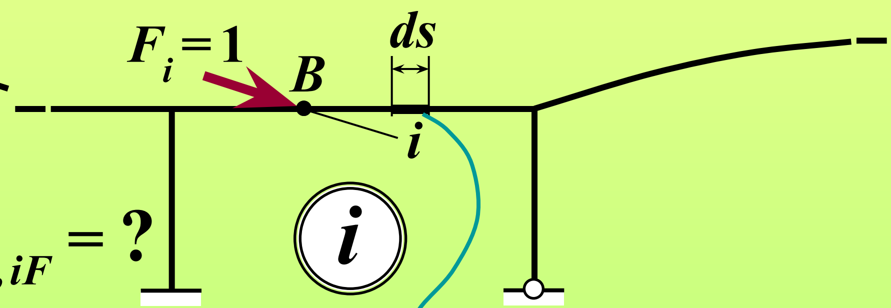
Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

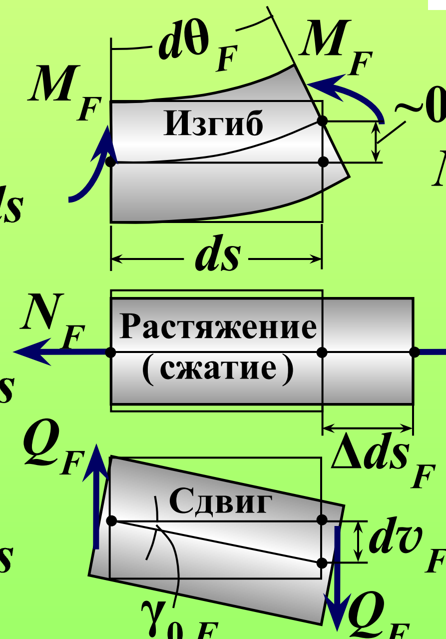
<u>Действительное состояние – силовое</u>

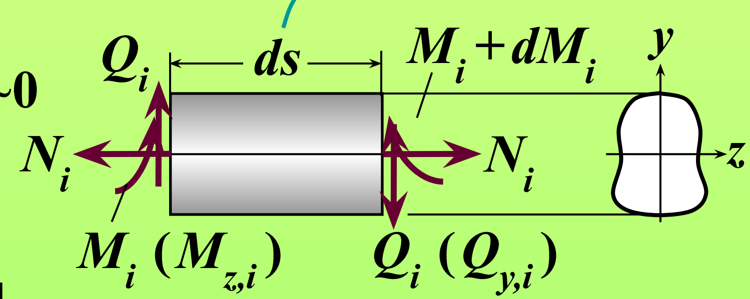


$\Delta_{iF} \Leftrightarrow W_{int,iF} = ?$

Вспомогательное единичное состояние







$$dW_{M,iF} = M_i \cdot d\theta_F = \frac{M_i \cdot M_F}{EI} ds$$

$$dW_{N,iF} = N_i \cdot \Delta ds_F = \frac{N_i \cdot N_F}{EA} ds$$

$$dW_{Q,iF} = Q_i \cdot dv_F = k_\tau \frac{Q_i \cdot Q_F}{GA} ds$$

$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} = -\left(\frac{M_i \cdot M_F}{EI} + \frac{N_i \cdot N_F}{EA} + k_\tau \frac{Q_i \cdot Q_F}{GA} \right) ds$$

Для *i*-го *равновесного* состояния элемента ds линейно деформируемой системы:

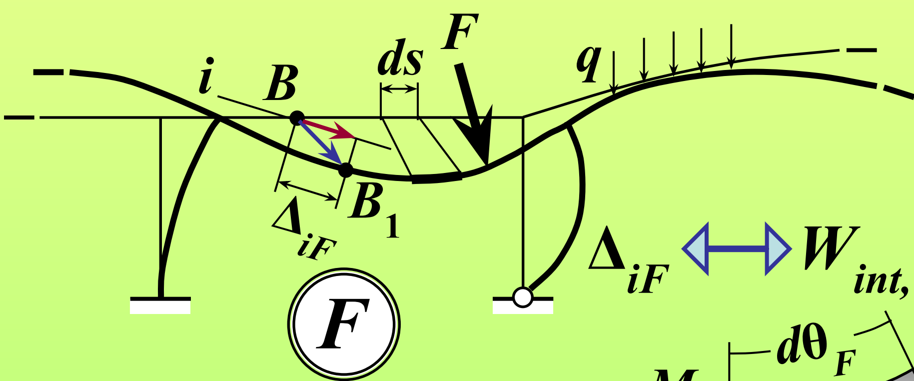
$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} = -(dW_{M,iF} + dW_{N,iF} + dW_{Q,iF})$$

