Динамические структуры данных (язык Паскаль)

1. Указатели
2. Динамические массивы
3. Структуры
4. Списки
5. Стеки, очереди, деки
6. Деревья
7. Графы

© К.Ю. Поляков, 2008-2010

Динамические структуры данных (язык Паскаль)

Тема 1. Указатели

© К.Ю. Поляков, 2008-2010

Статические данные

```
var x, y: integer;
    z: real;
    A: array[1..10] of real;
    str: string;
```

- переменная (массив) имеет **имя**, по которому к ней можно обращаться
- **размер** заранее известен (задается при написании программы)
- память выделяется **при объявлении**
- размер **нельзя увеличить** во время работы программы

Динамические данные

- размер заранее неизвестен, определяется во время работы программы
- память выделяется во время работы программы
- нет имени?

Проблема:

как обращаться к данным, если нет имени?

Решение:

использовать адрес в памяти

Следующая проблема:

в каких переменных могут храниться адреса?

как работать с адресами?

Указатели

Указатель – это переменная, в которую можно записывать адрес другой переменной (или блока памяти).

Объявление:

указатель

```
var pC: ^char;      // адрес символа
    pI: ^integer;   // адрес целой переменной
    pR: ^real;      // адрес вещ. переменной
```

Как записать адрес:

```
var m: integer;     // целая переменная
    pI: ^integer;   // указатель
  A: array[1..2] of integer; // массив
...
pI:= @m;      // адрес переменной m
pI:= @A[1];   // адрес элемента массива A[1]
pI:= nil;     // нулевой адрес
```

адрес ячейки

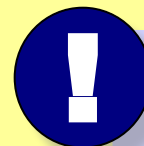
Обращение к данным через указатель

```
program qq;
var m, n: integer;
    pI: ^integer;
begin
  m := 4;
  pI := @m;
  writeln('Адрес m = ', pI); // вывод адреса
  writeln('m = ', pI^); // вывод значения
  n := 4*(7 - pI^);      // n = 4*(7 - 4) = 12
  pI^ := 4*(n - m);      // m = 4*(12 – 4) = 32
end.
```

«вытащить» значение по адресу

Обращение к данным (массивы)

```
program qq;
var i: integer;
    A: array[1..4] of integer;
    pI: ^integer;
begin
  for i:=1 to 4 do A[i] := i;
  pI := @A[1]; // адрес A[1]
  while ( pI^ <= 4 ) // while( A[i] <= 4 )
    do begin
    pI^ := pI^ * 2;  // A[i] := A[i]*2;
    pI := pI + 1; // к следующему элементу
  end;
end.
```

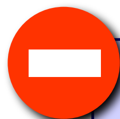


Не работает в *PascalABC.NET*!

переместиться к следующему элементу = изменить адрес на **sizeof(integer)**

Что надо знать об указателях

- указатель – это переменная, в которой можно хранить адрес другой переменной;
- при объявлении указателя надо указать тип переменных, на которых он будет указывать, а перед типом поставить знак `^`;
- знак `@` перед именем переменной обозначает ее адрес;
- запись `p^` обозначает *значение* ячейки, на которую указывает указатель **p**;
- `nil` – это *нулевой указатель*, он никуда не указывает
- при изменении значения указателя на **n** он в самом деле сдвигается к **n**-ому следующему числу данного типа (для указателей на целые числа – на **n*sizeof(integer)** байт).



Нельзя использовать указатель, который указывает неизвестно куда (будет сбой или зависание)!

Динамические структуры данных (язык Паскаль)

Тема 2. Динамические массивы

© К.Ю. Поляков, 2008-2010

Где нужны динамические массивы?

Задача. Ввести размер массива, затем – элементы массива. Отсортировать массив и вывести на экран.

Проблема:
размер массива заранее неизвестен.

Пути решения:
1) выделить память «с запасом»;
2) выделять память тогда, когда размер стал известен.

Алгоритм:
3) ввести размер массива;
4) **выделить память**
5) ввести элементы массива;
6) отсортировать и вывести на экран;
7) **удалить массив**

Использование указателей *(Delphi)*

```
program qq;
type intArray = array[1..1] of integer;
var A: ^intArray;
    i, N: integer;
begin
  writeln('Размер массива>');
  readln(N);
  GetMem(pointer(A), N*sizeof(integer));
  for i := 1 to N do
    readln(A[i]);
  ... { сортировка }
  for i := 1 to N do
    writeln(A[i]);
  FreeMem(pointer(A));
end.
```

какой-то массив целых чисел

выделить память

работаем так же, как с обычным массивом!

освободить память

Использование указателей

- для выделения памяти используют процедуру **GetMem**

```
GetMem( указатель, размер в байтах );
```

- указатель должен быть приведен к типу ***pointer*** – указатель без типа, просто адрес какого-то байта в памяти;
- с динамическим массивом можно работать так же, как и с обычным (статическим);
- для освобождения блока памяти нужно применить процедуру **FreeMem**:

```
FreeMem ( указатель );
```

Ошибки при работе с памятью

Запись в «чужую» область памяти:

память не была выделена, а массив используется.

Что делать: так не делать.

Выход за границы массива:

обращение к элементу массива с неправильным номером, при записи портятся данные в «чужой» памяти.

Что делать: если позволяет транслятор, включать проверку выхода за границы массива.

Указатель удаляется второй раз:

структура памяти нарушена, может быть все, что угодно.

Что делать : в удаленный указатель лучше записывать `nil`, ошибка выявится быстрее.

Утечка памяти:

ненужная память не освобождается.

Что делать : убирайте «мусор»
(в среде .NET есть сборщик мусора!)

Динамические массивы*(Delphi)*

```
program qq;
var A: array of integer;
    i, N: integer;
begin
  writeln('Размер массива>');
  readln(N);
  SetLength ( A, N );
  for i := 0 to N-1 do
    readln(A[i]);
  ... { сортировка }
  for i := 0 to N-1 do
    writeln(A[i]);
  SetLength( A, 0 );
end.
```

какой-то массив целых чисел

выделить память

нумерация с **НУЛЯ**!

освободить память

Динамические массивы *(Delphi)*

- при объявлении массива указывают только его тип, память не выделяется:

```
var A: array of integer;
```

- для выделения памяти используют процедуру **SetLength** *(установить длину)*

```
SetLength ( массив, размер );
```

- номера элементов начинаются с **НУЛЯ**!
- для освобождения блока памяти нужно установить нулевую длину через процедуру **SetLength**:

```
SetLength ( массив, 0 );
```

Динамические матрицы *(Delphi)*

Задача. Ввести размеры матрицы и выделить для нее место в памяти во время работы программы.

Проблема:

размеры матрицы заранее неизвестны

Решение:

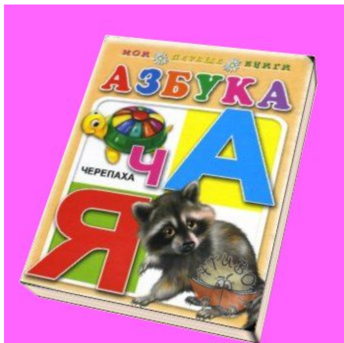
```
var A: array of array of integer;
    N, M: integer;
begin
  writeln('Число строк и столбцов>');
  readln(N, M);
  SetLength ( A, N, M );
  ... // работаем, как с обычной матрицей
  SetLength( A, 0, 0 );
end.
```

Динамические структуры данных (язык Паскаль)

Тема 3. Структуры (записи)

© К.Ю. Поляков, 2008-2010

Структуры (в Паскале – *записи*)



Свойства:

- автор (*строка*)
- название (*строка*)
- год издания (*целое число*)
- количество страниц (*целое число*)

Задача: объединить эти данные в единое целое

Структура (запись) – это тип данных, который может включать в себя несколько *полей* – элементов разных типов (в том числе и другие структуры).

