

Готовимся к ЕГЭ.

Задача С2.

Задачи, где присутствует построение
сечения

Основная волна (июнь – Центр)

Основная волна (июнь – Сибирь)

Вторая волна (резервный день)

Задачи из тренировочных работ 2013-2014 (alexlarin.net)

1

2

3

4

Критерии.

Обоснованно получен правильный ответ (2 балла).

Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано (1 балл).

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше (0 баллов).

Максимальный балл 2

В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC .

Решение:

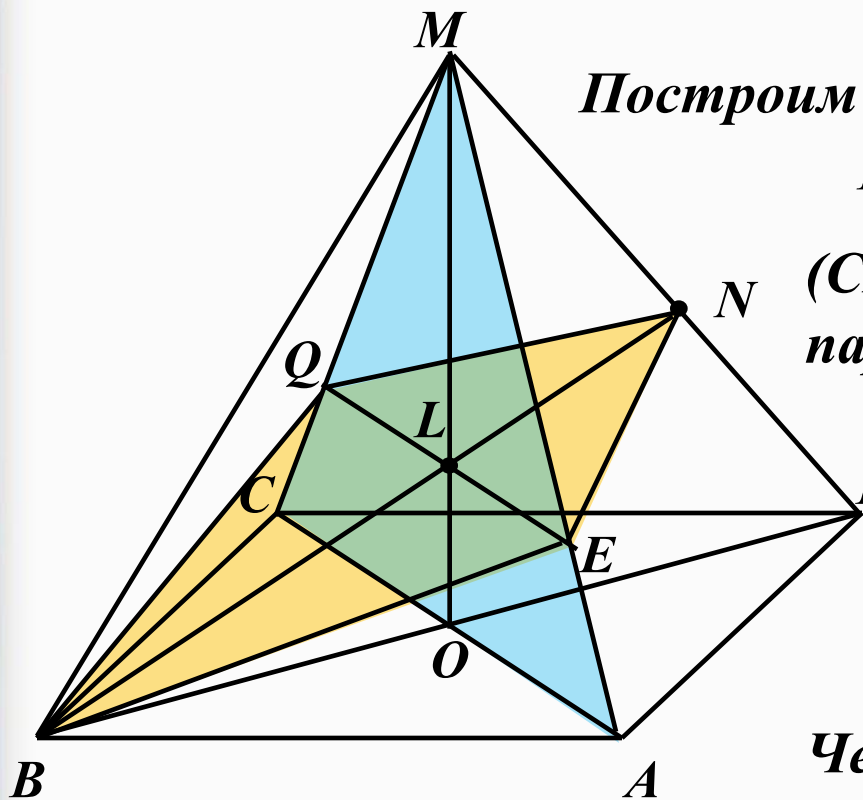
Построим сечение пирамиды плоскостью α .

$$BN \cap (CMA) = L (\in MO)$$

(CMA) проходит через прямую AC , параллельную α и пересекает $\alpha \Rightarrow$ линия пересечения плоскостей $D(CMA)$ и α параллельна AC .

Д. п.: через точку L проведем $QE \parallel AC$.

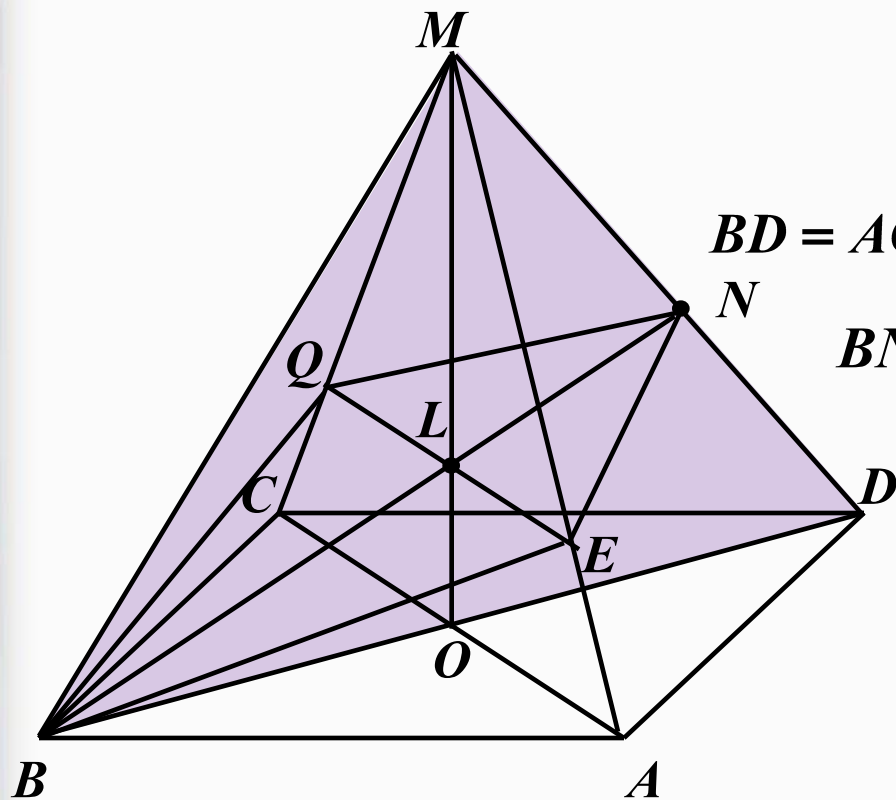
Четырёхугольник $BQNE$ – искомое сечение.



В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8.

Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC .

Решение:



$$BD = AC = 3\sqrt{2} \text{ (диагональ квадрата)}$$

BN медиана треугольника $BMD \Rightarrow$

$$\begin{aligned} BN &= \frac{1}{2} \sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot (3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 8^2 - 8^2} = 5 \end{aligned}$$

В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC .

Решение:

Треугольники CMA и OME – подобны,

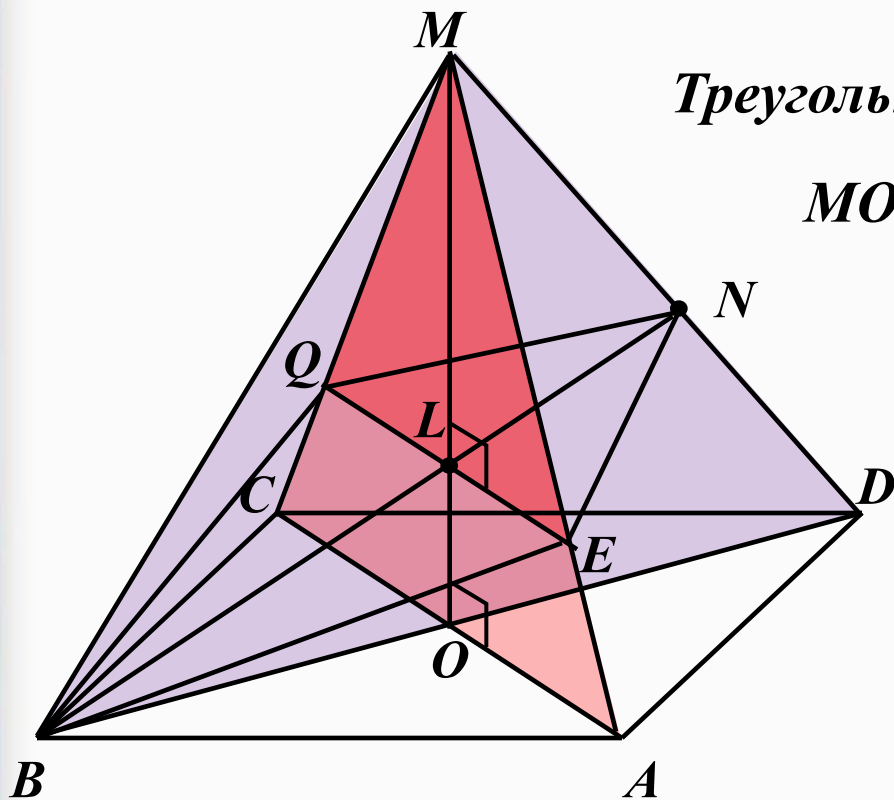
$$MO \text{ и } ML - \text{ их высоты} \Rightarrow \frac{AC}{QE} = \frac{MO}{ML}$$

*L – точка пересечения медиан
треугольника BMD \Rightarrow*

$$\Rightarrow \frac{ML}{LO} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{MO}{ML} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{QE}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{QE}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow QE = 2\sqrt{2}$$



В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC .

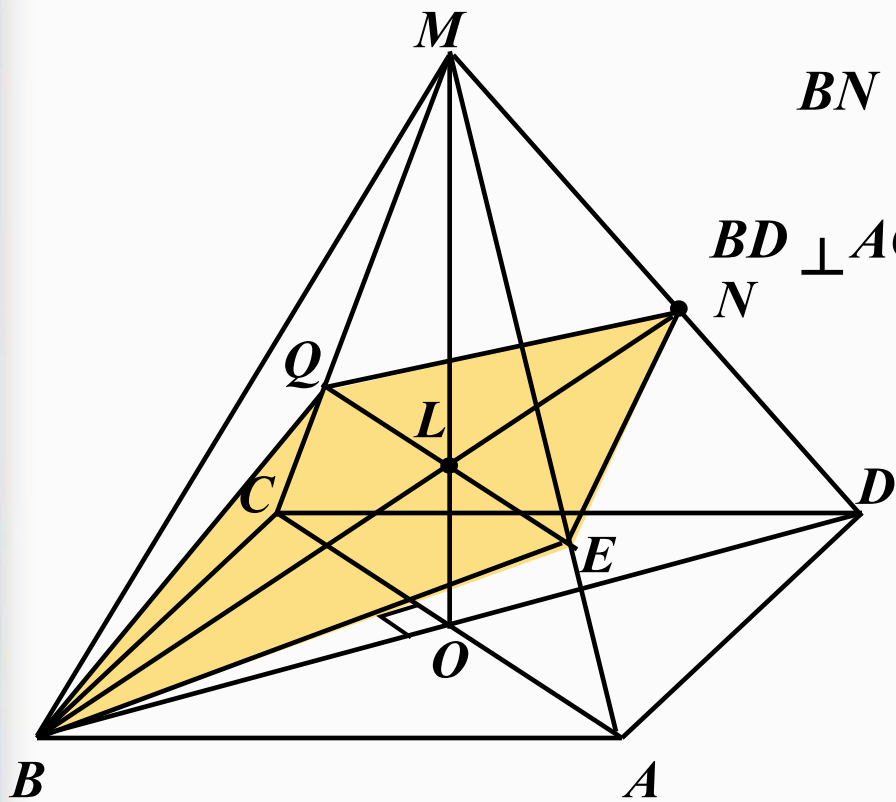
Решение:

$$BN = 5 \quad QE = 2\sqrt{2}$$

$$BD \perp AC \quad \begin{matrix} \text{ТП} \\ (n\text{-я } BN \text{ на } (ABD)) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} BN \perp AC \\ \text{н-я} \end{matrix}$$

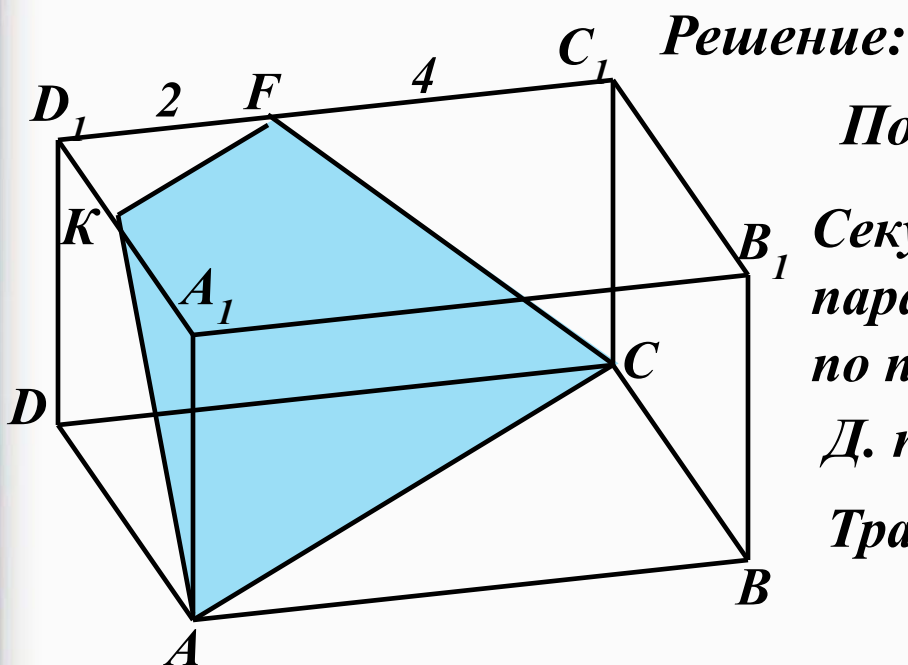
$$\left. \begin{array}{l} BN \perp AC \\ QE \parallel AC \end{array} \right| \Rightarrow BN \perp QE$$

Если в четырёхугольнике диагонали перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения диагоналей.



$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot QE = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad \text{Ответ : } 5\sqrt{2}$$

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1=1$. Точка F принадлежит ребру $C_1 D_1$ и делит его в отношении 2:1, считая от вершины C_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и F .



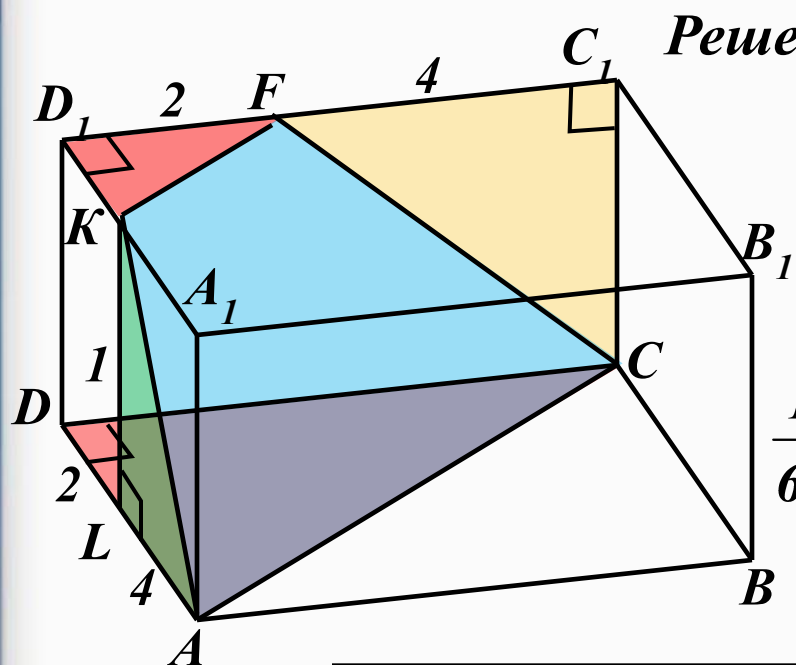
Построим сечение.