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

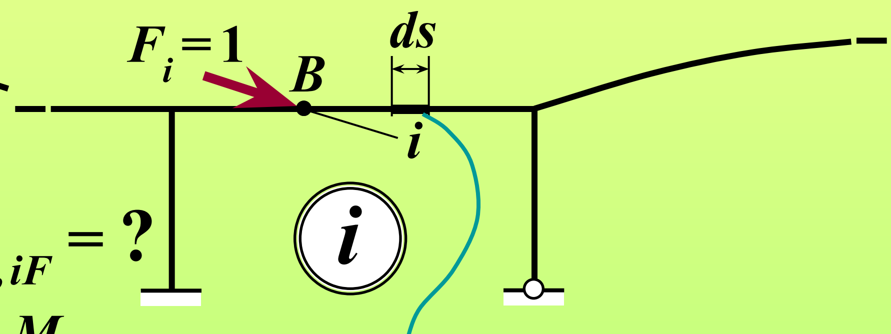
Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние



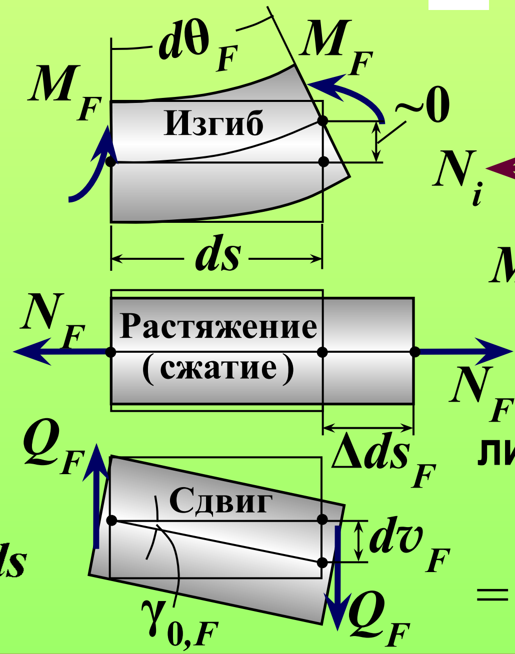
$$\Delta_{iF} \Longleftrightarrow W_{int,iF} = ?$$

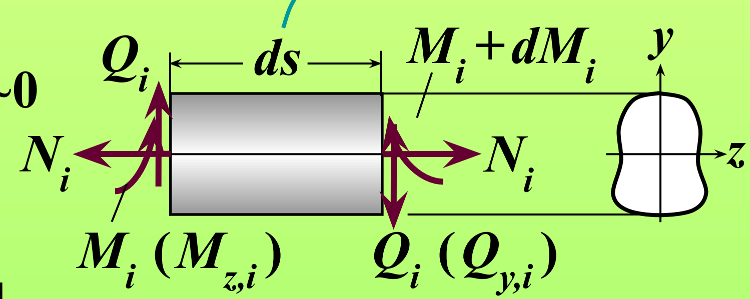


Обобщение на случай пространственного сложного сопротивления стержня:

$$dW_{int,iF} \equiv -dW_{ext,iF} \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{M_{z,i}\cdot M_{z,F}}{EI_z} + \frac{M_{y,i}\cdot M_{y,F}}{EI_y} + \frac{M_{t,i}\cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{N_i\cdot N_F}{EA} + k_{\tau y}\frac{Q_{y,i}\cdot Q_{y,F}}{GA} + k_{\tau z}\frac{Q_{z,i}\cdot Q_{z,F}}{GA} \right) ds$$





Для *i*-го *равновесного* состояния элемента *ds* линейно деформируемой системы:

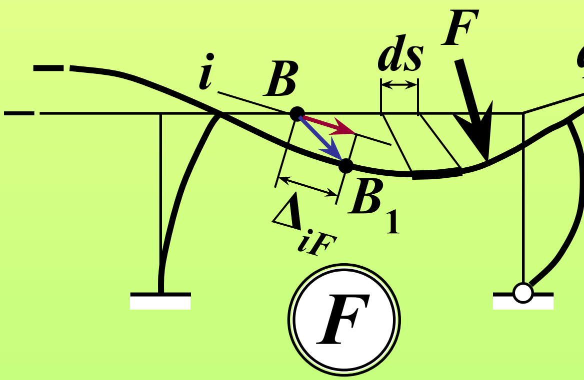
$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} =$$

