

## **Правила взаимодействия:**

1. Взаимные приветствия, перекличка.
2. Дежурная группа, главный – староста.
3. Доска, мел, журнал на подпись в конце лекции.
4. **Опоздавших в аудиторию не пускаю!**
5. Выход из аудитории с разрешения лектора.
6. Не есть, не жевать, не разговаривать.
7. **Мобильную связь отключать до лекции!!!**

## Системы линейных алгебраических уравнений

Определение. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$m$  уравнений и  $n$  неизвестных:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

В общем случае  $m \neq n$ .

Заданные числа  $a_{ij}$  – коэффициенты системы двойной индекс  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

первый  $i$  – номер уравнения, в котором находится данный коэффициент,

второй  $j$  – номер неизвестной, перед которой он стоит.

Заданные числа  $b_1, b_2, \dots, b_m$  называются свободными членами, правыми частями СЛАУ, неоднородностями.

Определение. Решением СЛАУ называется такой набор чисел

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n,$$

который при подстановке в СЛАУ обращает в тождество каждое уравнение системы.

В решение входит  $n$  чисел, но этот набор задает только одно решение СЛАУ.

Определение. Если СЛАУ не имеет ни одного решения, то она называется несовместной. Если имеет решения, то — совместной.

# Матрицы

Матрицы необходимы для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Определение. Матрица это прямоугольная таблица чисел.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2.24 \\ -11 \\ 3.68 \\ -0.5 \end{bmatrix}, C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, D = (d_1; d_2; d_3)$$

Определение. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами.

Обычно между элементами матрицы разделительные знаки не пишут, но лучше их разделять между собой точкой с запятой.

Элементы располагаются по **строкам** и **столбцам** матрицы.

**Произведение** числа строк на число столбцов матрицы определяет размеры матрицы:

$A$  имеет размеры  $2 \times 3$ ;  $B - 4 \times 1$ ;  $C - 2 \times 2$ ;  $D - 1 \times 3$ .

Определение. Если у матрицы только одна строка, то она называется **матрица-строка** (или **вектор-строка**).

Если у матрицы только один столбец – **матрица-столбец** (или **вектор-столбец**).

Определение. Если у матрицы число строк  $m$  и число столбцов  $n$  одинаковое:  $m = n$  – то она называется **квадратной**.

Общий случай матрицы  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы  $a_{ij}$ :

**первый** индекс  $i$  указывает **номер строки**,  
в которой стоит данный элемент,  
**второй** индекс  $j$  – **номер столбца**.

Квадратная **диагональная** матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная **единичная** матрица  $E$ :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

# Операции над матрицами

**Равенство матриц.** Матрицы  $A$  и  $B$  называются равными, если они имеют одинаковые размеры и на одинаковых местах стоят одинаковые элементы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\ell} \\ & & \dots & \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{k\ell} \end{pmatrix}$$

$$A = B$$

если  $k = m$ ,  $\ell = n$  и  $a_{ij} = b_{ij}$  при всех  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Умножение матрицы на число.** Чтобы матрицу умножить на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число

$$c \cdot A = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11}; & c \cdot a_{12}; & \dots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21}; & c \cdot a_{22}; & \dots & c \cdot a_{2n} \\ & & \dots & \\ c \cdot a_{m1}; & c \cdot a_{m2}; & \dots & c \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Сложение матриц.**  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  одинаковых размеров

$$A + B = C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad 1 \leq j \leq n,$$

складываются элементы, стоящие на одинаковых местах.

**Вычитание матриц:**  $A - B = A + (-1)B$



**Умножение матриц.** Чтобы умножить матрицу  $A = (a_{ij})_{mn}$  на матрицу  $B = (b_{ij})_{kl}$  надо **каждую строку** первого сомножителя "умножить" **на каждый столбец** второго сомножителя и результат поставить в "соответствующее" место

$$C = A \cdot B = AB$$

**Умножение строки на столбец.**

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in-1}, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{k-1j} \\ b_{kj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{kj} = \\ = c_{ij} \text{ — ЧИСЛО}$$

При умножении строки на столбец элементы, стоящие на одинаковых местах от начала строки и от начала столбца, перемножаются, а полученные произведения складываются.