Секущая плоскость пересекает параллельные грани параллелепипеда по параллельным прямым.

Д. п.: $FK \parallel AC$.

Трапеция $AKFC$ – искомое сечение.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1 = 1$. Точка F принадлежит ребру $C_1 D_1$ и делит его в отношении 2:1, считая от вершины C_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и F .



Решение: $AC = 6\sqrt{2}$ (диагональ квадрата)

Треугольники KD_1F и ADC подобны

$$\frac{KF}{AC} = \frac{D_1K}{DA} = \frac{D_1F}{DC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{KF}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow KF = 2\sqrt{2} \quad \left| \quad \frac{D_1K}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow D_1K = 2 \right.$$

Д. п.: $LK \parallel AA_1$

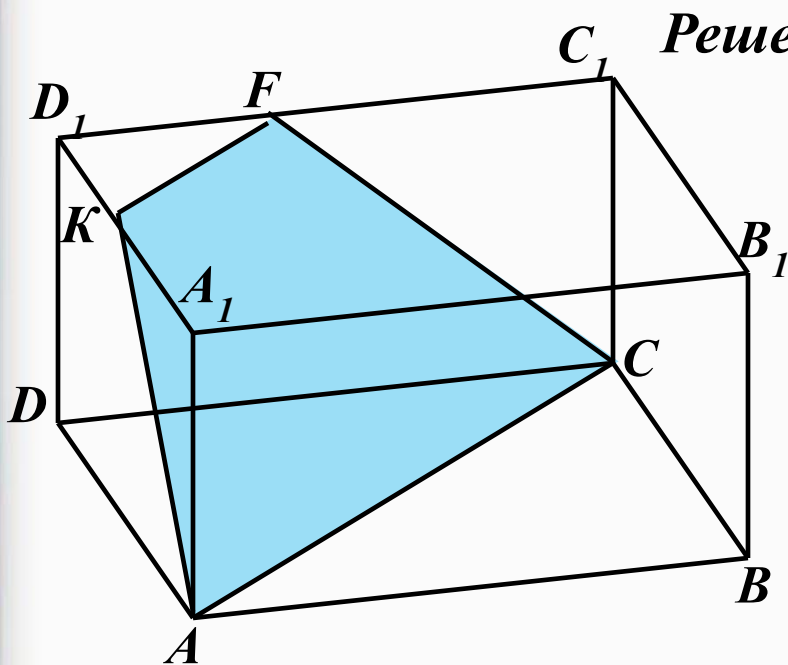
Из треугольника KLA :

$$KA = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Из треугольника FC_1C :

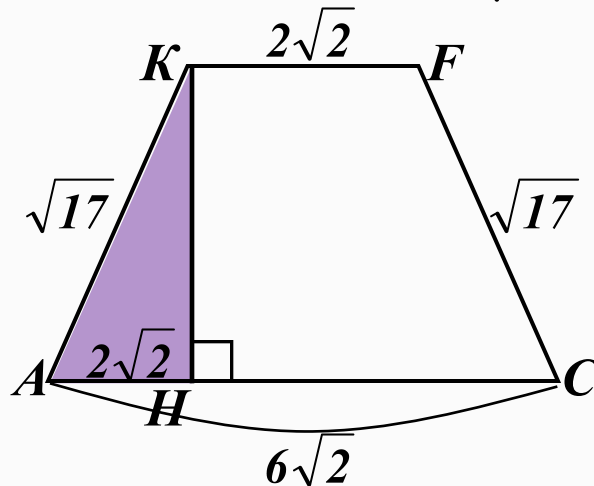
$$FC = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1 = 1$. Точка F принадлежит ребру $C_1 D_1$ и делит его в отношении 2:1, считая от вершины C_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и F .



Решение: $AC = 6\sqrt{2}$ $KF = 2\sqrt{2}$

$$KA = \sqrt{17} \quad FC = \sqrt{17}$$



Из треугольника KHA :

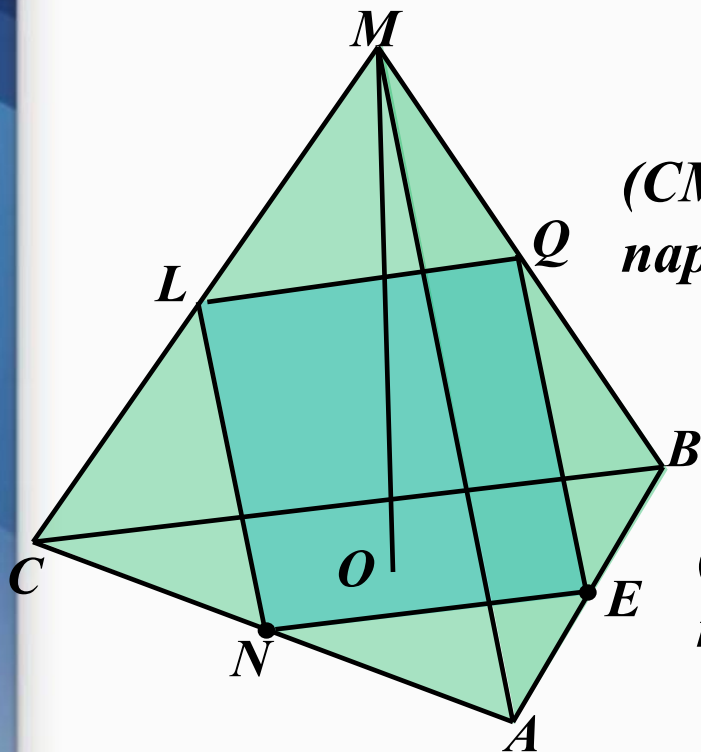
$$KH = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 3$$

$$\Rightarrow S_{\text{сеч}} = \frac{(2\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) \cdot 3}{2} = 12\sqrt{2}$$

Ответ : $12\sqrt{2}$

Задач
и

В правильной треугольной пирамиде $МABC$ с вершиной $М$ высота равна 3, а боковые ребра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой $МА$.



Решение:

*Построим сечение плоскостью α .
(СМА) проходит через прямую $МА$,
параллельную плоскости α и пересекает ее*

*\Rightarrow линия пересечения плоскостей
(СМА) и α параллельна $МА$.*

Д. п.: $NL \parallel AM$.

*(ВМА) проходит через прямую $МА$,
параллельную плоскости α и пересекает ее*

*\Rightarrow линия пересечения плоскостей
(СМА) и α параллельна $МА$.*

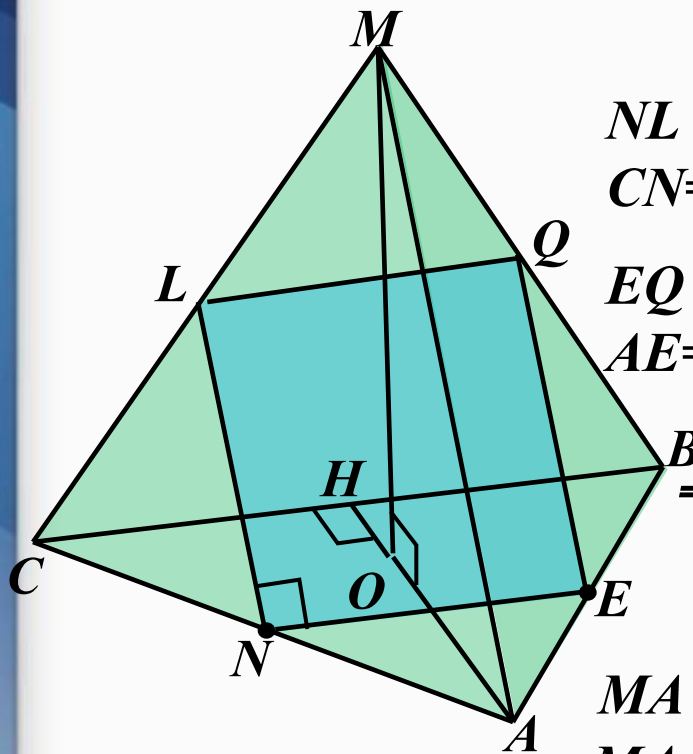
Д. п.: $EQ \parallel AM$.