$$= -(dW_{M,iF} + dW_{N,iF} + dW_{Q,iF})$$

ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

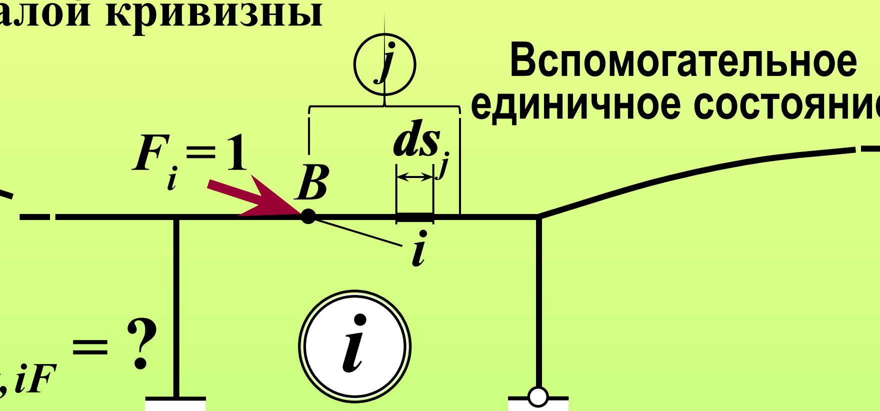
Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

<u>**Действительное состояние – силовое**</u>



$$\Delta_{iF} \Leftrightarrow W_{int,iF} = ?$$

Вспомогательное единичное состояние



Элемент $ds \in j$ – му элементу/участку ($ds \equiv ds_j$) системы, имеющей m элементов/участков, тогда для всей системы:

$$W_{int,iF} = -W_{ext,iF} = -\sum_{j=1}^{m}\int \left(dW_{ext,iF}\right)_j =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\int_{l_j}\left(\frac{M_{z,i}\cdot M_{z,F}}{EI_z} + \frac{M_{y,i}\cdot M_{y,F}}{EI_y} + \frac{M_{t,i}\cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{N_i\cdot N_F}{EA} + k_{\tau y}\frac{Q_{y,i}\cdot Q_{y,F}}{GA} + k_{\tau z}\frac{Q_{z,i}\cdot Q_{z,F}}{GA}\right)ds_j$$

Обобщение на случай пространственного сложного сопротивления стержня:

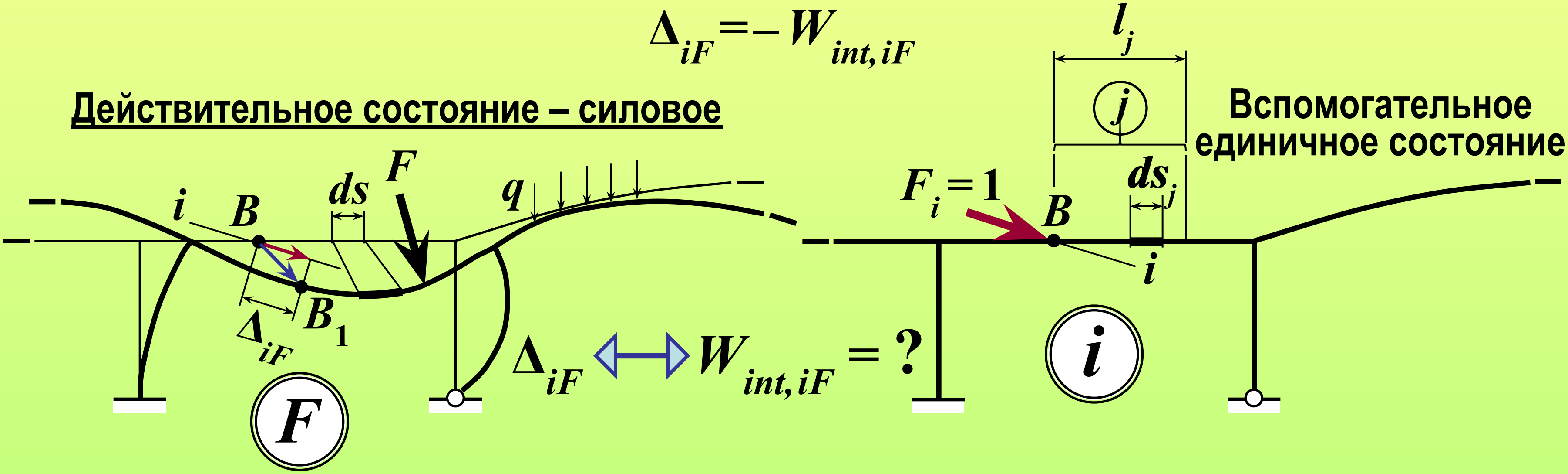
$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} =$$

$$= -\left(\frac{M_{z,i}\cdot M_{z,F}}{EI_z} + \frac{M_{y,i}\cdot M_{y,F}}{EI_y} + \frac{M_{t,i}\cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{N_i\cdot N_F}{EA} + k_{\tau y}\frac{Q_{y,i}\cdot Q_{y,F}}{GA} + k_{\tau z}\frac{Q_{z,i}\cdot Q_{z,F}}{GA}\right)ds$$

ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА – МОРА

По базовой формуле ММ–М:

$$\Delta_{iF} = -W_{int,iF}$$



$$\Delta_{iF} = -W_{int,iF} = \sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} \left(\frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI_z} + \frac{M_{y,i} \cdot M_{y,F}}{EI_y} + \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{N_i \cdot N_F}{EA} + k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} + k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} \right) ds_j$$

$$W_{int,iF} = -W_{ext,iF} = \sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} (dW_{ext,iF})_j = -\sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} \left(\frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI_z} + \frac{M_{y,i} \cdot M_{y,F}}{EI_y} + \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{N_i \cdot N_F}{EA} + k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} + k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} \right) ds_j$$

ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА – МОРА

По базовой формуле ММ–М:

$$\Delta_{iF} = -W_{int,iF}$$

Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние

Вариант записи формулы Максвелла – Мора для перемещения от силовых воздействий:

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^{m_{M_z}} \int_{l_j} \frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI_z} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_y}} \int_{l_j} \frac{M_{y,i} \cdot M_{y,F}}{EI_y} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Mt}} \int_{l_j} \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} ds_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} \frac{N_i \cdot N_F}{EA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_z}} \int_{l_j} k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_z}} \int_{l_j} k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} ds_j$$

В общем случае все величины в подынтегральном выражении – функции координаты сечения s_j (для прямолинейного стержня – x_j):

$$M_{z,i} = M_{z,i}(s_j),\ M_{z,F} = M_{z,F}(s_j), \ldots, N_F = N_F(s_j), \ldots, Q_{z,F} = Q_{z,F}(s_j),$$

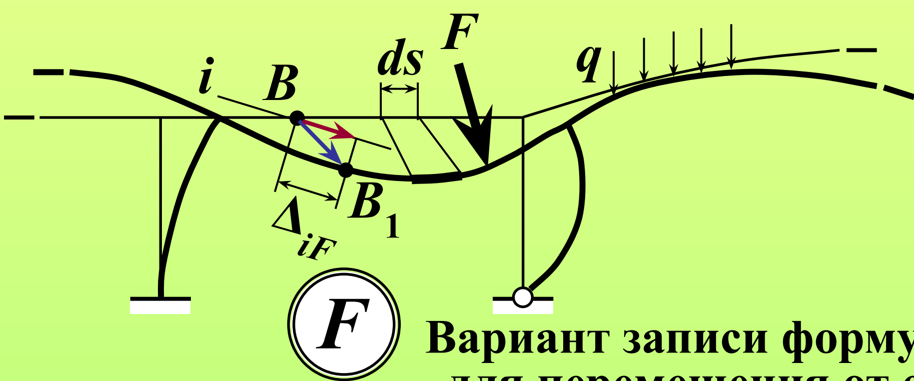
$$EI_z = EI_z(s_j), \ldots, GI_t = GI_t(s_j),\ EA = EA(s_j),\ GA = GA(s_j), \ldots, k_{\tau z} = k_{\tau z}(s_j)$$

ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА – МОРА

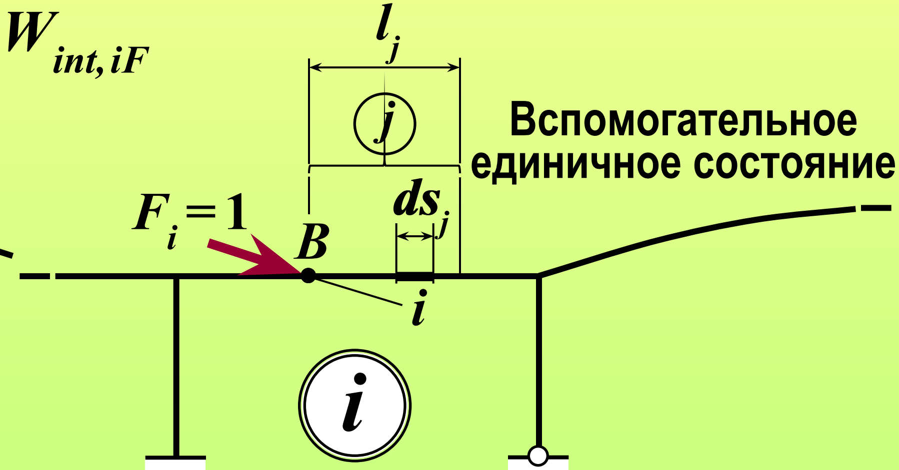
По базовой формуле ММ–М:

$$\Delta_{iF} = -W_{int,iF}$$

<u>Действительное состояние – силовое</u>



Вспомогательное единичное состояние



Вариант записи формулы Максвелла – Мора для перемещения от силовых воздействий:

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^{m_{M_z}} \int_{l_j} \frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI_z} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_y}} \int_{l_j} \frac{M_{y,i} \cdot M_{y,F}}{EI_y} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_t}} \int_{l_j} \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} ds_j +$$

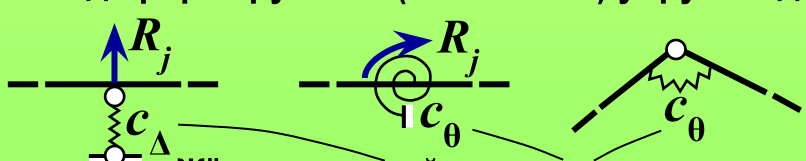
Изгиб; Изгиб; Кручение

$$+ \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} \frac{N_i \cdot N_F}{EA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_y}} \int_{l_j} k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_z}} \int_{l_j} k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} ds_j +$$

Растяжение/сжатие; Сдвиг; Сдвиг

Учёт деформируемых (нежёстких) упругоподатливых связей в системе:

$$+ \sum_{j=1}^{u} \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{c_j}$$



Жёсткости линейных и угловых упругих связей

Закон Гука для упругих связей:

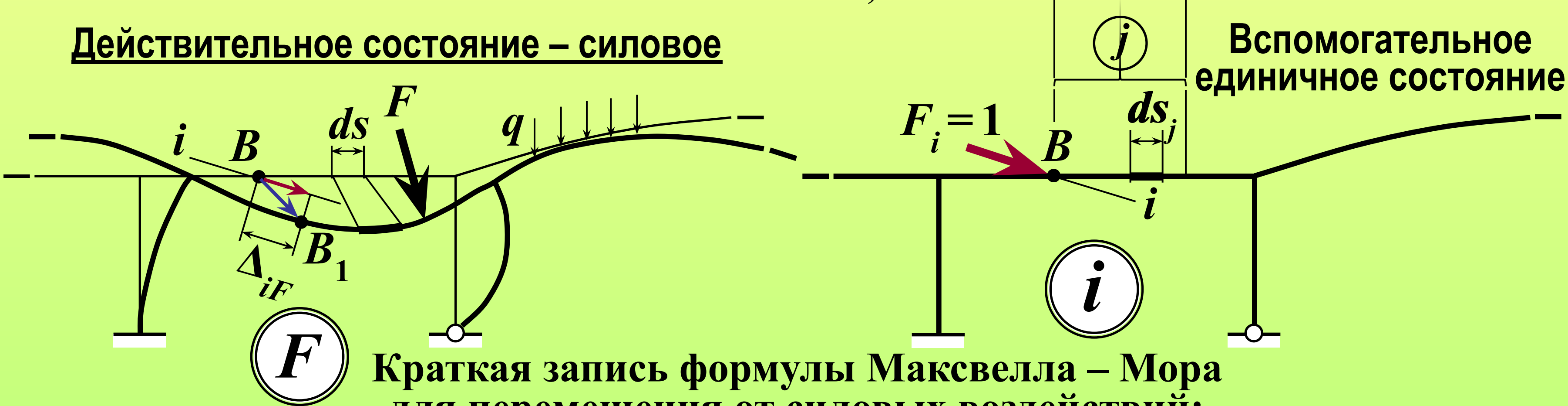
$$R_j = c_j * \Delta_j$$

u – суммарное число внешних и внутренних упругих связей

ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА – МОРА

По базовой формуле ММ–М:

$$\Delta_{iF} = -W_{int,iF}$$



Краткая запись формулы Максвелла – Мора для перемещения от силовых воздействий:

$$\Delta_{iF} = \sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^{m_S} \int_{l_j} \frac{S_i \cdot S_F}{C_S} ds_j + \sum_{j=1}^{u} \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{c_j}$$