Число элементов в строке матрицы  $A$  должно быть равно числу элементов в матрице  $B$ :  $n = k$ , т.е. **число столбцов в  $A$  должно совпадать с числом строк в  $B$ .**

Во всех других случаях перемножить матрицы  $A$  и  $B$  нельзя!!!

$$A \cdot B = AB = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c|c} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{array} \right) =$$

$$= \left( \begin{array}{c|c|c} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 13 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 14 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 15 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 13 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 14 & 4 \cdot 9 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 15 \end{array} \right) =$$

$$= \left( \begin{array}{c|c|c} 66 & 72 & 78 \\ 156 & 171 & 186 \end{array} \right)$$

|     |   |
|-----|---|
| $B$ | $\left( \begin{array}{c c c} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{array} \right)$ |
| $A$ | $C$   |

|  |   |
|--|---|
| $\left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$ | $\left( \begin{array}{c c c} 66 & 72 & 78 \\ 156 & 171 & 186 \end{array} \right)$ |
|--|---|

## Запись СЛАУ в матричной форме

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Вводятся такие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A$  – матрица коэффициентов СЛАУ;

$B$  – матрица свободных членов (матрица-столбец);

$X$  – матрица-столбец неизвестных.

СЛАУ кратко записывается в матричной форме:

$$AX = B$$

## Определители и их свойства

Для любой квадратной матрицы  $A = (a_{ij})$ , размеров  $n \times n$ , по специальному правилу вычисляется число: **определитель  $n$ -го порядка** (или **детерминант  $n$ -го порядка**) данной матрицы

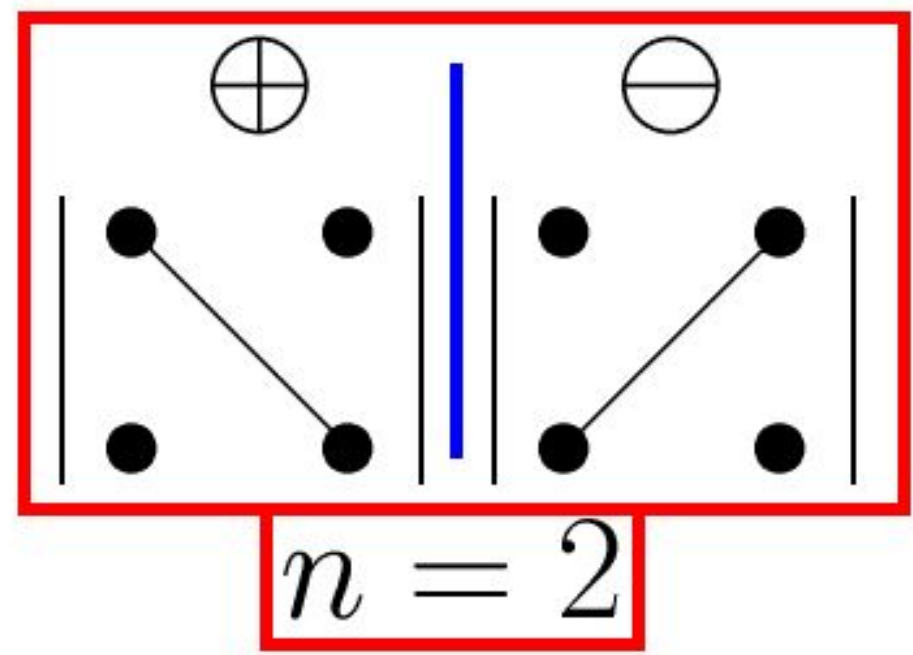
$$\det A = \Delta(A) = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Правило вычисления определителя дается по индукции: сначала для  $n = 1$ ; затем для  $n = 2, 3$ ; далее для произвольного  $n$  в предположении, что для значения  $(n - 1)$  правило уже известно.

Определение. Для квадратной матрицы размеров  $1 \times 1$ , т.е. в случае  $A = (a_{11})$ , ее определитель совпадает с единственным элементом этой матрицы:  $\det A = a_{11}$ .

Определение. Для квадратной матрицы размеров  $2 \times 2$ , ее определитель – определитель второго порядка – вычисляется по формуле