Четырехугольник $NLQE$ – искомое сечение.

В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые ребра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA .

Т. Фалеса

Решение



$$\begin{array}{l|l} NL \parallel AM, \\ CN=NA \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} NL - \text{средняя линия} \\ \text{треугольника } CMA \end{array} \Rightarrow NL = \frac{1}{2} MA$$

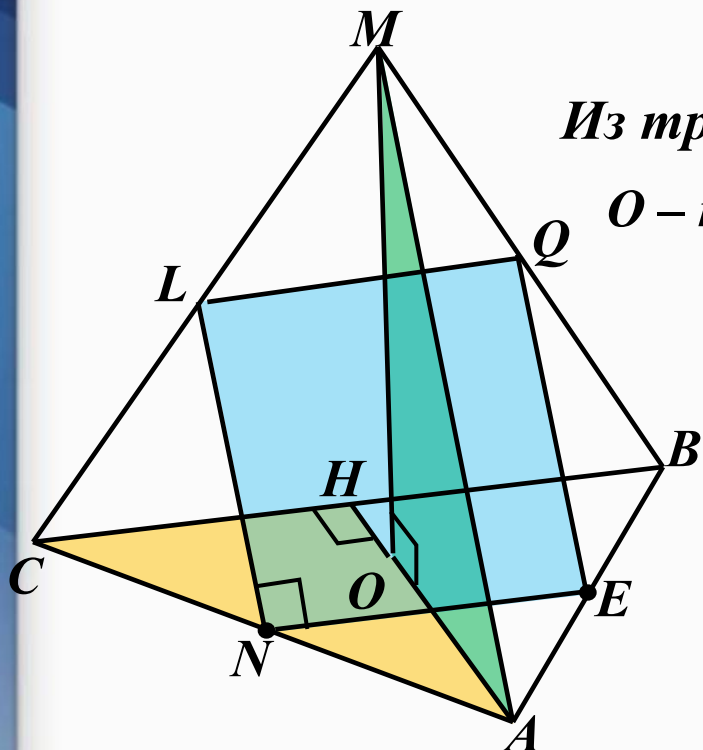
$$\begin{array}{l|l} EQ \parallel AM, \\ AE=EB \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} EQ - \text{средняя линия} \\ \text{треугольника } BMA \end{array} \Rightarrow EQ = \frac{1}{2} MA$$

$$\Rightarrow NL = EQ \parallel \Rightarrow NLQE - \text{параллелограмм}$$

$$AH \perp CB \quad \begin{array}{l} \text{т.п.} \\ \text{(н-я } MA \text{ на } (ABC)) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} MA \perp CB \\ \text{н-я} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} MA \perp CB \\ MA \parallel NL \\ CB \parallel NE \end{array} \Rightarrow NL \perp NE \Rightarrow NLQE - \text{прямоугольник}$$

В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые ребра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA .



Решение:

Из треугольника MAO : $OA = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$

O – точка пересечения медиан треугольника ABC

$$\Rightarrow \frac{AO}{OH} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{AO}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Из треугольника CAH :

$$AC = \frac{AH}{\cos CAH} = \frac{9\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 = CB$$

$$NE = \frac{1}{2}CB = \frac{9}{2}$$

$$LN = \frac{1}{2}MA = 3$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{9}{2} \cdot 3 = 13,5$$

Ответ : 13,5

На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены соответственно точки K и F такие, что $AK = 2A_1K$, $CF = 2C_1F$. Через точки B, K и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1 , к объему всего куба.

Решение:

Построим сечение куба плоскостью (KBF)

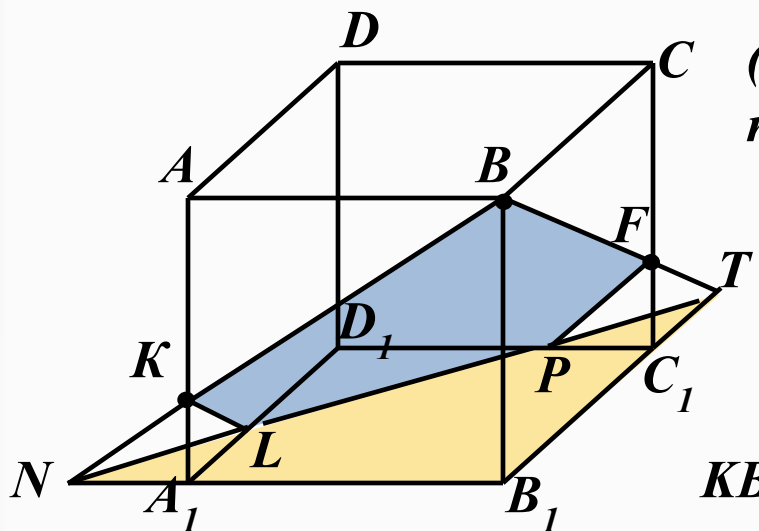
$(ABB_1) \parallel (DCC_1) \Rightarrow (KBF) \cap (ABB_1) \text{ и } (DCC_1)$
по параллельным прямым

Д.п.: $FP \parallel KB$

$(ADD_1) \parallel (BCC_1) \Rightarrow (KBF) \cap (ADD_1) \text{ и } (BCC_1)$
по параллельным прямым

Д.п.: $KL \parallel BF$

$KBFPL$ – искомое сечение



Отсеченная часть – пирамида с основанием $KBFPL$ и вершиной B_1 .

Такая идея возникнет сама собой, если построить сечение методом следов

Задача
И

На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены соответственно точки K и F такие, что $AK = 2A_1K$, $CF = 2C_1F$. Через точки B, K и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1 , к объему всего куба.

Решение:

Построим сечение куба плоскостью (KBF)

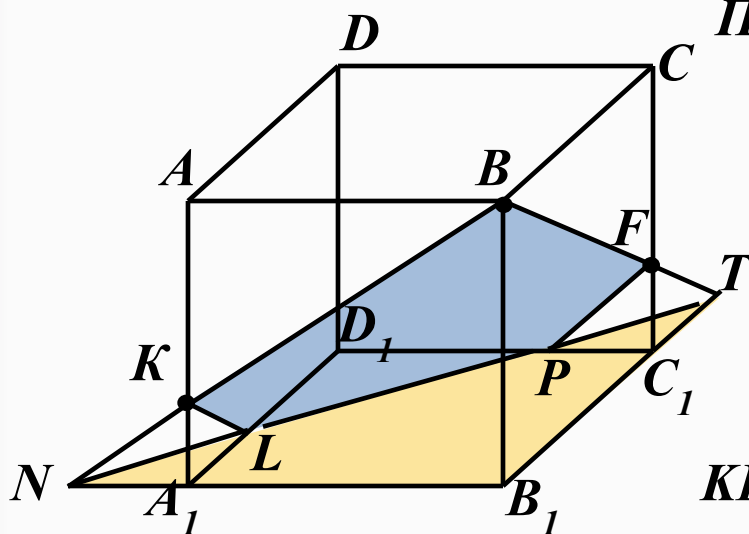
$BK \cap A_1 B_1 = N$ (лежат в одной плоскости)

$BF \cap B_1 C_1 = T$ (лежат в одной плоскости)

т. N и $T \in A_1 B_1 C_1$,

$NT \cap A_1 D_1 = L$, $NT \cap D_1 C_1 = P$

$KBFPL$ – искомое сечение



Отсеченная часть – пирамида $BNB_1 D$, от которой отрезаны равные пирамидки с основаниями NLA_1 и PTC_1

На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены соответственно точки K и F такие, что $AK=2A_1K, CF=2C_1F$. Через точки B, K и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1 , к объему всего куба.