Размещение в памяти

автор	название	год издания	количество страниц
40 символов	80 символов	целое	целое

Одна запись

Объявление (выделение памяти):

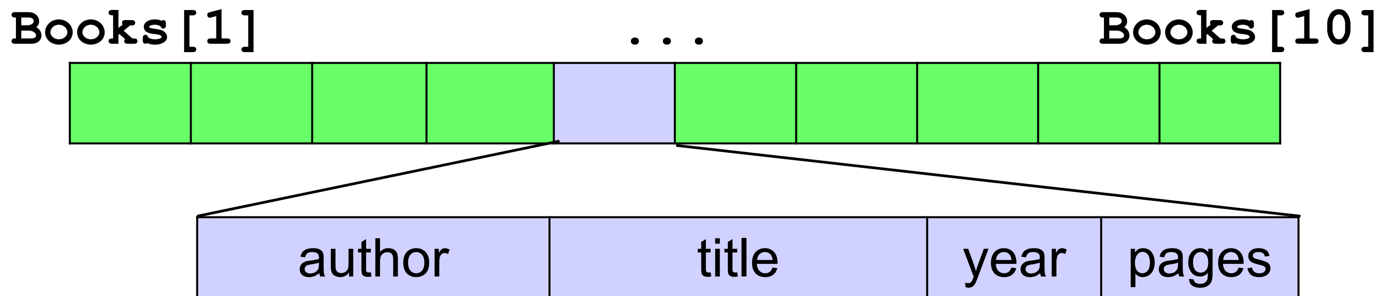

```
var Book: record
    author: string[40]; // автор, строка
    title:  string[80]; // название, строка
    year:   integer; // год издания, целое
    pages:  integer;    // кол-во страниц, целое
  end;
```

Обращение к полям:

Для обращения к полю записи используется точка!

```
readln(Book.author);    // ввод
readln(Book.title);
Book.year := 1998;      // присваивание
if Book.pages > 200 then    // сравнение
   writeln(Book.author, '.', Book.title); // вывод
```

Массив записей



Объявление (выделение памяти):

```
const N = 10;
var aBooks: array[1..N] of record
    author: string[40];
    title:  string[80];
    year:   integer;
    pages:  integer;
  end;
```

Массив записей

Обращение к полям:

```
for i:=1 to N do begin
   readln(aBooks[i].author);
   readln(aBooks[i].title);
   ...
end;
for i:=1 to N do
   if aBooks[i].pages > 200 then
      writeln(aBooks[i].author, '.',
                  aBooks[i].title);
```

aBooks[i].author – обращение к полю **author** записи **aBooks[i]**

Новый тип данных – запись

Объявление типа:

Память не выделяется!

```
type TBook = record
    author: string[40]; // автор, строка
    title:  string[80]; // название, строка
    year: integer;// год издания, целое
    pages : integer;    // кол-во страниц, целое
  end;
```

TBook – *Type Book («тип книга»)* – удобно!

Объявление переменных и массивов:

```
const N = 10;
var Book: TBook; // одна запись
    aBooks: array[1..N] of TBook;  // массив
```

Записи в процедурах и функциях

Процедура:

```
procedure ShowAuthor ( b: TBook );
begin
  writeln ( b.author );
end;
```

Функция:

```
function  IsOld( b: TBook ): boolean;
begin
  IsOld := b.year < 1900;
end;
```

Основная программа:

```
Book.author := 'А.С. Пушкин';
ShowAuthor ( Book );
Book.year := 1800;
writeln( IsOld(Book) );
```

Файлы записей

Объявление указателя на файл:

```
var F: file of TBook;
```

Запись в файл:

```
Assign(F, 'books.dat'); { связать с указателем }
Rewrite(F);             { открыть файл для запись }
writeln(F, Book);       { запись }
for i:=1 to 5 do
  writeln(aBook[i]);    { запись }
Close(F);               { закрыть файл }
```

Чтение из файла

Известное число записей:

```
Assign(F, 'books.dat'); { связать с указателем }
Reset(F);               { открыть для чтения }
Read(F, Book);               { чтение }
for i:=1 to 5 do
  Read(F, aBook[i]); { чтение }
Close(F);               { закрыть файл }
```

«Пока не кончатся»:

пока не дошли до конца файла F
EOF = *end of file*

```
count := 0;
while not eof(F) do begin
  count := count + 1;       { счетчик }
  Read(F, aBook[count]);  { чтение }
end;
```

В чем может быть проблема!

Пример программы

Задача: в файле `books.dat` записаны данные о книгах в виде массива структур типа `TBook` (не более 100). Установить для всех 2008 год издания и записать обратно в тот же файл.

полное описание структуры

```
type TBook  … ;
const MAX = 100;
var aBooks: array[1..MAX] of TBook;
    i, N: integer;
    F: file of TBook;
begin
  { прочитать записи из файла, N - количество }
  for i:=1 to N do
    aBooks[i].year := 2008;
  { сохранить в файле }
end.
```

Пример программы

Чтение «пока не кончатся»:

```
Assign(f, 'books.dat');
Reset(f);
N := 0;
while not eof(F) and (N < MAX) do begin
  N := N + 1;
  read(F, aBooks[N]);
end;
Close(f);
```

чтобы не выйти за пределы массива

Сохранение:

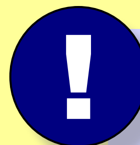
```
Assign(f, 'books.dat'); { можно без этого }
Rewrite(f);
for i:=1 to N do write(F, aBooks[i]);
Close(f);
```

Выделение памяти под запись

```
var pB: ^TBook;
begin
  New(pB);
  pB^.author := 'А.С. Пушкин';
  pB^.title := 'Полтава';
  pB^.year := 1990;
  pB^.pages := 129;
  Dispose(pB);
end.
```

переменная-указатель на **TBook**

выделить память под запись, записать адрес в **pB**



Для обращения к полю записи по адресу используется знак **^**

освободить память

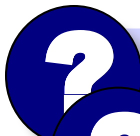
Сортировка массива записей

Ключ (ключевое поле) – это поле записи (или комбинация полей), по которому выполняется сортировка.

```
const N = 100;
var aBooks: array[1..N] of TBook;
    i, j, N: integer;
    temp: TBook; { для обмена }
begin
 { заполнить массив aBooks }
 { отсортировать = переставить }
 for i:=1 to N do
   writeln(aBooks[i].title,
           aBooks[i].year:5);
end.
```

Сортировка массива записей

```
for i:=1 to N-1 do
   for j:=N-1 downto i do
     if aBooks[j].year > aBooks[j+1].year
     then begin
       temp := aBooks[j];
       aBooks[j] := aBooks[j+1];
       aBooks[j+1] := temp;
     end;
```



Какой ключ сортировки?

Какой метод сортировки?

Что плохо?

Сортировка массива записей

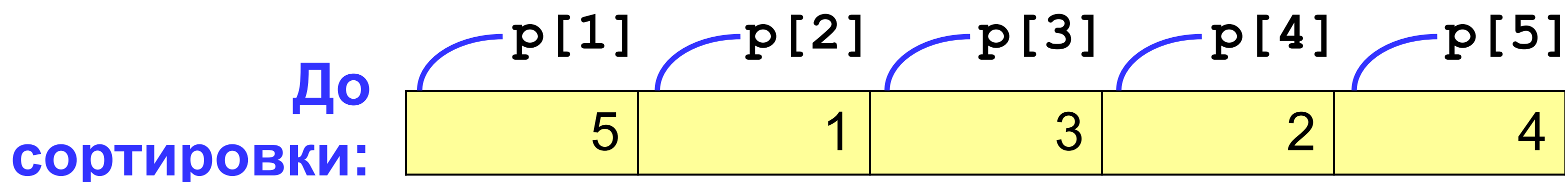
Проблема:

как избежать копирования записи при сортировке?