$S_{\dots}$ – обобщённое обозначение внутреннего силового фактора:

$$S_{\dots} \left\{ \begin{array}{l} M_{z,\dots} \\ M_{y,\dots} \\ M_{t,\dots} \\ N_{\dots} \\ Q_{y,\dots} \\ Q_{z,\dots} \end{array} \right. \quad \dots = i \vee F$$

C_S – обобщённое обозначение жёсткости сечения при деформации, соответствующей силовому фактору S:

$$C_S \left\{ \begin{array}{l} EI_z \\ EI_y \\ GI_t \\ EA \\ GA/k_{\tau y} \\ GA/k_{\tau z} \end{array} \right.$$

ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА – МОРА

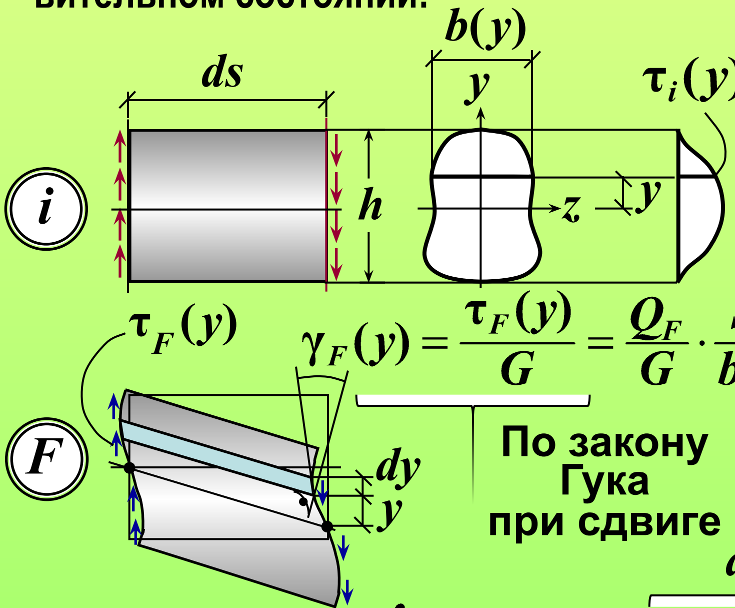
Приложение

К вопросу об учёте деформации сдвига при определении перемещений

1. Формула для коэффициента k_τ

Формула выводится путём сопоставления выражений возможных работ по двум расчётным моделям элемента ds:

а) с *фактическими* касательными напряжениями $\tau_i(y)$ в концевых сечениях элемента ds во вспомогательном i-ом единичном состоянии и *фактическими* деформациями сдвига $\gamma_F(y)$ в действительном состоянии:



$$\tau_i(y)=\frac{Q_i S_z(y)}{b(y)\,I_z}$$

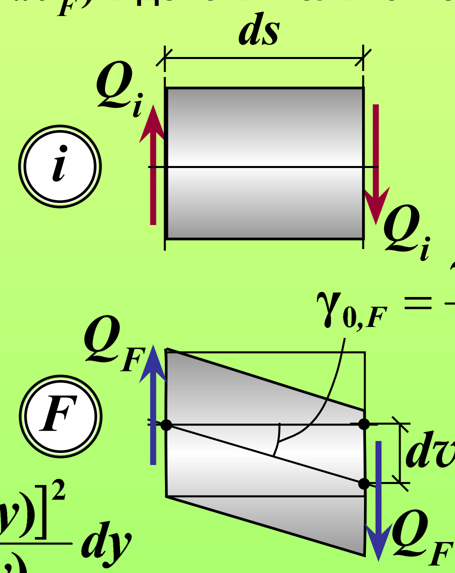
$$\gamma_F(y)=\frac{\tau_F(y)}{G}=\frac{Q_F}{G}\cdot\frac{S_z(y)}{b(y)\,I_z}$$

По закону Гука при сдвиге

$$dW^{(а)}_{ext,iF}=\int_h \tau_i(y)\cdot\gamma_F(y)\cdot b(y)\cdot ds\cdot dy=$$

$$=ds\int_h \frac{Q_i S_z(y)}{b(y)\,I_z}\cdot\frac{Q_F S_z(y)}{G\,b(y)\,I_z}\cdot b(y)\,dy=\frac{Q_i Q_F}{G I_z^2}\,ds\int_h\frac{[S_z(y)]^2}{b(y)}\,dy$$