Решение:

Пусть ребро куба = 3, тогда $V_{\text{куба}} = 27$ Треугольник NBB_1 подобен

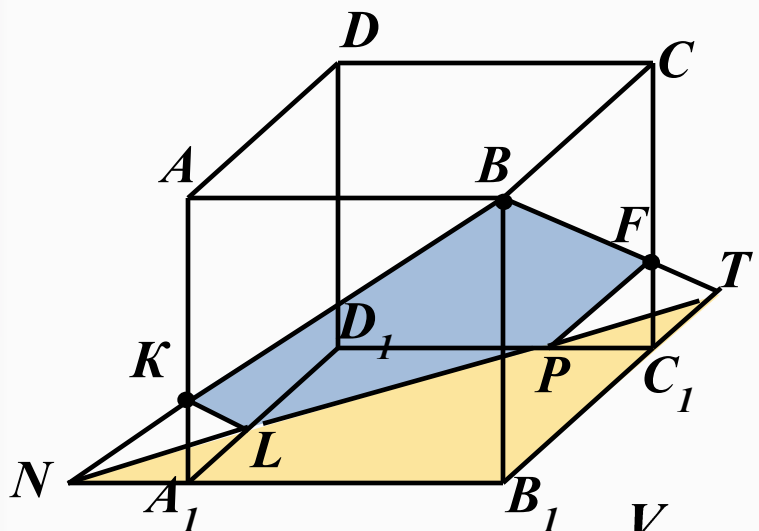
треугольнику NKA_1 $k=3/1$

$$\Rightarrow NA_1 = \frac{1}{3} NB_1 \quad NA_1 = \frac{1}{3} (NA_1 + 3)$$

$$NA_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow NB_1 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

Аналогично: $B_1T = \frac{9}{2}$

$$V_{BNTB_1} = \frac{1}{3} S_{NTB_1} \cdot BB_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{81}{8}$$



Найдем объемы маленьких равных пирамид

На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены соответственно точки K и F такие, что $AK=2A_1K$, $CF=2C_1F$. Через точки B, K и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1 , к объему всего куба.

Решение:

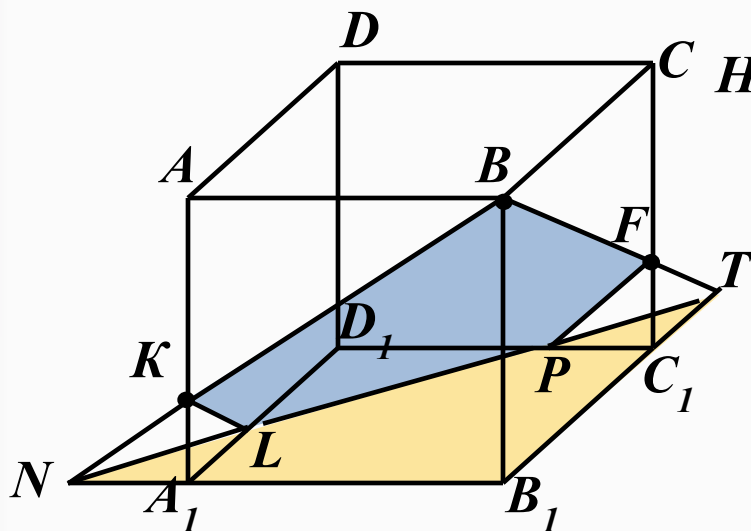
$$V_{\text{куба}} = 27 \quad V_{BNTB_1} = \frac{81}{8}$$

Найдем объемы маленьких равных пирамид

Они подобны пирамиде BNB_1T $k=3/1$

\Rightarrow их объемы относятся как $k^3=27/1$

$$V_{KA_1LN} = \frac{1}{27} S_{BNB_1T} = \frac{3}{8}$$



На ребрах AA_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены соответственно точки K и F такие, что $AK=2A_1K$, $CF=2C_1F$. Через точки B, K и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношения объема части, содержащей точку B_1 , к объему всего куба.

Решение:

$$V_{\text{куба}} = 27 \quad V_{BNTB_1} = \frac{81}{8}$$

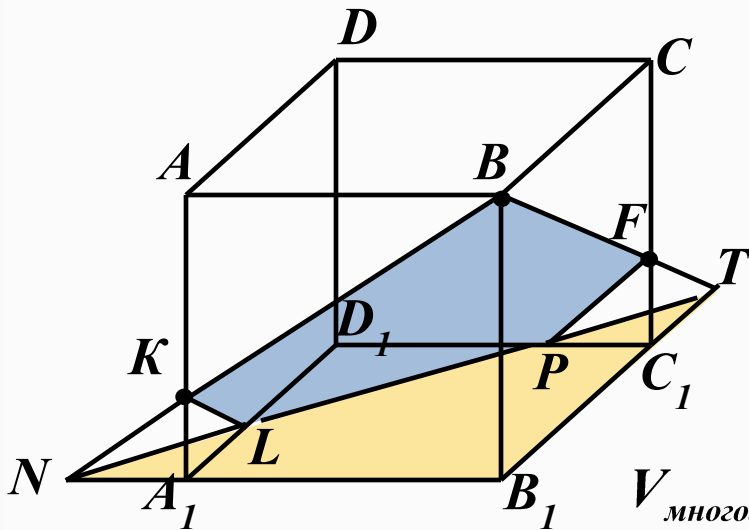
$$V_{\text{мал. пир}} = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{многогранника}} &= V_{BNTB_1} - V_{NA_1LK} - V_{TC_1FP} = \\ &= \frac{81}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = \frac{75}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{V_{\text{многогранника}}}{V_{\text{куба}}} = \frac{75}{8} : 27 = \frac{75}{8} \cdot \frac{1}{27} = \frac{25}{72}$$

Ответ : $\frac{25}{72}$

Задач
и



В прямом круговом цилиндре, осевое сечение которого квадрат со стороной 12, хорда CD , равная $6\sqrt{3}$, перпендикулярна диаметру AB . Найти площадь сечения цилиндра плоскостью CDA_1 , если AA_1 - образующая цилиндра.

Решение:

Сечением является фигура, ограниченная частью эллипса.