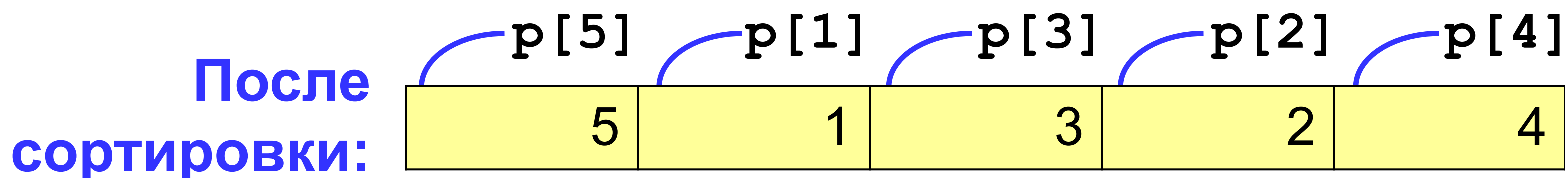
Решение:

использовать вспомогательный массив указателей, при сортировке переставлять указатели.

До сортировки:



После сортировки:



Вывод результата:

```
for i:=1 to N do
   writeln(p[i]^.title, p[i]^.year:5);
```

Реализация в программе

```
type PBook = ^TBook; { новый тип данных }
var  p: array[1..N] of PBook;
begin
  { заполнение массива записей}
  for i:=1 to N do
     p[i] := @aBooks[i];

  for i:=1 to N-1 do
    for j:=N-1 downto i do
      if p[j]^.year > p[j+1]^.year then begin
        temp := p[j];
        p[j]  := p[j+1];
        p[j+1]  := temp;
      end;

  for i:=1 to N do
     writeln(p[i]^.title, p[i]^.year:5);
end.
```

вспомогательные указатели

начальная расстановка

меняем только указатели, записи остаются на местах

Динамические структуры данных (язык Паскаль)

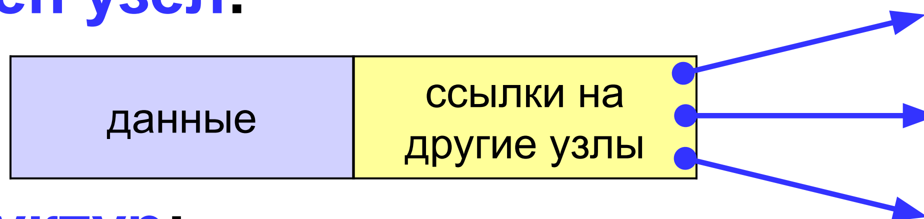
Тема 4. Списки

© К.Ю. Поляков, 2008-2010

Динамические структуры данных

Строение: набор узлов, объединенных с помощью ссылок.

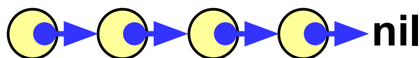
Как устроен узел:



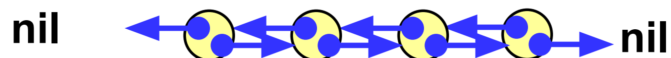
Типы структур:

списки

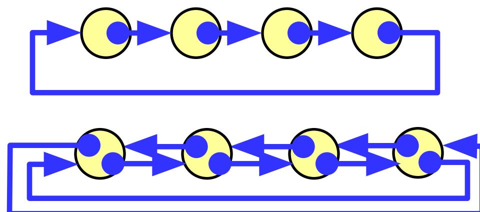
односвязный



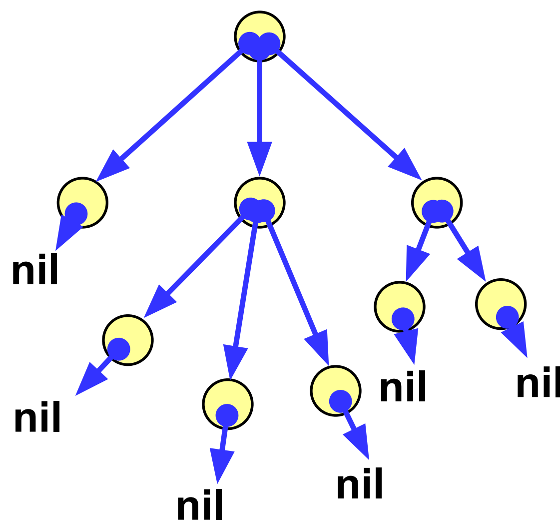
двунаправленный (двусвязный)

nil  nil

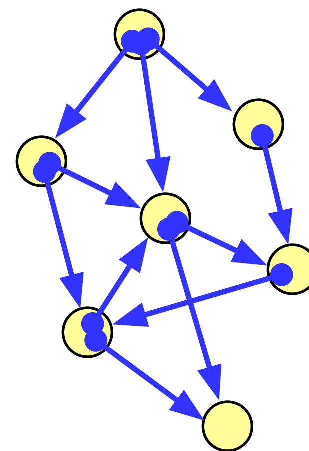
циклические списки (кольца)



деревья



графы



Когда нужны списки?

Задача (алфавитно-частотный словарь). В файле записан текст. Нужно записать в другой файл в столбик все слова, встречающиеся в тексте, в алфавитном порядке, и количество повторений для каждого слова.

Проблемы:

1) количество слов заранее неизвестно (~~статический массив~~);
2) количество слов определяется только в конце работы (~~динамический массив~~).

Решение – список.

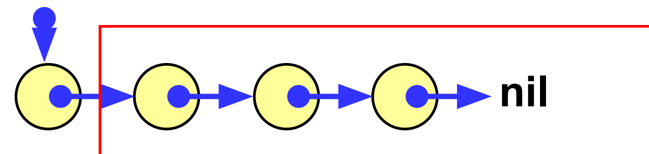
Алгоритм:

3) создать список;
4) если слова в файле закончились, то стоп.
5) прочитать слово и искать его в списке;
6) если слово найдено – увеличить счетчик повторений, иначе добавить слово в список;
7) перейти к шагу 2.

Списки: новые типы данных

Что такое список:

1) пустая структура – это список;
2) список – это начальный узел (*голова*) и связанный с ним список.



Новые типы данных:

```
type PNode = ^Node;     { указатель на узел }
     Node = record      { структура узла }
       word: string[40]; { слово }
       count: integer;   { счетчик повторений }
       next: PNode;      { ссылка на следующий }
     end;
```

Адрес начала списка:

```
var Head: PNode;
...
Head := nil;
```

Что нужно уметь делать со списком?

1. Создать новый узел.
2. Добавить узел:

   а) в начало списка;

   б) в конец списка;

   в) после заданного узла;

   г) до заданного узла.
3. Искать нужный узел в списке.
4. Удалить узел.

Создание узла

Функция `CreateNode` (*создать узел*):

вход: новое слово, прочитанное из файла;
выход: адрес нового узла, созданного в памяти.

новое слово

возвращает адрес созданного узла

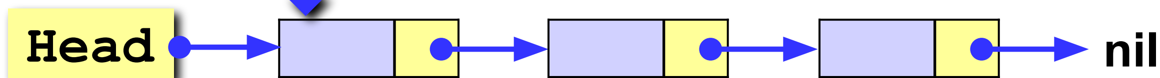
```
function CreateNode(NewWord: string): PNode;
var NewNode: PNode;
begin
  New(NewNode);
  NewNode^.word := NewWord;
  NewNode^.count := 1;
  NewNode^.next := nil;
  Result := NewNode;
end;
```

Если память выделить не удалось?

