Теория игр

Лекция 6.

Игры с природой: принятие решений в условиях риска

16.10.2014

План лекции

6.1. Критерии оптимальности в условиях риска

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

Критерии оптимальности в условиях риска:

- критерий Байеса;
- критерий Лапласа;
- критерий максимальной вероятности;
- критерий Гермейера.

1.1 Критерий Байеса относительно выигрышей

Предположим, что игроку *A* известны не только состояния $П_1$, $П_2$,…$П_n$ в которых случайным образом может находиться природа, но и вероятности $(q_1, q_2,\ldots q_n)$ наступления этих состояний, при этом $\sum q_j = 1$.

Матрицу выигрышей игрока *А* и вероятности состояний природы *П* можно представить в виде общей матрицы:

$$
A = \begin{array}{|cccccc}
{}_{A_i}\!\!\!\!\diagdown^{\Pi_j} & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\
A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\
\boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{q_n}
\end{array}
$$

Чистую стратегию A_i можно определить как случайную величину со следующим законом распределения

A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{in}
q	q_1	q_2	…	q_n

Математическое ожидание данной случайной величины

$$\boxed{B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}, i = 1,2,\ldots,m}$$

Или средне взвешенное выигрышей *i*-ой строки матрицы *A* с весами $(q_1, q_2, \ldots q_n)$.

Критерий Байеса относительно выигрышей

позволяет выбрать максимальный из ожидаемых элементов матрицы доходности при известной вероятности возможных состояний природы:

$$\boxed{B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\}}$$

1.2 Критерий Байеса относительно рисков

Матрицу рисков игрока *А* и вероятности состояний природы *П* можно представить матрицей:

$$R = \left| \begin{array}{ccccc} {}^{\Pi_j}_{A_i} & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ A_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{q_n} \end{array} \right.$$

Показателем эффективности стратегии A_i по *критерию Байеса относительно рисков* является математическое ожидание рисков, расположенных в *i*-ой строке матрицы *R*.

$$B_i^r = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Байеса относительно рисков **позволяет выбрать минимальное значение из средних рисков при известной вероятности возможных состояний природы:**

$$\boxed{B^r = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij} \right\}}$$

Критерии Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, то есть по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

2.1 Критерий Лапласа относительно выигрышей

Вероятность состояний природы оценивается субъективно как равнозначные.

$$q_j = n^{-1}$$

$$\sum q_j = \sum n^{-1} = 1$$

Этот принцип называется – принцип недостаточного основания Лапласа.

Имеется игра с природой, в которой игрок А обладает m чистыми стратегиями A_i, природа П может случайным образом находиться в одном из n своих состояний $П_j$, а матрица выигрышей игрока А задается следующим образом:

$$A = \left| \begin{array}{cccccc} {}_{A_i}{}^{П_j} & П_1 & П_2 & \ldots & П_n \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1 = n^{-1}} & \boldsymbol{q_2 = n^{-1}} & \boldsymbol{\ldots} & \boldsymbol{q_n = n^{-1}} \end{array} \right.$$

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по *критерию Лапласа относительно выигрышей* является среднеарифметическое выигрышей при этой стратегии.

$$L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей предполагает выбор варианта стратегии с максимальной ожидаемой доходностью при равной вероятности наступления возможных стратегий природы.

$$L = \max\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}, i = 1,2,\ldots, m$$

2.2 Критерий Лапласа относительно рисков

Матрицу рисков игрока *А* и вероятности состояний природы *П* при критерии Лапласа относительно рисков можно представить матрицей:

$$R = \left| \begin{array}{ccccc} {}^{\Pi_j}_{A_i} & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ A_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1 = n^{-1}} & \boldsymbol{q_2 = n^{-1}} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{q_n = n^{-1}} \end{array} \right.$$

Показателем неэффективности чистой стратегии *A_i* по критерию *Лапласа относительно рисков* является среднеарифметическое рисков при этой стратегии.

$$L_i^r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$

Критерий Лапласа относительно рисков

предполагает выбор варианта стратегии с минимальным риском при равной вероятности наступления возможных состояний природы.

$$L^r = \min\left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \right\}, i = 1,2,\ldots,m$$

3. Критерий максимальной вероятности

Рассмотрим игру с природой размера m x n, где $m \geq 2$ и $n \geq 2$.