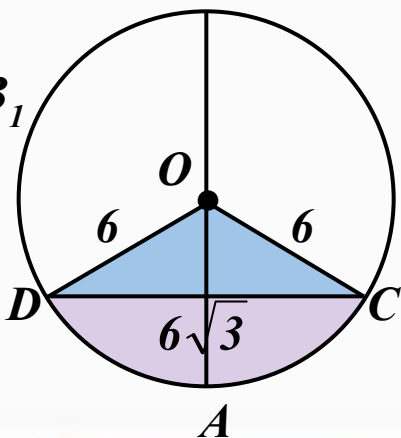
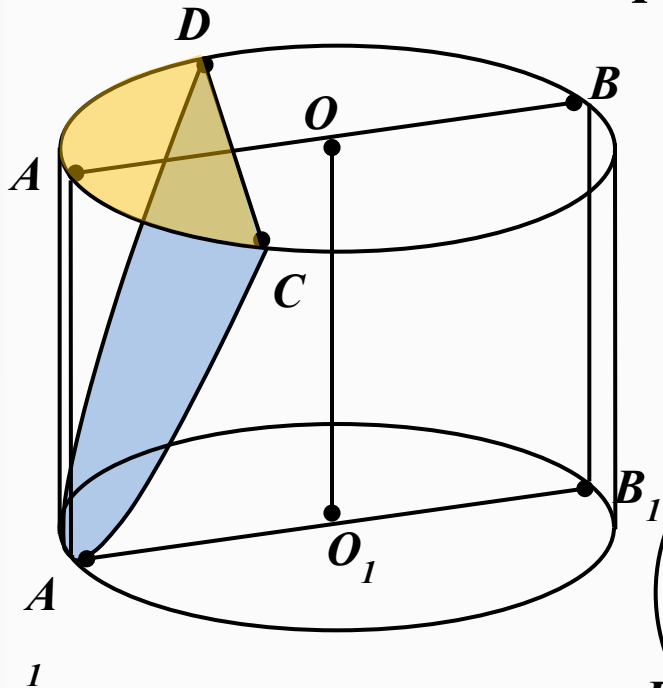
Сегмент круга ACD – ортогональная проекция сечения на плоскость (ADC)

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \angle((ADC); (A_1DC))}$$

Найдем площадь сегмента

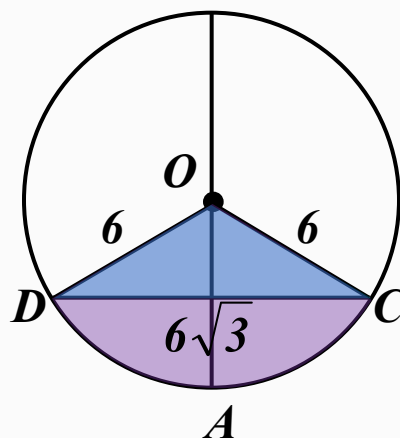
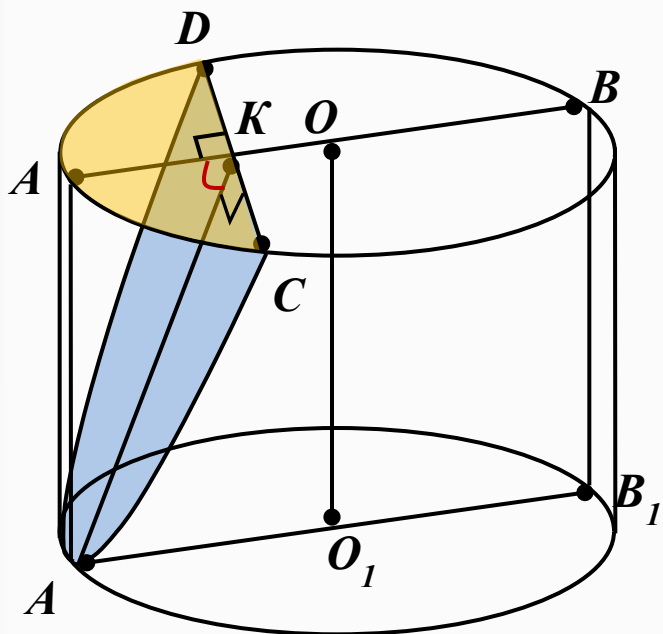
$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сектора}} - S_{\Delta DOC}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle DOC &= \frac{6^2 + 6^2 - (6\sqrt{3})^2}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \\ &= -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle DOC = 120^\circ \end{aligned}$$



В прямом круговом цилиндре, осевое сечение которого квадрат со стороной 12, хорда CD , равная $6\sqrt{3}$, перпендикулярна диаметру AB . Найти площадь сечения цилиндра плоскостью CDA_1 , если AA_1 - образующая цилиндра.

Решение:



$$\angle DOC = 120^{\circ}$$

$$S_{\triangle DOC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 120^{\circ} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi \cdot 6^2}{360^{\circ}} \cdot 120^{\circ} = 12\pi$$

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сектора}} - S_{\triangle DOC} = 12\pi - 9\sqrt{3}$$

Найдем $\cos \angle((ADC); (A_1DC))$

ТПП

$$AK \perp DC \Rightarrow A_1K \perp DC \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle AKK_1$ - линейный угол двугранного угла

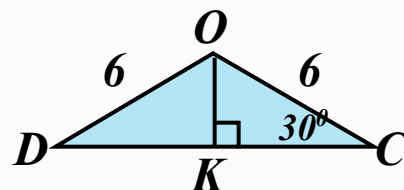
задач
и

В прямом круговом цилиндре, осевое сечение которого квадрат со стороной 12, хорда CD , равная $6\sqrt{3}$, перпендикулярна диаметру AB . Найти площадь сечения цилиндра плоскостью CDA_1 , если AA_1 - образующая цилиндра.

$$S_{\text{сегм}} = 12\pi - 9\sqrt{3}$$

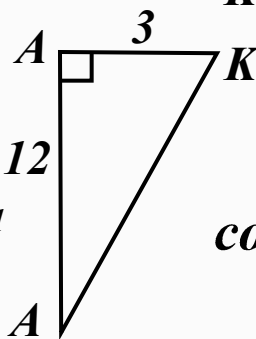
Решение:

Косинус искомого угла найдем из треугольника A_1AK



$$OK = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK = 6 - 3 = 3$$



$$A_1K = \sqrt{12^2 + 3^2} = 3\sqrt{17}$$

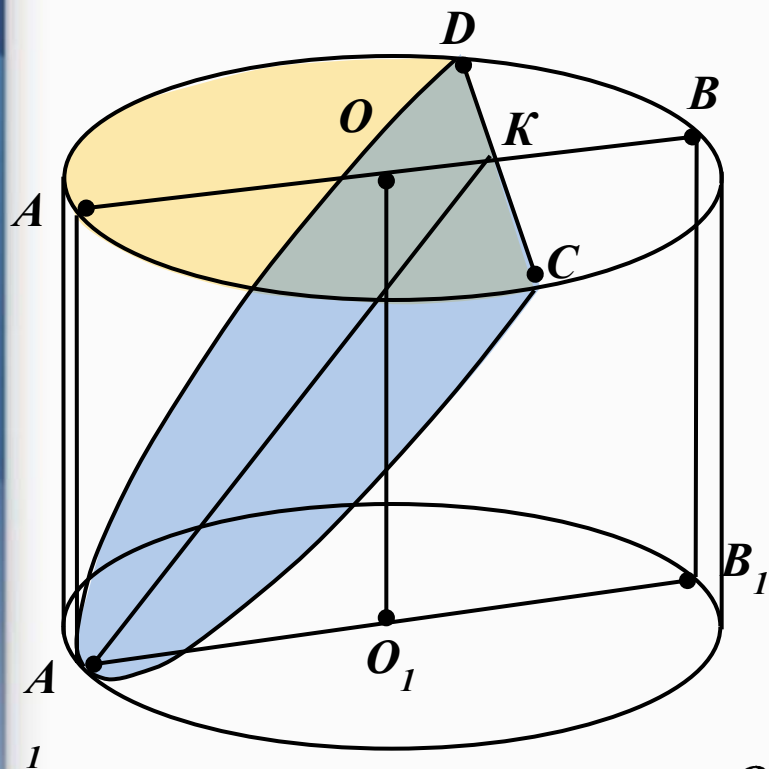
$$\cos AKK_1 = \frac{3}{3\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{np}}}{\cos AKK_1} = \sqrt{17}(12\pi - 9\sqrt{3}) = 3\sqrt{17}(4\pi - 3\sqrt{3})$$

Задач
и

В прямом круговом цилиндре, осевое сечение которого квадрат со стороной 12, хорда CD , равная $6\sqrt{3}$, перпендикулярна диаметру AB . Найти площадь сечения цилиндра плоскостью CDA_1 , если AA_1 - образующая цилиндра.