Добавление узла в начало списка

1) Установить ссылку нового узла на голову списка:

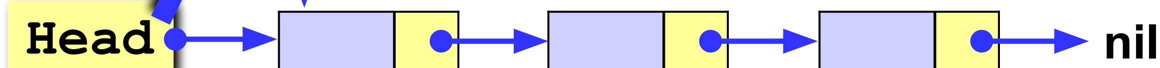
NewNode → nil




```
NewNode^.next := Head;
```

2) Установить новый узел как голову списка:

NewNode



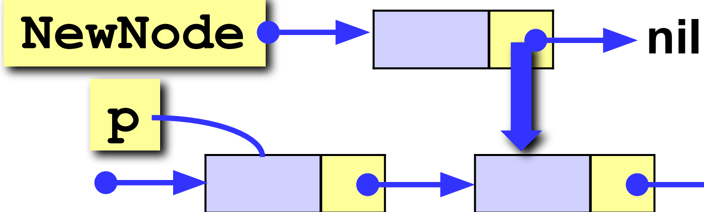

```
Head := NewNode;
```

адрес головы меняется

```
procedure AddFirst ( var Head: PNode; NewNode: PNode );
begin
  NewNode^.next := Head;
  Head := NewNode;
end;
```

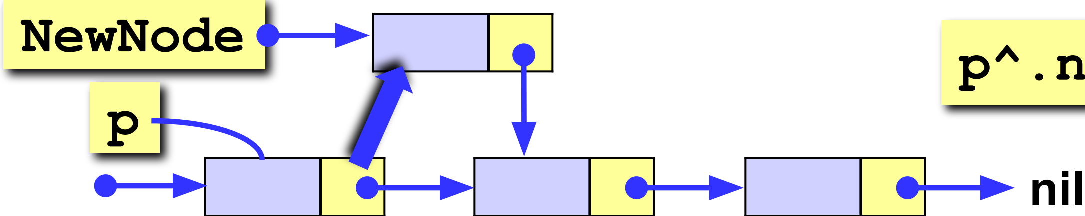
Добавление узла после заданного

1) Установить ссылку нового узла на узел, следующий за p:




```
NewNode^.next = p^.next;
```

2) Установить ссылку узла p на новый узел:



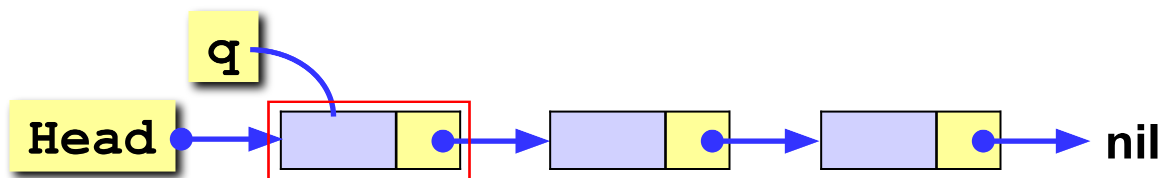

```
p^.next = NewNode;
```

```
procedure AddAfter ( p, NewNode: PNode );
begin
  NewNode^.next := p^.next;
  p^.next := NewNode;
end;
```

Проход по списку

Задача:

сделать что-нибудь хорошее с каждым элементом списка.



Алгоритм:

1) установить вспомогательный указатель **q** на голову списка;
2) если указатель **q** равен **nil** (дошли до конца списка), то стоп;
3) выполнить действие над узлом с адресом **q** ;
4) перейти к следующему узлу, **q^.next**.

```
var q: PNode;
...
q := Head;  // начали с головы
while q <> nil do begin // пока не дошли до конца
  ...                   // делаем что-то хорошее с q
  q := q^.next;         // переходим к следующему
end;
```

Добавление узла в конец списка

Задача: добавить новый узел в конец списка.

Алгоритм:

1) найти последний узел **q**, такой что **q^.next** равен **nil**;
2) добавить узел после узла с адресом **q** (процедура **AddAfter**).

Особый случай: добавление в пустой список.

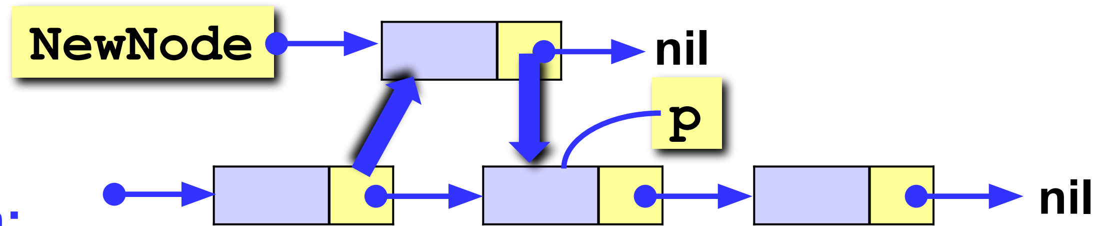
```
procedure AddLast ( var Head: PNode; NewNode: PNode );
var q: PNode;
begin
  if Head = nil then
    AddFirst ( Head, NewNode )
  else begin
    q := Head;
    while q^.next <> nil do
      q := q^.next;
    AddAfter ( q, NewNode );
  end;
end;
```

особый случай – добавление в пустой список

ищем последний узел

добавить узел после узла **q**

Добавление узла перед заданным



Проблема: нужно знать адрес **предыдущего** узла, а идти назад нельзя!

Решение: найти предыдущий узел **q** (проход с начала списка).

```
procedure AddBefore(var Head: PNode; p, NewNode: PNode);
var q: PNode;
begin
  q := Head;
  if p = Head then
    AddFirst ( Head, NewNode )
  else begin
    while (q <> nil)  and  (q^.next <> p) do
      q := q^.next;
    if q <> nil then AddAfter ( q, NewNode );
  end;
end;
```

в начало списка

ищем узел, следующий за которым – узел **p**

добавить узел после узла **q**

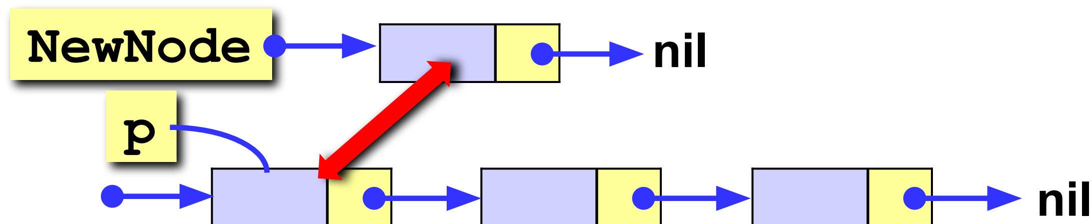
Что плохо?

Добавление узла перед заданным (II)

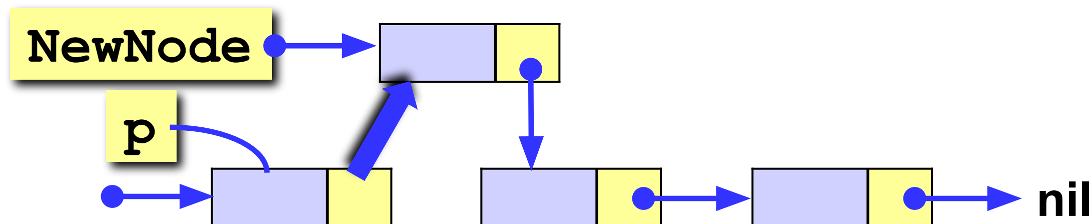
Задача: вставить узел перед заданным без поиска предыдущего.