б) с *обобщёнными силами* (поперечными силами Q_i) в концевых сечениях элемента ds в i-ом единичном состоянии и соответствующими *обобщёнными перемещениями* (абсолютным сдвигом dv_F) в действительном состоянии:



$$\gamma_{0,F}=\frac{\tau_{0,F}}{G}=\frac{Q_F}{GA}\cdot k_\tau$$

$$dv_F=\gamma_{0,F}*ds$$

$$dW^{(б)}_{ext,iF}=Q_i\cdot dv_F=Q_i\cdot\gamma_{0,F}\cdot ds=$$

$$dW^{(б)}_{ext,iF}=\frac{Q_i Q_F}{GA}k_\tau\,ds$$

$$dW^{(а)}_{ext,iF}=dW^{(б)}_{ext,iF}\;\Rightarrow\;k_\tau=\frac{A}{I_z^2}\int_h\frac{[S_z(y)]^2}{b(y)}\,dy$$

ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА – МОРА

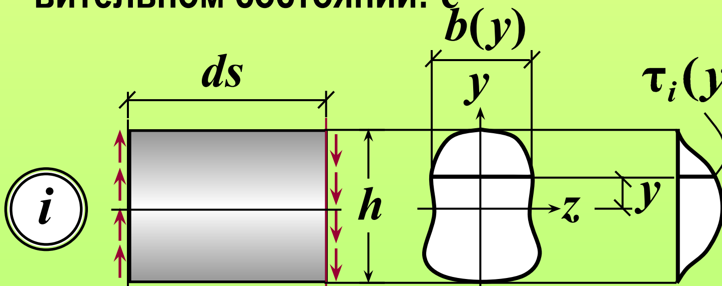
Приложение

К вопросу об учёте деформации сдвига при определении перемещений

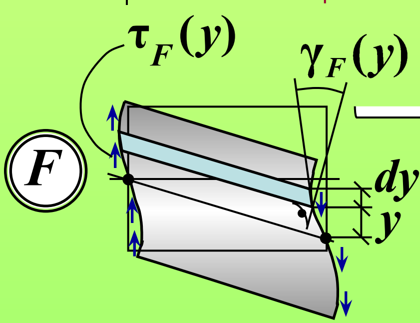
1. Формула для коэффициента k_τ

Формула выводится путем сопоставления выражений возможных работ по двум расчётным моделям элемента ds:

а) с *фактическими* касательными напряжениями $\tau_i(y)$ в концевых сечениях элемента ds во вспомогательном i-ом единичном состоянии и *фактическими* деформациями сдвига $\gamma_F(y)$ в действительном состоянии: ё

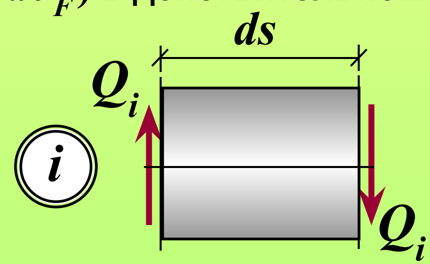


$$\tau_i(y) = \frac{Q_i S_z(y)}{b(y) I_z}$$

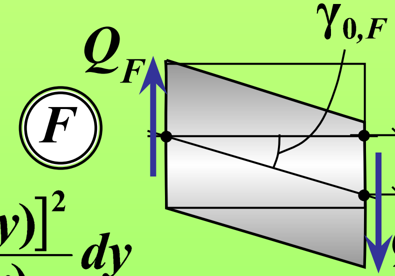


$$\gamma_F(y) = \underbrace{\frac{\tau_F(y)}{G}}_{\text{По закону Гука при сдвиге}} = \frac{Q_F}{G} \cdot \frac{S_z(y)}{b(y) I_z}$$

б) с *обобщёнными силами* (поперечными силами Q_i) в концевых сечениях элемента ds в i-ом единичном состоянии и соответствующими *обобщёнными перемещениями* (абсолютным сдвигом dv_F) в действительном состоянии:



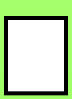
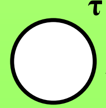
$$\gamma_{0,F} = \frac{\tau_{0,F}}{G} = \frac{Q_F}{GA} \cdot k_\tau$$



$$dv_F = \gamma_{0,F} * ds$$

$$k_\tau = \frac{A}{I_z^2} \int_h \frac{[S_z(y)]^2}{b(y)} dy$$

Значения коэффициента k_τ для некоторых видов сечений:

 $k_\tau = 6/5$  $k_\tau = 10/9$  $k_\tau \approx A/A_w$

ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Приложение

К вопросу об учёте деформации сдвига при определении перемещений

2. Оценка влияния сдвига на перемещения от силовых воздействий

Составляющая перемещения Δ_{iF} , обусловленная деформацией сдвига, – $\Delta_{iF,Q}$; в отношении к составляющей $\Delta_{iF,M}$ от изгиба: $\Delta_{iF,Q}/\Delta_{iF,M} = \alpha_Q$