Известны вероятности q_j состояний природы $П_j$

Максимальная вероятность обозначается следующим образом:

$$q^{\max} = \max_{1 \leq j \leq 1} q_j$$

Максимальную вероятность может иметь не одно состояние природы. А также максимальное значение может быть у всех состояний природы при равных вероятностях $q_j = n^{-1}$.

Предположим, что состояния природы $П_{jк}$, $к = 1,2,\dots\sigma$, где σ – это номер состояний природы (столбцы), имеющих максимальную вероятность.

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по *критерию максимальной вероятности относительно выигрышей*, является наибольший выигрыш из выигрышей при этой стратегии и при состояниях природы $П_{jк}$ $к = 1,2,\ldots\sigma$, имеющих максимальную вероятность q^{max}.

$$\boxed{Q_i^p = \max_{1 \le \kappa \le \sigma} a_{ij_\kappa}, i = 1,2,\ldots m}$$

В связи с этим рассматривается матрица *m* x *σ*, которая получается путем исключения тех столбцов, у которых вероятности ниже максимального значения.

$$A = \begin{array}{ccccccc} A_i \backslash \Pi_j & \Pi_{j1} & \Pi_{j2} & \dots & \Pi_{j\sigma} & \\ A_1 & a_{1j1} & a_{1j2} & \dots & a_{1j\sigma} & Q_1^p \\ A_2 & a_{2j1} & a_{2j2} & \dots & a_{2j\sigma} & Q_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{mj1} & a_{mj2} & \dots & a_{mj\sigma} & Q_i^p \\ q_{j\kappa} & q_{j1} = q^{max} & q_{j2} = q^{max} & \dots & q_{j\sigma} = q^{max} & Q_m^p \end{array}$$

Ценой игры (Q^p) по критерию *максимальной вероятности относительно выигрышей* будет наибольший элемент из показателей Q_i^p эффективности

$$\boxed{Q^p = \max_{1 \le i \le m} Q_i^p}$$

Пример:

Тип товара		Спрос	
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	20	15	10
$А_2$	16	12	14
$А_3$	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию максимальной вероятности относительно выигрышей при вероятностях состояний природы
$q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}5$.

Решение:

Находим максимальную вероятность $q^{\max} = \max\limits_{1 \le j \le 1} q_j$

$$q^{\max} = (0{,}2;0{,}3;0{,}5) = 0{,}5$$

Максимальной вероятности соответствует состояние природы $П_3$, следовательно матрица примет следующий вид

Тип товара	$П_3$	Q_i^p
A_1	10	10
A_2	14	14
A_3	15	15
q_j	0,5	$Q^p = 15$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию максимальной вероятности относительно выигрышей является стратегия** ***A_3***

4. Критерий Гермейера относительно выигрышей

Рассмотрим игру с природой размера (*m ≥ 2*) и (*n ≥ 2*) с матрицей выигрышей *A*

$$A = \begin{array}{cccccc} A_i \backslash \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \mathbf{q_j} & \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \dots & \mathbf{q_n} \end{array}$$

По критерию Гермейера (A^G) эффективность чистых стратегий определяется следующим образом:

Выбрав чистую стратегию A_i, игрок A может получить выигрыш a_{ij}, если природа окажется в состоянии $П_j$. Но при этом природа может оказаться в этом состоянии с вероятностью $q_j = p(П_j)$. Поэтому игрок А может получить свой выигрыш (a_{ij}) только с вероятностью q_j.

В связи с этим рассматривается так называемый элемент Гермейера для этого выигрыша – $a_{ij}q_j$.

Матрица Гермейера состоит из элементов Гермейера и выглядит следующим образом:

$$
A^G = \begin{array}{cccccc}
A_i \backslash \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \ldots & \Pi_n \\
A_1 & a_{11}\, q_1 & a_{12}\, q_2 & \ldots & a_{1n}\, q_n \\
A_2 & a_{21}\, q_1 & a_{22}\, q_2 & \ldots & a_{2n}\, q_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_m & a_m\, q_1 & a_{m2}\, q_2 & \ldots & a_{mn}\, q_n \\
q_j & q_1 & q_2 & \ldots & q_n
\end{array}
$$

При выборе стратегии игрок *А* предполагает, что природа будет находиться *в самом неблагоприятном для него состоянии,* при котором элемент Гермейера будет являться самым минимальным среди всех элементов матрицы Гермейера соответствующие выбранной стратегии.