Алгоритм:

1) поменять местами данные нового узла и узла **p**;



2) установить ссылку узла **p** на **NewNode**.




```
procedure AddBefore2 ( p, NewNode: PNode );
var temp: Node;
begin
  temp := p^; p^ := NewNode^;
  NewNode^ := temp;
  p^.next := NewNode;
end;
```

Так нельзя, если `p = nil` или адреса узлов где-то еще запоминаются!

Поиск слова в списке

Задача:

найти в списке заданное слово или определить, что его нет.

Функция `Find`:

вход: слово (символьная строка);

выход: адрес узла, содержащего это слово или **`nil`**.

Алгоритм: проход по списку.

ищем это слово

результат – адрес узла или **`nil`** (нет такого)

```
function Find(Head: PNode; NewWord: string): PNode;
var q: PNode;
begin
  q := Head;
  while (q <> nil) and (NewWord <> q^.word) do
    q := q^.next;
  Result := q;
end;
```

пока не дошли до конца списка и слово не равно заданному

Куда вставить новое слово?

Задача:

найти узел, перед которым нужно вставить, заданное слово, так чтобы в списке сохранился алфавитный порядок слов.

Функция `FindPlace`:

вход: слово (символьная строка);

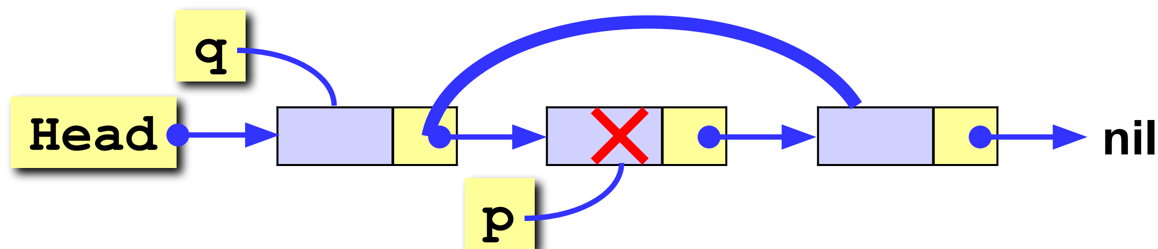
выход: адрес узла, перед которым нужно вставить это слово или `nil`, если слово нужно вставить в конец списка.

```
function FindPlace(Head: PNode; NewWord: string): PNode;
var q: PNode;
begin
  q := Head;
  while (q <> nil) and (NewWord > q^.word) do
    q := q^.next;
  Result := q;
end;
```

слово **NewWord** стоит по алфавиту *перед* **q^.word**

Удаление узла

Проблема: нужно знать адрес предыдущего узла **q**.




```
procedure DeleteNode ( var Head: PNode; p: PNode );
var q: PNode;
begin
  if Head = p then
    Head := p^.next
  else begin
    q := Head;
    while (q <> nil) and (q^.next <> p) do
      q := q^.next;
    if q <> nil then q^.next := p^.next;
  end;
  Dispose(p);
end;
```

особый случай: удаляем первый узел

ищем узел, такой что `q^.next = p`

освобождение памяти

Алфавитно-частотный словарь

Алгоритм:

1) открыть файл на чтение;

```
var F: Text;
...
Assign(F, 'input.dat');
Reset ( F );
```

2) прочитать очередное слово (**как?**)
3) если файл закончился, то перейти к шагу 7;
4) если слово найдено, увеличить счетчик (поле **count**);
5) если слова нет в списке, то
   - создать новый узел, заполнить поля (**CreateNode**);
   - найти узел, перед которым нужно вставить слово (**FindPlace**);
   - добавить узел *(***AddBefore***);*
6) перейти к шагу 2;
7) закрыть файл `Close ( F );`
8) вывести список слов, используя проход по списку.

Как прочитать одно слово из файла?

Алгоритм:

1) пропускаем все спецсимволы и пробелы (с кодами <= 32)
2) читаем все символы до первого пробела или спецсимвола

```
function GetWord ( F: Text ) : string;
var c: char;
begin
  Result := ''; { пустая строка }
  c := ' ';     { пробел - чтобы войти в цикл }
    { пропускаем спецсимволы и пробелы }
  while not eof(f) and (c <= ' ') do
    read(F, c);
    { читаем слово }
  while not eof(f) and (c > ' ') do begin
    Result := Result + c;
    read(F, c);
  end;
end;
```

Можно поменять местами строчки в цикле?

Полная программа

```
type PNode = ^Node;
     Node = record ... end; { новые типы данных }
var Head: PNode;            { адрес головы списка }
    NewNode, q: PNode;      { вспомогательные указатели }
    w: string;              { слово из файла }
    F: text;                { файловая переменная }
    count: integer;         { счетчик разных слов }
{ процедуры и функции }
begin
  Head := nil;
  Assign ( F, 'input.txt' );
  Reset ( F );
    { читаем слова из файла, строим список }
  Close ( F );
    { выводим список в другой файл }
end.
```

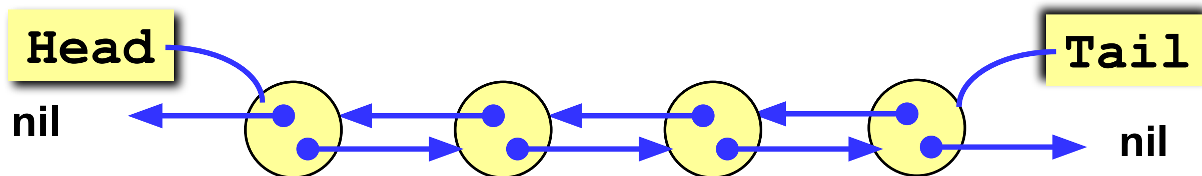
Полная программа (II)

```
{ читаем слова из файла, строим список }
while True do begin       { бесконечный цикл }
  w := GetWord ( F );     { читаем слово }
  if w = '' then break;   { слова закончились, выход }
  q := Find ( Head, w ); { ищем слово в списке }
  if q <> nil then        { нашли, увеличить счетчик }
    q^.count := q^.count + 1
  else begin           { не нашли, добавить в список }
    NewNode := CreateNode ( w );
    q := FindPlace ( Head, w );
    AddBefore ( Head, q, NewNode );
  end;
end;
```

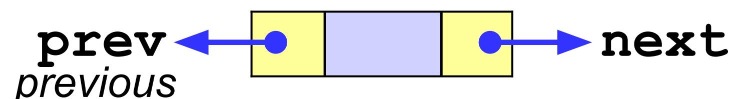
Полная программа (III)

```
{ выводим список в другой файл }
q := Head;        { проход с начала списка }
count := 0;       { обнулили счетчик слов }
Assign(F, 'output.txt');
Rewrite(F);
while q <> nil do begin  { пока не конец списка }
  count := count + 1;    { еще одно слово }
  writeln ( F, q^.word, ': ', q^.count );
  q := q^.next;          { перейти к следующему }
end;
writeln ( F, 'Найдено ',
              count, ' разных слов.' );
Close(F);
```

Двусвязные списки



Структура узла:

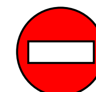



```
type PNode = ^Node;    { указатель на узел }
     Node = record     { структура узла }
       word: string[40]; { слово }
       count: integer;   { счетчик повторений }
       next: PNode;      { ссылка на следующий }
       prev: PNode;      { ссылка на предыдущий }
     end;
```

Адреса «головы» и «хвоста»:

```
var Head, Tail: PNode;
...
Head := nil; Tail := nil;
```

можно двигаться в обе стороны



нужно работать с двумя указателями вместо одного

Задания

«4»: «Собрать» из этих функций программу для построения алфавитно-частотного словаря. В конце файла вывести общее количество разных слов (количество элементов списка).