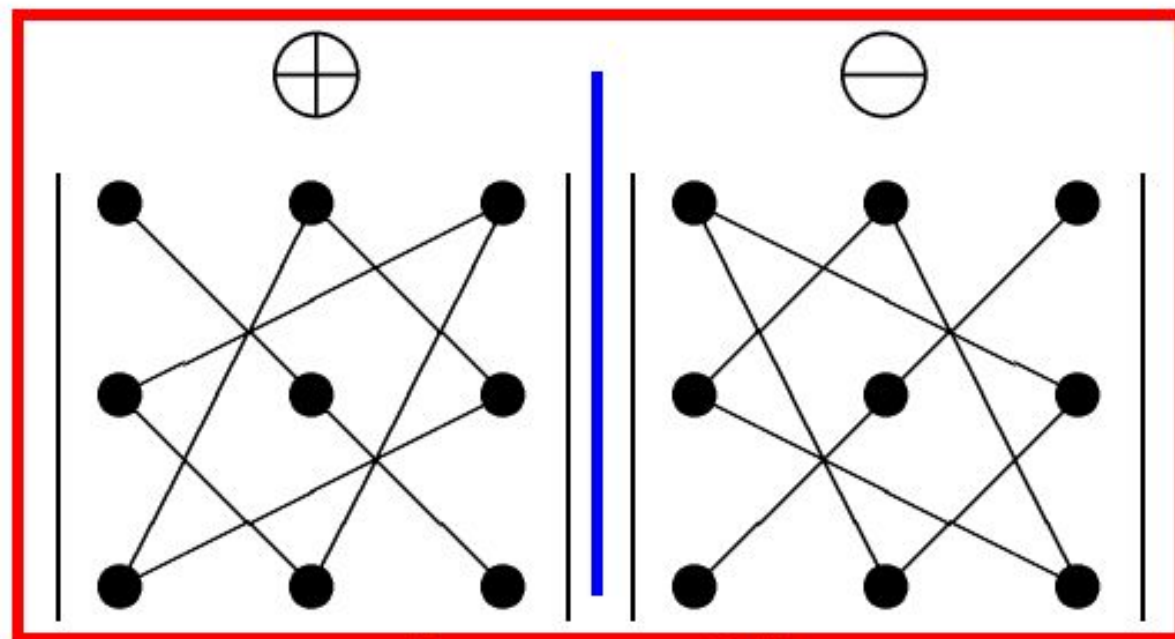
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} ,$$



Определение. Для квадратной матрицы размеров  $3 \times 3$  определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{23} a_{32} a_{11}$$



$$n = 3$$

Определение. Для квадратной матрицы размеров  $n \times n$  ее определитель  $n$ -го порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

вычисляется с помощью разложения по первой строке:

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

т.е. все члены первой строки  $a_{1j}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) умножаются на свои алгебраические дополнения (числа  $A_{1j}$ ) и полученные произведения складываются.

Определение.  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  вычисляется по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} ,$$

где  $M_{ij}$  — минор элемента  $a_{ij}$   
т.е.

$A_{ij} = M_{ij}$ , если сумма  $(i + j)$  **четное** число

$A_{ij} = -M_{ij}$ , если сумма  $(i + j)$  **нечетное** число

Определение.  $M_{ij}$  — минор элемента  $a_{ij}$  есть определитель  $(n-1)$ -го порядка, который получается из исходного определителя  $n$ -го порядка вычеркиванием строки с номером  $i$  и столбца с номером  $j$ , в которых стоит этот элемент  $a_{ij}$ :



Определение.  $M_{ij}$  – минор элемента  $a_{ij}$  есть определитель  $(n-1)$ -го порядка, который получается из исходного определителя  $n$ -го порядка вычеркиванием строки с номером  $i$  и столбца с номером  $j$ , в которых стоит этот элемент  $a_{ij}$ :

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Т.е. с помощью миноров – определителей  $(n-1)$ -го порядка – вычисляется определитель  $n$ -го порядка.

# Свойства определителей

Свойство 1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательства проделать самим на примере произвольных определителей третьего порядка.

Например, для свойства 1:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Теорема. Если какое-нибудь свойство справедливо для строк определителя, то оно будет справедливо и для его столбцов.

Свойство 2. Определитель можно считать, раскладывая по любой строке (по любому столбцу).

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \\
 = a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\
 + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\
 + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) = -a_{12}a_{21}a_{33} + \\
 + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21}$$

Свойство 3. Если в определителе две строки (два столбца) поменять местами, то определитель сменит знак.

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

Свойство 4. Чтобы определитель умножить на число, надо все элементы только одной строки (только одного столбца) умножить на это число.

Например:

$$k \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}; & a_{12}; & a_{13} \\ a_{21}; & a_{22}; & a_{23} \\ k \cdot a_{31}; & k \cdot a_{32}; & k \cdot a_{33} \end{vmatrix}$$

Умножение определителя на число отличается  
от умножения матрицы на число!!!

СВОЙСТВО 6. *Определитель заведомо равен нулю в следующих случаях:*

а) *если в нем есть строка (столбец), состоящая только из нулей;*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{0 & 0 & 0} \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

б) *если в нем есть равные строки (столбцы);*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

с) *если в нем есть пропорциональные строки (столбцы);*

$$\begin{vmatrix} a_{11}; & a_{12}; & a_{13} \\ k \cdot a_{11}; & k \cdot a_{12}; & k \cdot a_{13} \\ a_{31}; & a_{32}; & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 14 & 9 \end{vmatrix} = 0$$