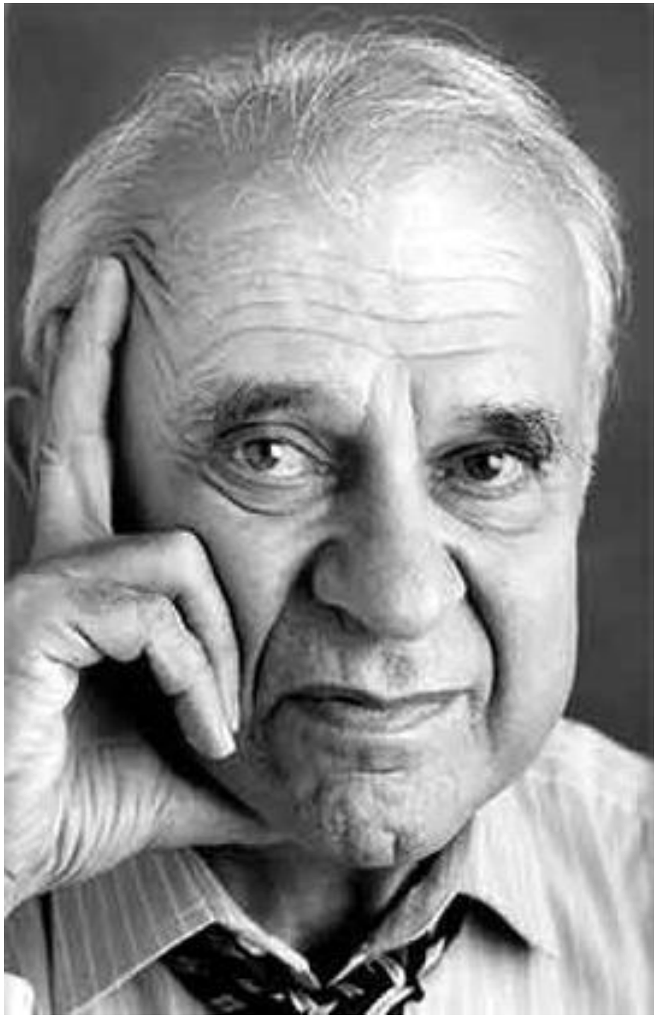
Модель межотраслевого баланса



Василий Васильевич Леонтьев,
1905-1999

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	X_2
…						
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	X_n
Условно-чистая продукция	Z_1	Z_2	…	Z_n	$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j$	
Валовой продукт	X_1	X_2	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

		Текущее производственное потребление в отраслях (промежуточный продукт)							Конечный продукт					Всего валовой продукции
		1	2	…	j	…	n	Итого	Непроизводственное потребление	Фонд накопления	Возмещение выбытия основных фондов и возмещение потерь	Сальдо экспорта (+) и импорта (−)	Итого	
		Первый раздел							Второй раздел					
Текущие материальные затраты по видам продукции	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$					y_1	x_1
	⋮												⋮	⋮
	i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$					y_i	x_i
	⋮												⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$					y_n	x_n
		Третий раздел							Четвертый раздел					
Амортизация и чистая продукция		z_1	z_2	…	z_j	…	z_n	$\sum_{j=1}^{n} z_j$						
Всего валовой продукт		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	$\sum_{j=1}^{n} x_j$						

$$\sum_{i=}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$X_j = \sum_i x_{ij} + Z_j, \; j = 1, \; \ldots, \; n$$

$$X_i = \sum_j x_{ij} + Y_i, \; i = 1, \; \ldots, \; n.$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + y_1 &= X_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + y_2 &= X_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + y_n &= X_n \end{aligned} \qquad (1)$$

Обозначим a_{ij} количество продукции i -ой отрасли, расходуемое на производство единицы продукции в j -ой отрасли. Эти числа называются *коэффициентами прямых затрат*, а все их множество образует квадратную матрицу $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

$$x_{ij} = a_{ij} X_j$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n + y_1 &= X_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + y_1 &= X_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + a_{nn}X_n + y_n &= X_n,
\end{aligned}
$$

$AX + y = X$

$$\breve{y} = AX$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1 \text{ для } \forall \quad j = \overline{1,n},$$

$$a_{ij} < 1 \text{ при } i = j,$$

1. По заданному вектору совокупного общественного продукта найти вектор конечного общественного продукта: $Y = (E - A)X$

2. По заданному вектору конечного общественного продукта определить вектор совокупного общественного продукта: $X = (E - A)^{-1}Y$.

Матрица материальных затрат **А** называется *продуктивной,* если найдется такой план **Х** , в котором выпуск каждой продукции строго положителен (все $x_j > 0$) и превышает совокупные затраты этой продукции в процессе производства. Таким образом, поэлементно выполняется неравенство:

$$X\text{-}AX > 0$$

При продуктивной технологической матрице существует хотя бы один план работы отраслей экономической системы, при котором каждого продукта выпускается больше, чем
затрачивается на его производство.

Простейший критерий продуктивности и прибыльности, известный под названием условия Брауэра-Солоу , формулируется в терминах сумм коэффициентов матрицы технологических коэффициентов A = (a_{ij}) по строкам и столбцам.Данный критерий формулируется следующим образом: каждое из двух представленных условий является достаточным для продуктивности и одновременно для прибыльности:

$$1)\quad 1 > \sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ \forall i = \overline{1,n};$$

$$2)\quad 1 > \sum_{i=1}^{n} a_{ij},\ \forall j = \overline{1,n}.$$

Теорема 1. Для того что бы модель межотраслевого баланса с матрицей коэффициентов прямых затрат *A* была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы матрица (Е-А) имела неотрицательную обратную матрицу.

Теорема 2. Технологическая матрица А является продуктивной тогда и только тогда, когда все ее собственные числа меньше 1:

$$\max(\lambda_A) < 1$$