«5»: То же самое, но использовать двусвязные списки.

«6»: То же самое, что и на «5», но вывести список слов в порядке убывания частоты, то есть, сначала те слова, которые встречаются чаще всего.

Динамические структуры данных (язык Паскаль)

Тема 5. Стеки, очереди, деки

© К.Ю. Поляков, 2008-2010

Стек

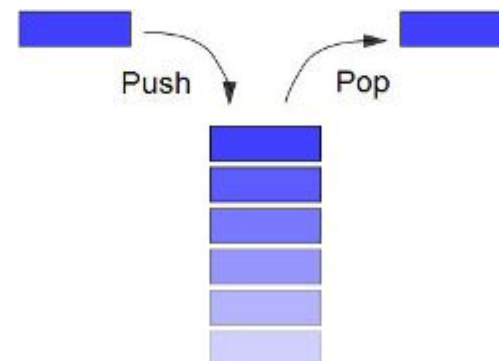
Стек – это линейная структура данных, в которой добавление и удаление элементов возможно только с одного конца (**вершины стека**). *Stack* = кипа, куча, стопка (англ.)

LIFO = *Last In – First Out*

«Кто последним вошел, тот первым вышел».

Операции со стеком:

1) добавить элемент на вершину (*Push* = втолкнуть);
2) снять элемент с вершины (*Pop* = вылететь со звуком).



Пример задачи

Задача: вводится символьная строка, в которой записано выражение со скобками трех типов: **[ ]**, **{ }** и **( )**. Определить, верно ли расставлены скобки (не обращая внимания на остальные символы). Примеры:

[( )] { } **] [** **[({)] }**

Упрощенная задача: то же самое, но с одним видом скобок.

Решение: счетчик вложенности скобок. Последовательность правильная, если в конце счетчик равен нулю и при проходе не разу не становился отрицательным.

(	(	)	)	(	)
1	2	1	0	1	0

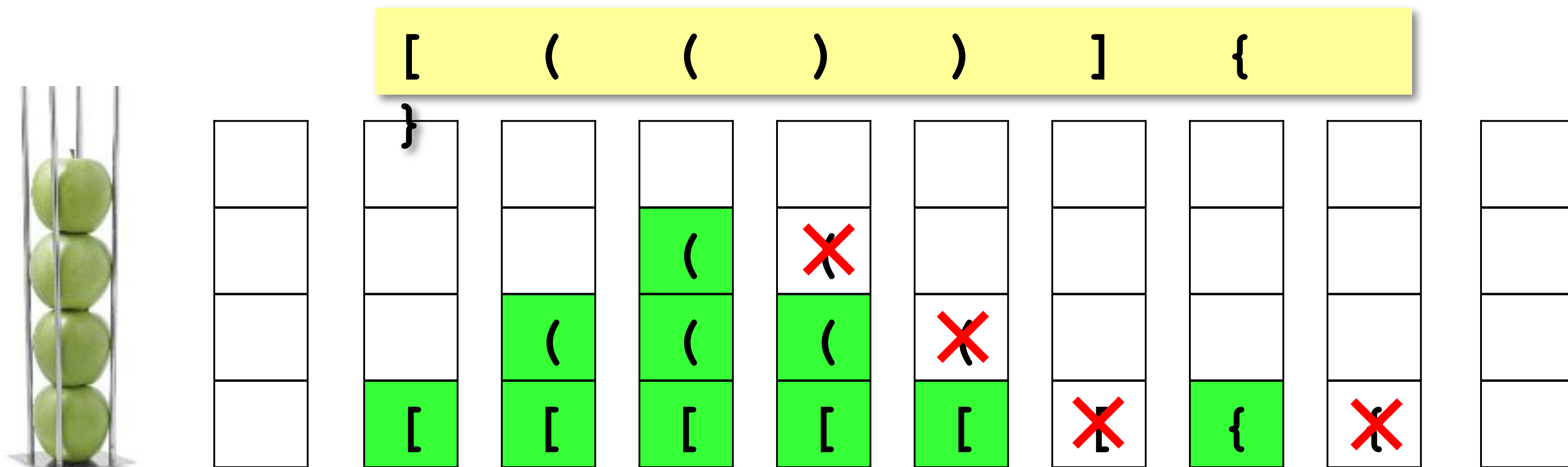
(	(	)	)	)	(
1	2	1	0	-1	0

(	(	)	)	(
1	2	1	0	1

Можно ли решить исходную задачу так же, но с тремя счетчиками?

	[	(	{	)	]	}
(:	0		1		0		
[:	0	1				0	
{ :	0			1			0

Решение задачи со скобками



Алгоритм:

1) в начале стек пуст;
2) в цикле просматриваем все символы строки по порядку;
3) если очередной символ – открывающая скобка, заносим ее на вершину стека;
4) если символ – закрывающая скобка, проверяем вершину стека: там должна быть **соответствующая** открывающая скобка (если это не так, то ошибка);
5) если в конце стек не пуст, выражение неправильное.

Реализация стека (массив)

Структура-стек:

```
const MAXSIZE = 100;
type Stack = record  { стек на 100 символов }
       data: array[1..MAXSIZE] of char;
       size: integer; { число элементов }
     end;
```

Добавление элемента:

```
procedure Push( var S: Stack; x: char);
begin
  if S.size = MAXSIZE then Exit;
  S.size := S.size + 1;
  S.data[S.size] := x;
end;
```

ошибка: переполнение стека

добавить элемент

Что плохо?

Реализация стека (массив)

Снятие элемента с вершины:

```
function Pop ( var S:Stack ): char;
begin
  if S.size = 0 then begin
    Result := char(255);
    Exit;
  end;
  Result := S.data[S.size];
  S.size := S.size - 1;
end;
```

ошибка: стек пуст

Пустой или нет?

```
function isEmpty ( S: Stack ): Boolean;
begin
  Result := (S.size = 0);
end;
```

Программа

```
var br1, br2, expr: string;
    i, k: integer;
    upper: char;     { то, что сняли со стека }
    error: Boolean; { признак ошибки }
    S: Stack;
begin
  br1 := '([{'; br2 := ')]}';
  S.size := 0;
  error := False;
  writeln('Введите выражение со скобками');
  readln(expr);
  ...  { здесь будет основной цикл обработки }
  if not error  and  isEmpty(S) then
       writeln('Выражение правильное.')
  else writeln('Выражение неправильное.')
end.
```

Обработка строки (основной цикл)

```
for i:=1 to length(expr)
do begin
   for k:=1 to 3 do begin
     if expr[i] = br1[k] then begin { откр. скобка }
       Push(S, expr[i]); { втолкнуть в стек}
       break;
     end;
     if expr[i] = br2[k] then begin { закр. скобка }
       upper := Pop(S); { снять символ со стека }
       error := upper <> br1[k];
       break;
     end;
   end;
   if error then break;
 end;
```

цикл по всем символам строки **expr**

цикл по всем видам скобок

ошибка: стек пуст или не та скобка

была ошибка: дальше нет смысла проверять

Реализация стека (список)

Структура узла:

```
type PNode = ^Node; { указатель на узел }
     Node = record
       data: char;  { данные }
       next: PNode; { указатель на след. элемент }
     end;
```

Добавление элемента:

```
procedure Push( var Head: PNode; x: char);
var NewNode: PNode;
begin
  New(NewNode);            { выделить память }
  NewNode^.data := x;      { записать символ }
  NewNode^.next := Head;  { сделать первым узлом }
  Head := NewNode;
end;
```

Реализация стека (список)

Снятие элемента с вершины:

```
function Pop ( var Head: PNode ): char;
var q: PNode;
begin
  if Head = nil then begin { стек пуст }
    Result := char(255); { неиспользуемый символ }
    Exit;
  end;
  Result := Head^.data;  { взять верхний символ }
  q := Head;             { запомнить вершину }
  Head := Head^.next;   удалить вершину из стека }
  Dispose(q);            { удалить из памяти }
end;
```

Можно ли переставлять операторы?