Решение:



Решение второго случая (хорда пересекает диаметр между точками O и B) аналогично.

Ответ : $3\sqrt{17}(4\pi - 3\sqrt{3}); 5(8\pi + 3\sqrt{3})$

Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение:

Д.п.: $OH \perp AB \stackrel{ТП}{\Rightarrow} SH \perp AB \Rightarrow$

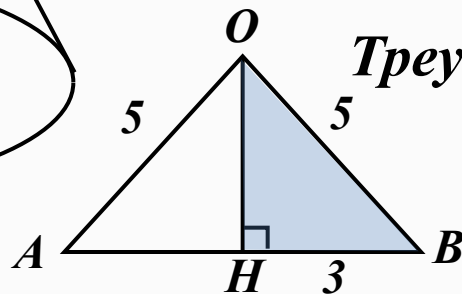
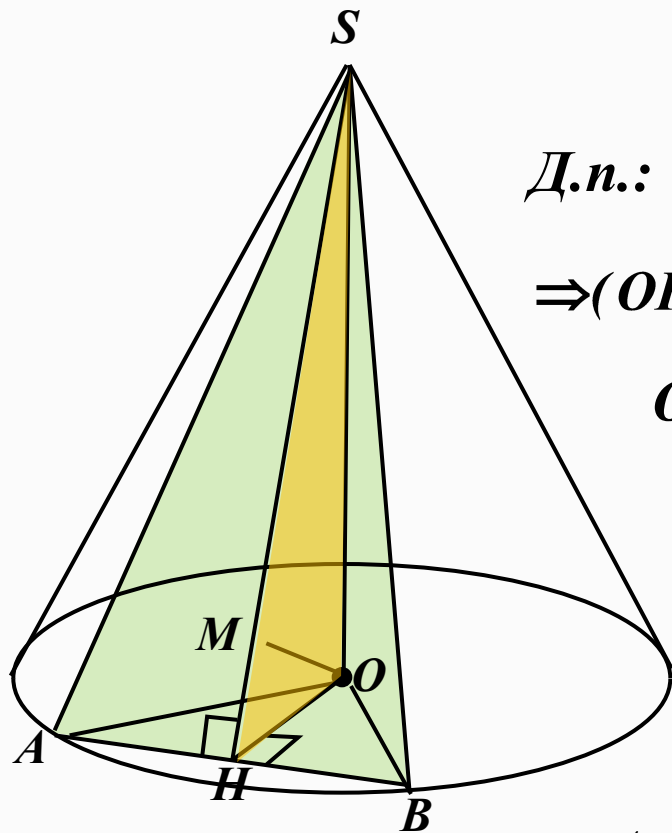
$\Rightarrow (OHS) \perp (ASB) \Rightarrow \rho(O; (ASB)) = OM \perp SH$

OM найдем из треугольника SOH

SO=12, найдем OH

Треугольник OHB – египетский

OH = 4



Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение:

OM найдем из треугольника SOH

$$SO=12$$

$$OH = 4$$

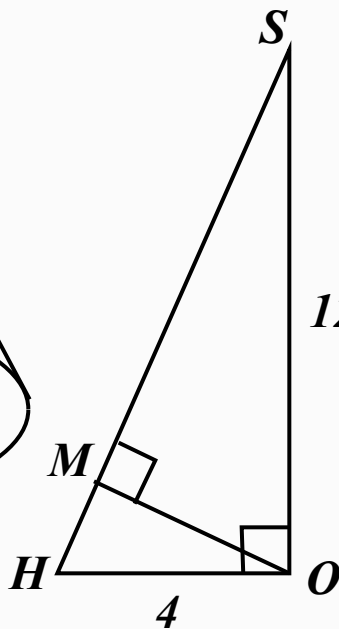
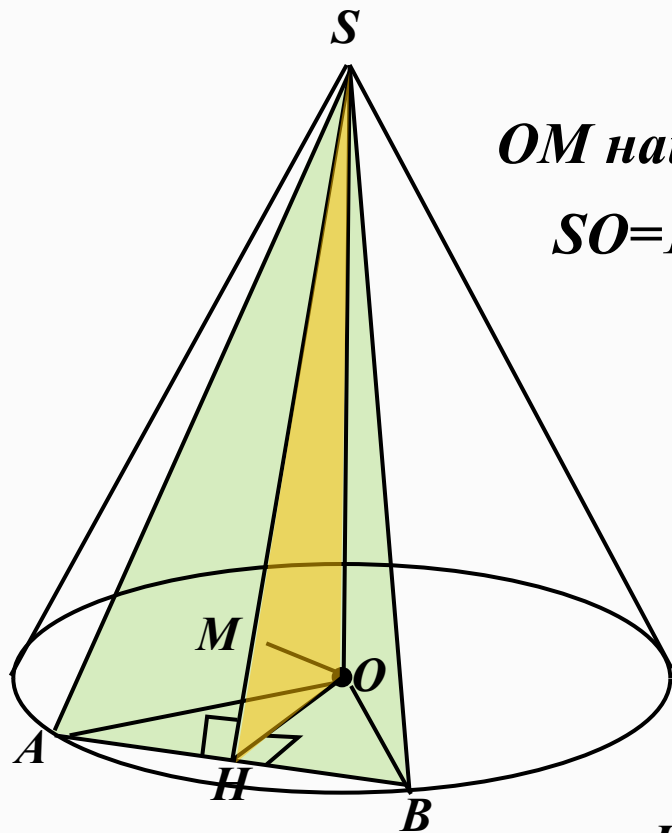
$$SH = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$$

$$S_{SHO} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$$

$$12 S_{SHO} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot SH = 24$$

$$\frac{1}{2} \cdot OM \cdot 4\sqrt{10} = 24$$

$$\text{Ответ : } OM = \frac{12}{\sqrt{10}}$$



Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр.
 Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7.
 Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара,
 а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.
 Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