Этот элемент называется *показателем эффективности чистой стратегии* A_i *по критерию Гермейера* относительно выигрышей:

$$\boxed{G_i = \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j), i = 1,2,\ldots m}$$

Ценой игры в чистых стратегиях по ***критерию Гермейера*** относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера относительно выигрышей:

$$\boxed{G = \max_{1 \le i \le m} G_i}$$

Так же ценой игры в чистых стратегиях по критерию Гермейера относительно выигрышей можно назвать максимином матрицы Гермейера относительно выигрышей:

$$\boxed{G = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} (a_{ij} q_j)}$$

Пример:

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гермейера относительно выигрышей при вероятностях состояний природы

$q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}5$.

Решение:

Строим матрицу Гермейера с элементами $a_{ij}\,q_j$

Тип товара	Спрос $П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4	4,5	5
A_2	3,2	3,6	7
A_3	2,6	5,4	7,5

Находим минимальный выигрыш игрока А по всем стратегиям по формуле

$$G_i = \min_{1\le j\le n}(a_{ij}q_j)$$

G_1 = min (4; 4,5; 5) = 4;
G_2 = min (3,2; 3,6; 7) = 3,2;
G_3 = min (2,6; 5,4; 7,5) = 2,6.

$$G = \max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n}(a_{ij}q_j) = \max(4;3{,}2;2{,}6) = 4$$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию Гермейера относительно выигрышей является стратегия A_3**

Критерий Ходжа-Лемана относительно выигрышей

$$
A = \begin{array}{cccccc}
A_i \backslash \Pi_j & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\
A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\
\boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \dots & \boldsymbol{q_n}
\end{array}
$$

Критерий Ходжа-Лемана относительно выигрышей опирается одновременно на критерий Вальда и критерий Байеса.

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

При определении оптимальной стратегии по этому критерию вводится параметр (λ) достоверности информации о распределении вероятностей состояний природы $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, значение, которого находится в интервале [0, 1].

Если степень достоверности велика, то доминирует критерий Байеса, в противном случае критерий Вальда.

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию *Ходжа-Лемана* относительно выигрышей (*HL*) является:

$$\boxed{HL_i = \lambda B_i(q) + (1 - \lambda)W_i,\ i = 1,2,\ldots,m}$$

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

где

$B_i(q)$ **– показатель эффективности стратегии *A_i* по критерию Байеса относительно выигрышей с вектором *$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$* распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:**

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$

W_i **– показатель эффективности стратегии *A_i* по критерию Вальда, который определяется по формуле:**

$$W_i = \min_j a_{ij}$$

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

При любом показателе $\lambda \in [0,1]$ доверия игрока *A* распределению вероятностей $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ состояний природы показатель эффективности стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана (*HLi*):

$$\boxed{HL_i \geq Wi}$$

$$\boxed{HL_i \leq Bi}$$

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей:

$$\boxed{HL = \max_{1 \le i \le m}(HL_i) = \max(\lambda B_i(q) + (1-\lambda)W_i)}$$

Критерий Ходжа-Лемана применим в следующих случаях:

- **имеется информация о вероятностях состояний окружающей среды, однако эта информация получена на основе относительно небольшого числа наблюдений и может измениться;**
- **принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;**
- **при малом числе реализации допускается некоторый риск.**

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей при λ = 0,6 и при вероятностях состояний природы
q_1 = 0,2; q_2 = 0,3; q_3 = 0,5.