Реализация стека (список)

Пустой или нет?

```
function isEmpty ( S: Stack ): Boolean;
begin
  Result := (S = nil);
end;
```

Изменения в основной программе:

```
var S: Stack;
...
S.size := 0;
```

```
var S: PNode;
```

```
S := nil;
```

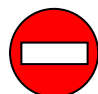
Больше ничего не меняется!

Вычисление арифметических выражений

Как вычислять автоматически:

```
(a+b)/(c+d-1)
```

Инфиксная запись
(знак операции **между** операндами)

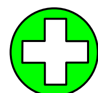


необходимы скобки!

Префиксная запись (знак операции **до** операндов)

```
/ + a b - + c d 1
```

польская нотация,
Jan Łukasiewicz (1920)



скобки не нужны, можно однозначно вычислить!

Постфиксная запись (знак операции **после** операндов)

```
a b + c d + 1 - /
```

обратная польская нотация,
F. L. BauerF. L. Bauer and E. W. Dijkstra

Запишите в постфиксной форме

```
(32*6-5)*(2*3+4)/(3+7*2)
```

```
(2*4+3*5)*(2*3+18/3*2)*(12-3)
```

```
(4-2*3)*(3-12/3/4)*(24-3*12)
```

Вычисление выражений

Постфиксная форма:

X = a b + c d + 1 - /

					d		1		
		b		c	c	c+d	c+d	c+d-1	
	a	a	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	X

Алгоритм:

1) взять очередной элемент;
2) если это не знак операции, добавить его в стек;
3) если это знак операции, то
   - взять из стека два операнда;
   - выполнить операцию и записать результат в стек;
4) перейти к шагу 1.

Системный стек (*Windows – 1 Мб*)

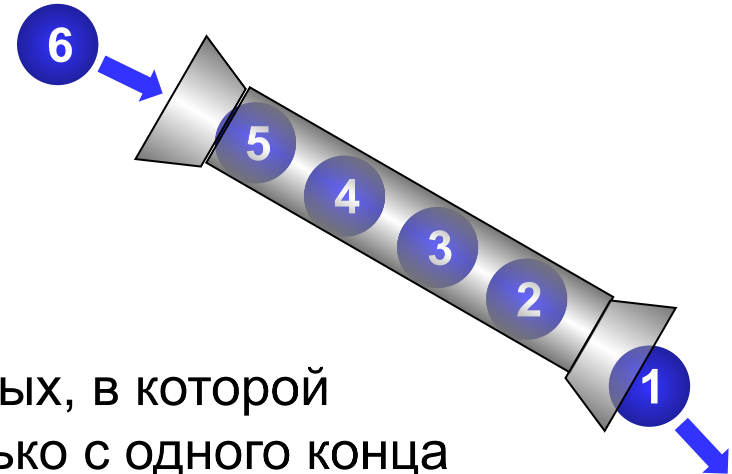
Используется для

1) размещения **локальных переменных***;*
2) хранения **адресов возврата** (по которым переходит программа после выполнения функции или процедуры);
3) передачи **параметров** в функции и процедуры;
4) временного хранения данных (в программах на языке *Ассмеблер*).

Переполнение стека *(stack overflow):*

1) слишком много локальных переменных (**выход** – использовать динамические массивы)*;*
2) очень много рекурсивных вызовов функций и процедур (**выход** – переделать алгоритм так, чтобы уменьшить глубину рекурсии или отказаться от нее вообще).

Очередь



Очередь – это линейная структура данных, в которой добавление элементов возможно только с одного конца (**конца очереди**), а удаление элементов – только с другого конца (**начала очереди**).

FIFO = First In – First Out

«Кто первым вошел, тот первым вышел».

Операции с очередью:

1) добавить элемент в конец очереди (*PushTail* = втолкнуть в конец)*;*
2) удалить элемент с начала очереди *(Pop).*

Реализация очереди (массив)