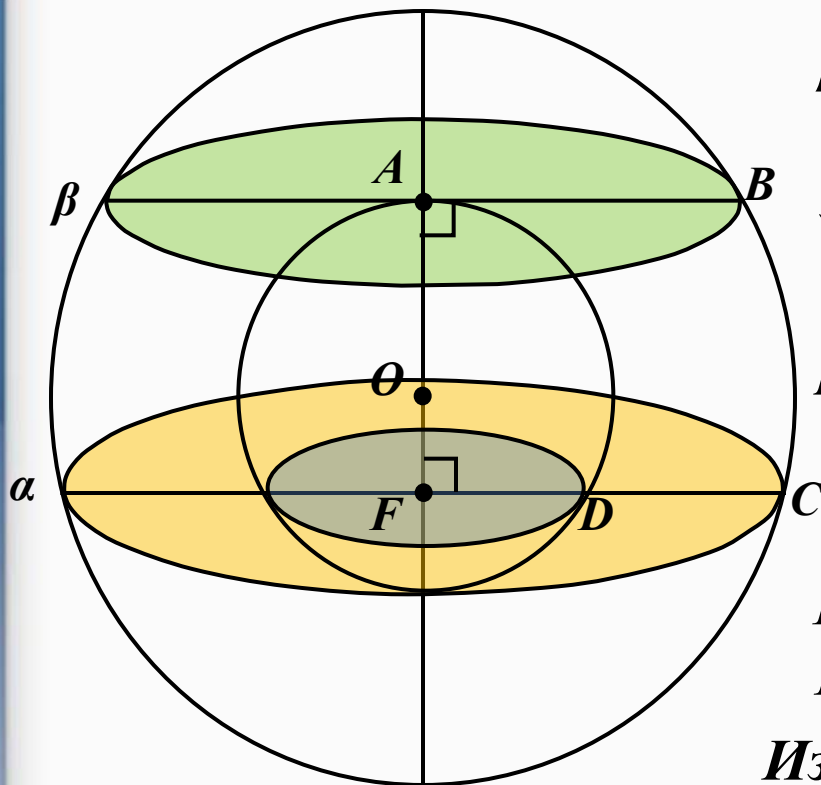
Решение:

β касательная малого шара \Rightarrow
 перпендикулярна его радиусу, а
 значит и радиусу большего шара
 $\alpha \parallel \beta$, а значит тоже перпендикулярна
 радиусу малого и большего шара

$$S_{\text{большого } \alpha} = \pi \cdot FC^2$$

В задаче нам важны радиусы сечений
 FD , FC , AB

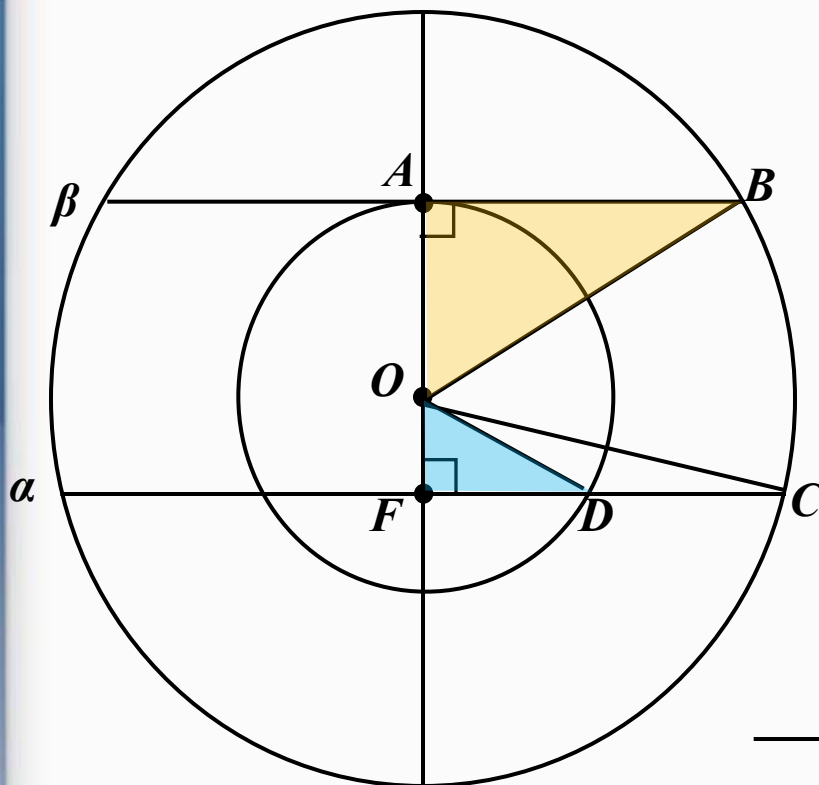
Избавимся от лишнего в чертеже



Назад

Задач
и

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр.
 Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7.
 Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара,
 а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.
 Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .



Решение:

$$S_{\text{большого}\alpha} = \pi \cdot FC^2$$

$$S_{\text{малого}\alpha} = \pi \cdot FD^2 = 7 \Rightarrow FD^2 = \frac{7}{\pi}$$

$$S_{\text{большого}\beta} = \pi \cdot AB^2 = 5 \Rightarrow AB^2 = \frac{5}{\pi}$$

$AO = OD$ - радиусы малого шара

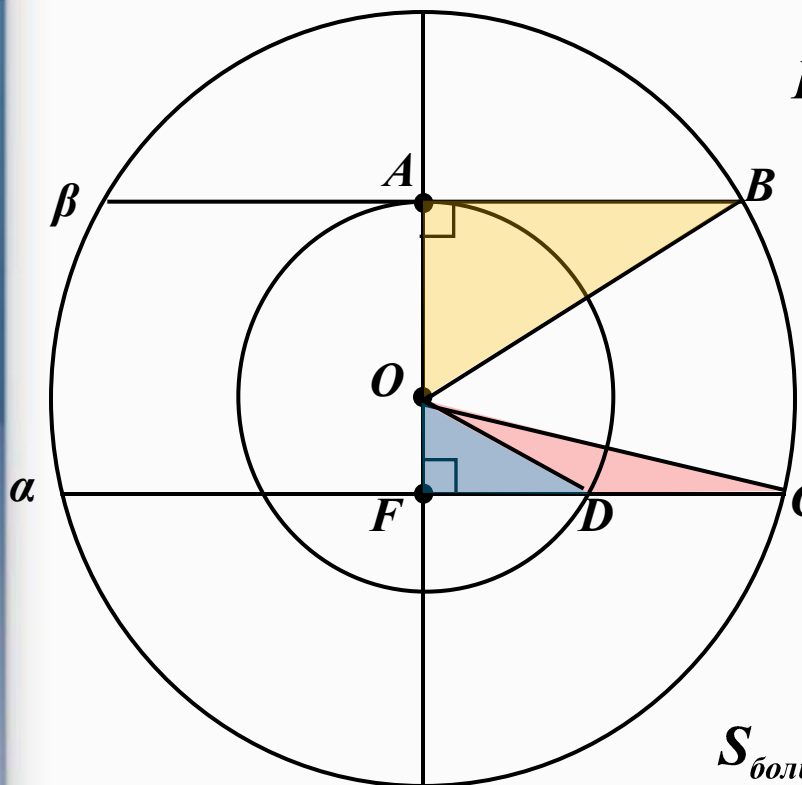
$OB = OC$ - радиусы большого шара

$$\triangle AOB : AO^2 = OB^2 - AB^2$$

$$\triangle FOD : OD^2 = OF^2 + FD^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OB^2 - AB^2 = OF^2 + FD^2$$

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр.
 Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7.
 Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара,
 а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5.
 Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .



Решение:

$$S_{\text{большого } \alpha} = \pi \cdot FC^2$$

$$FD^2 = \frac{7}{\pi} \quad AB^2 = \frac{5}{\pi}$$

$$AO = OD$$

$$OB = OC$$

$$OB^2 - AB^2 = OF^2 + FD^2$$

$$OC^2 - \frac{5}{\pi} = OF^2 + \frac{7}{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OC^2 - OF^2 = \frac{5}{\pi} + \frac{7}{\pi} = \frac{12}{\pi}$$

$$\Delta OFC : OC^2 - OF^2 = FC^2$$

$$S_{\text{большого } \alpha} = \pi \cdot FC^2 = \pi \cdot \frac{12}{\pi} = 12$$

Ответ : 12

Источники:

КИМ 2013

Тренировочные работы http://alexlarin.net/ege/2013/c2_2013.html