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Решение:

Вычислим средние выигрыши по критерию Байеса

$$B_1 = (20 \cdot 0{,}2) + (15 \cdot 0{,}3) + (10 \cdot 0{,}5) = 13{,}5$$

$$B_2 = (16 \cdot 0{,}2) + (12 \cdot 0{,}3) + (14 \cdot 0{,}5) = 13{,}8$$

$$B_3 = (13 \cdot 0{,}2) + (18 \cdot 0{,}3) + (15 \cdot 0{,}5) = 15{,}5$$

По критерию Вальда (W_i)

$W_1 = 10$; $W_2 = 12$; $W_3 = 13$

Найдем оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана по формуле

$HL_i = \lambda B_i(q) + (1 - \lambda)W_i$, $i = 1,2,\ldots,m$

$HL_1 = (0{,}6 \cdot 13{,}5) + (1 - 0{,}6) \cdot 10 = 8{,}1 + 4 = 12{,}1$

$HL_2 = (0{,}6 \cdot 13{,}8) + (1 - 0{,}6) \cdot 12 = 8{,}28 + 4{,}8 = 13{,}08$

$HL_3 = (0{,}6 \cdot 15{,}5) + (1 - 0{,}6) \cdot 13 = 9{,}3 + 5{,}2 = 14{,}5$

$HL = \max(\lambda B_i(q) + (1 - \lambda)W_i) = \max(12{,}1; 13{,}08; 14{,}5) = 14{,}5$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей является стратегия A_3**

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Критерий Ходжа-Лемана относительно рисков

$$R\,(HL) = \begin{array}{ccccc} \overset{\Pi_j}{A_i} & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ A_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & r_{m} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{q_n} \end{array}$$

Критерий Ходжа-Лемана относительно рисков опирается одновременно на критерий Байеса и критерий Сэвиджа.

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Показателем неэффективности чистой стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков (HL^r) является:

$$\boxed{HL_i^r = \lambda B_i^r(q) + (1-\lambda)S_i, i = 1,2,\ldots,m}$$

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

где

$B_i(q)$ – **показатель неэффективности стратегии *A_i* по критерию Байеса относительно рисков с вектором *$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$* распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:**

$$\boxed{B_i^r = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}}$$

S_i – **показатель неэффективности стратегии *A_i* по критерию Сэвиджа с вектором *$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$* распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:**

$$\boxed{S_i = \max_j r_{ij}}$$

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков является минимальное значение среди показателей неэффективности чистой стратегии A_i по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков:

$$\boxed{HL^r = \min(HL_i^r) = \min(\lambda B_i^r(q) + (1-\lambda)S_i)}$$

Критерии оптимальности чистых стратегий по критерию Ходжа-Лемана относительно выигрышей и относительно рисков <u>не эквивалентны</u>.

Пример:

Тип товара		Спрос	
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков при $\lambda = 0,6$ и при вероятностях состояний природы $q_1 = 0,2$; $q_2 = 0,3$; $q_3 = 0,5$.

6.2. Критерий Ходжа-Лемана

Решение:

Построим матрицу рисков.

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0

Найдем критерий Байеса относительно рисков

$$B_1^r = (0 \cdot 0{,}2) + (3 \cdot 0{,}3) + (5 \cdot 0{,}5) = 3{,}4 \qquad B_3^r = (7 \cdot 0{,}2) + (0 \cdot 0{,}3) + (0 \cdot 0{,}5) = 1{,}4$$

$$B_2^r = (4 \cdot 0{,}2) + (6 \cdot 0{,}3) + (1 \cdot 0{,}5) = 3{,}1$$

Найдем критерий Сэвиджа $S_1 = 5;\ S_2 = 6;\ S_3 = 7$

Найдем оптимальную стратегию по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков:

$$HL^r_1 = (0{,}6 \cdot 3{,}4) + (1 - 0{,}6) \cdot 5 = 2{,}04 + 2 = 4{,}04$$
$$HL^r_2 = (0{,}6 \cdot 3{,}1) + (1 - 0{,}6) \cdot 6 = 1{,}86 + 2{,}4 = 4{,}26$$
$$HL^r_3 = (0{,}6 \cdot 1{,}4) + (1 - 0{,}6) \cdot 7 = 0{,}84 + 2{,}8 = 3{,}64$$

$$HL^r = \min\,(4{,}04;\ 4{,}26;\ 3{,}64) = 3{,}64$$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию Ходжа-Лемана относительно рисков является стратегия A_3**