Для j-го участка/элемента постоянного сечения:

$$\alpha_Q^{(j)} = \frac{E_j}{G_j} \cdot k_\tau^{(j)} \cdot \left[\alpha_r^{(j)}\right]^2 \cdot \left(\frac{h_j}{l_j}\right)^2 \cdot \beta_S^{(j)} ,$$

где $\alpha_r^{(j)} = r_j / h_j < 0{,}5$ – относительный радиус инерции сечения; $\beta_S^{(j)} = \dfrac{l_j^2 \int\limits_{l_j} Q_i\, Q_F\, ds_j}{\int\limits_{l_j} M_i\, M_F\, ds_j}$

***Признаки необходимости учёта деформации сдвига при определении перемещений стержневых систем*:**

- сечение – тонкостенное ($k_\tau > 2$);
- материал – относительно низкомодульный при сдвиге ($E/G > 3\ldots4$);
- элемент достаточно массивный, «короткий» ($h/l > 1/8$);
- нагрузки таковы, что вызывают значительные поперечные силы при сравнительно небольших изгибающих моментах (ориентировочно: средние на грузовом участке $|M/Q| < \sim h$).

***Подробнее см.*:** **Себешев В.Г. Особенности работы статически неопределимых систем и регулирование усилий в конструкциях: Учебное пособие. – Новосибирск: НГАСУ, 2009. – 164 с.**

К о н т р о л ь н ы е   в о п р о с ы

*(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы;
для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*);
для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши
и выбрать «Перейти к слайду 29»)*

1. **Как в общем виде обозначаются перемещения? Какой смысл имеют индексы в этом обозначении?** (2)
2. **Что такое собственное перемещение?** (2)
3. **Какие индексы используются для обозначения перемещений от силовых, температурных, кинематических и комбинированных воздействий?** (3)
4. **Какие перемещения называются единичными?** (4)
4. **Какова основная идея метода Максвелла – Мора определения перемещений деформируемых систем? Почему этот метод также называется методом единичных вспомогательных нагрузок?** (5)
5. **Правило задания вспомогательного единичного воздействия. Каков кинематический смысл этого воздействия?** (6)
6. **Типовые случаи вспомогательных единичных состояний в методе Максвелла – Мора.** (7)
7. **Какой принцип механики лежит в основе метода Максвелла – Мора?** (8)
8. **Через какие величины выражается искомое перемещение по базовой формуле метода Максвелла – Мора?** (8)
9. **Что такое возможная работа внешних или внутренних сил?** (9)
10. **Какая работа внешних или внутренних сил называется действительной?** (9)
11. **Что называется потенциальной энергией деформации системы?** (9)
12. **Как связаны возможные работы внешних и внутренних сил** (10) **12. Как связаны возможные работы внешних и внутренних сил (10) , их действительные работы и потенциальная энергия упругой деформации (ПЭУД)?** (12)

---

*) **Только в режиме «Показ слайдов»**

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 30»)*

13. Как выражаются возможные и действительные работы внешних и внутренних сил и ПЭУД через обобщённые нагрузки и обобщённые перемещения? Частный случай – линейно деформируемые системы (теорема Клапейрона). (10 – 12)

14. Какой приём используется для получения выражения возможной работы через внутренние силовые факторы? (16)

15. Как деформации действительного *силового* состояния выражаются через внутренние силовые факторы? (18)

16. Каков смысл величин EI, EA, GI_t, GA/k_τ, входящих в формулу Максвелла – Мора? (18)

17. Варианты развёрнутой записи формулы Максвелла – Мора для перемещения от силовых воздействий. (22, 23)

18. Какими слагаемыми в формуле Максвелла – Мора учитываются разные виды упругих деформаций элементов (изгиб, растяжение/сжатие, сдвиг, кручение)? (24)

19. Что учитывает коэффициент k_τ в слагаемом формулы Максвелла – Мора, отражающем влияние сдвига? (18) **влияние сдвига? (18)** (27)

20. Как учитываются в формуле Максвелла – Мора деформации упругоподатливых связей системы? (24)

21. Краткая обобщённая запись формулы Максвелла – Мора для перемещения от силового воздействия. (25)

22. Какие величины обобщённо обозначаются как S_i и S_F в краткой записи формулы Максвелла – Мора? То же, C_S? (25)

---

*) **Только в режиме «Показ слайдов»**