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

Критерий Гермейера-Гурвица относительно выигрышей

Данный критерий представляет собой критерий Гурвица относительно матрицы Гермейера.

$$A^G = \begin{array}{cccccc} {}^{\Pi_j}_{A_i} & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ A_1 & a_{11}\,q_1 & a_{12}\,q_2 & \dots & a_{1n}\,q_n \\ A_2 & a_{21}\,q_1 & a_{22}\,q_2 & \dots & a_{2n}\,q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_m\,q_1 & a_{m2}\,q_2 & \dots & a_{mn}\,q_n \\ \boldsymbol{q_j} & \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \dots & \boldsymbol{q_n} \end{array}$$

При этом если $0 \leq \lambda \leq 1$, то λ это показатель оптимизма игрока А, тогда показателем пессимизма игрока будет $0 \leq (1 - \lambda) \leq 1$.

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

Показателем эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей (*GH*) является:

$$\boxed{GH_i = (1-\lambda)\cdot G_i + \lambda\cdot M_i,\ i =} \ 1,2,\ldots,m$$

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

где

G_i – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Гермейера относительно выигрышей с вектором $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ распределения вероятностей состояний природы, который определяется по формуле:

$$\boxed{G_i = \min_{1 \le j \le n}(a_{ij} q_j)}$$

M_i – показатель эффективности стратегии A_i по критерию Гурвица, относительно матрицы Гермейера, который определяется по формуле:

$$\boxed{M_i = \max_{1 \le j \le n}(a_{ij} q_j)}$$

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

Ценой игры в чистых стратегиях по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей является максимальное значение среди показателей эффективности чистой стратегии A_i по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей:

$$\boxed{GH = \max\left((1-\lambda)\cdot G_i + \lambda\cdot M_i\right),\ i = 1,2,\ldots,m}$$

Пример:

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	20	15	10
$А_2$	16	12	14
$А_3$	13	18	15

Найти оптимальную стратегию по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей при λ = 0,6 и при вероятностях состояний природы $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}5$.

Решение:

Строим матрицу Гермейера с элементами $a_{ij}\, q_j$

Тип товара	Спрос		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4	4,5	5
A_2	3,2	3,6	7
A_3	2,6	5,4	7,5

Находим минимальный выигрыш игрока А по всем стратегиям по формуле

$$G_i = \min_{1 \le j \le n}(a_{ij} q_j)$$

G_1 = min (4; 4,5; 5) = 4;
G_2 = min (3,2; 3,6; 7) = 3,2;
G_3 = min (2,6; 5,4; 7,5) = 2,6.

Находим максимальный выигрыш игрока А по всем стратегиям по формуле

$$M_i = \max_{1 \le j \le n}(a_{ij} q_j)$$

M_1 = max (4; 4,5; 5) = 5
M_2 = max (3,2; 3,6; 7) = 7
M_3 = max (2,6; 5,4; 7,5) = 7,5

6.3. Критерий Гермейера-Гурвица

Найдем критерии Гермейера-Гурвица относительно выигрышей по каждой стратегии по формуле:

$GH_i = (1 - \lambda) \cdot G_i + \lambda \cdot M_i$

$GH_1 = (1 - 0,6) \cdot 4 + 0,6 \cdot 5 = 1,6 + 3 = 4,6$
$GH_2 = (1 - 0,6) \cdot 3,2 + 0,6 \cdot 7 = 1,28 + 4,2 = 5,48$
$GH_3 = (1 - 0,6) \cdot 2,6 + 0,6 \cdot 7,5 = 5,54$

Найдем критерий Гермейера-Гурвица для данной задачи

$GH = max\ ((1 - \lambda) \cdot G_i + \lambda \cdot M_i)$
$GH = max\ (4,6;\ 5,48;\ 5,54) = 5,54$

Ответ: **оптимальной стратегией по критерию Гермейера-Гурвица относительно выигрышей является стратегия A_3**

Критерий Байеса

$$B = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij} \right\}$$

Критерий Лапласа

$$\boldsymbol{L = max\left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}}$$

$$q^{\max} = \max_{1 \le j \le 1} q_j$$