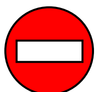
1						

1	2					

1	2	3				

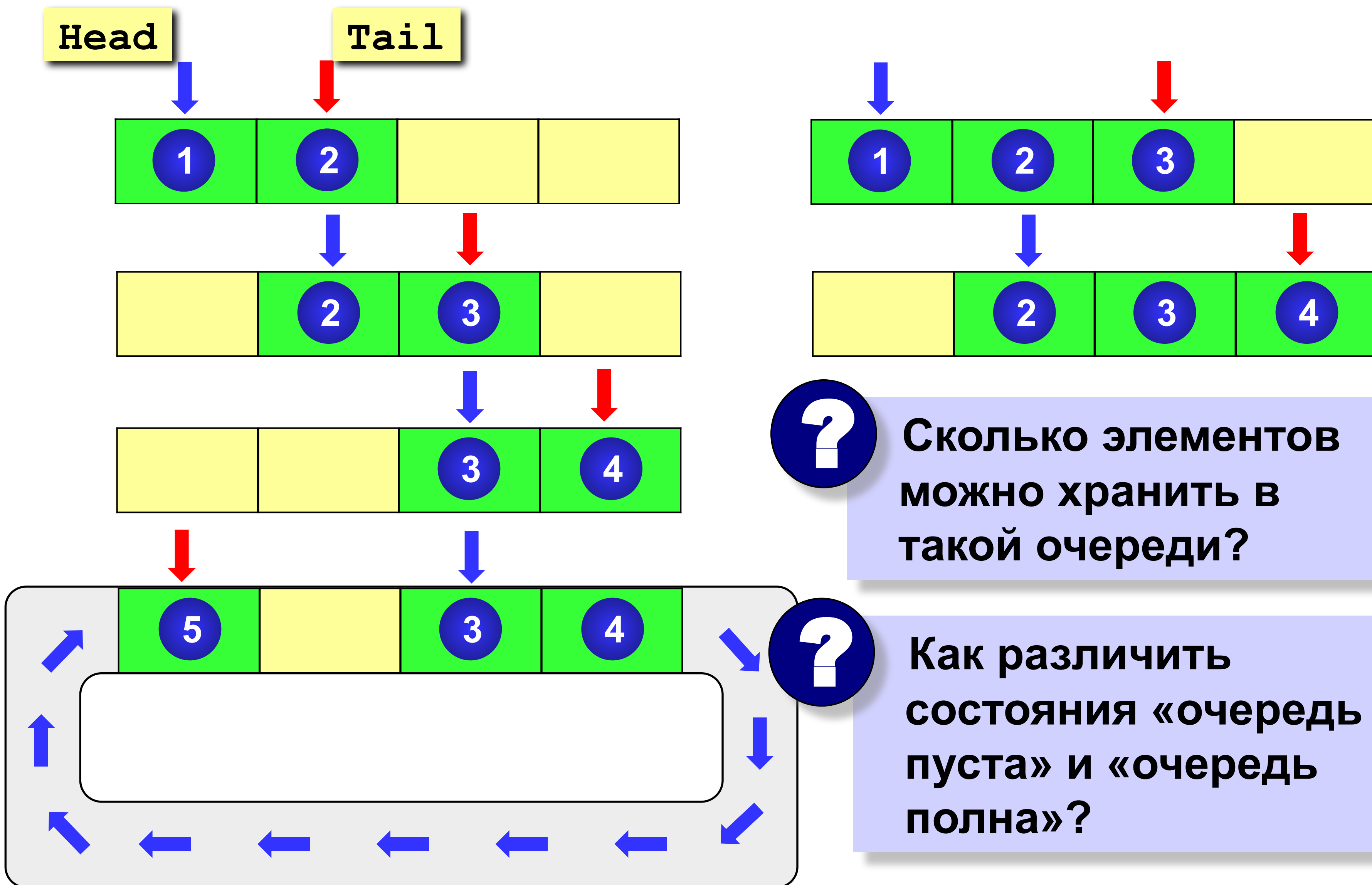
1 ← | 2 | 3 | | | | | |

самый простой способ



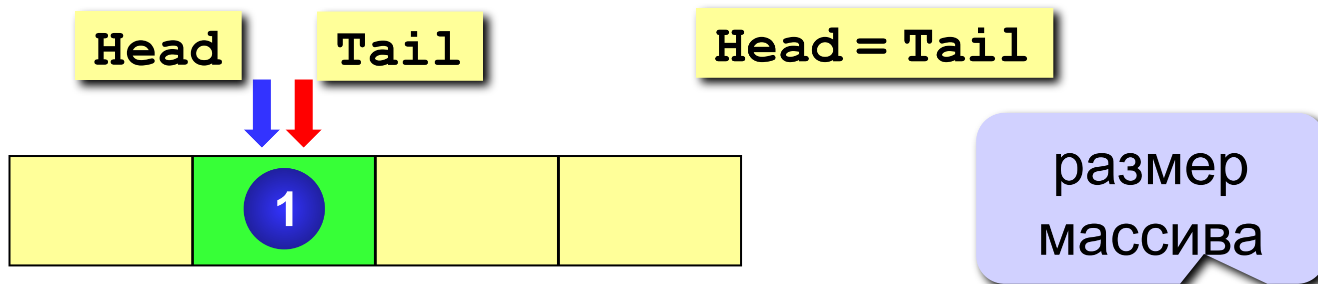
1) нужно заранее выделить массив;
2) при выборке из очереди нужно сдвигать все элементы.

Реализация очереди (кольцевой массив)

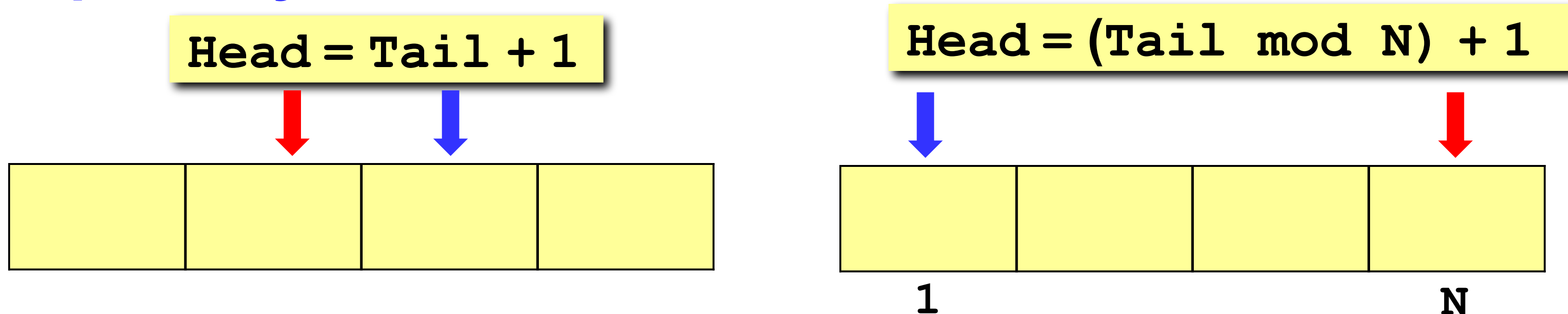


Реализация очереди (кольцевой массив)

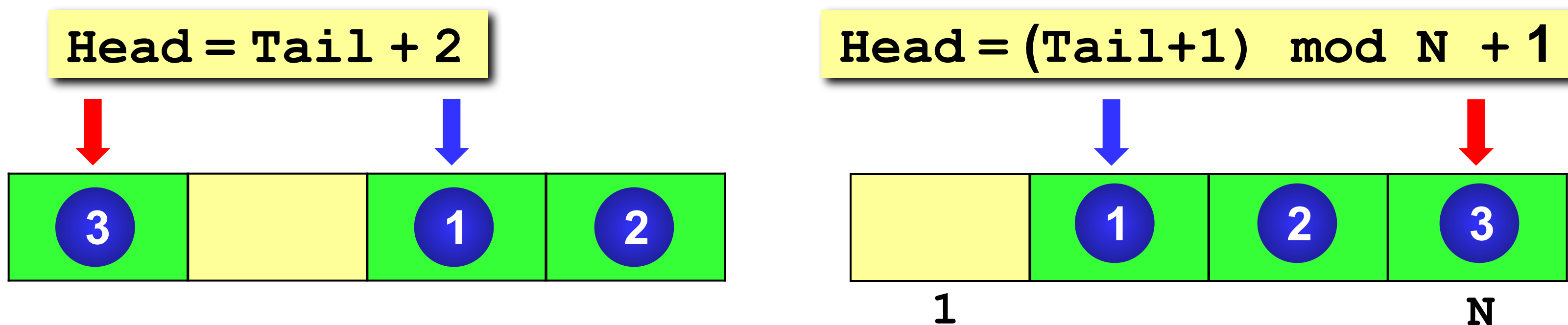
В очереди 1 элемент:



Очередь пуста:



Очередь полна:



Реализация очереди (кольцевой массив)

Структура данных:

```
type Queue = record
       data: array[1..MAXSIZE] of integer;
       head, tail: integer;
     end;
```

Добавление в очередь:

```
procedure PushTail( var Q: Queue; x: integer);
begin
  if Q.head = (Q.tail+1) mod MAXSIZE + 1
    then Exit; { очередь полна, не добавить }
  Q.tail := Q.tail mod MAXSIZE + 1;
  Q.data[Q.tail] := x;
end;
```

замкнуть в кольцо

Реализация очереди (кольцевой массив)

Выборка из очереди:

```
function Pop ( var S: Queue ): integer;
begin
  if Q.head = Q.tail mod MAXSIZE + 1 then begin
    Result := MaxInt;
    Exit;
  end;
  Result := Q.data[Q.head];
  Q.head := Q.head mod MAXSIZE + 1;
end;
```

очередь пуста

максимальное целое число

взять первый элемент

удалить его из очереди

Реализация очереди (списки)

Структура узла:

```
type PNode = ^Node;
     Node = record
       data: integer;
       next: PNode;
     end;
```

Тип данных «очередь»:

```
type Queue = record
       head, tail: PNode;
     end;
```

Реализация очереди (списки)

Добавление элемента:

```
procedure PushTail( var Q: Queue; x: integer );
var NewNode: PNode;
begin
  New(NewNode);
  NewNode^.data := x;
  NewNode^.next := nil;
  if Q.tail <> nil then
    Q.tail^.next := NewNode;
  Q.tail := NewNode; { новый узел – в конец}
  if Q.head = nil then Q.head := Q.tail;
end;
```

создаем новый узел

если в списке уже что-то было, добавляем в конец

если в списке ничего не было, …

Реализация очереди (списки)

Выборка элемента:

```
function Pop ( var S: Queue ): integer;
var top: PNode;
begin
  if Q.head = nil then begin
    Result := MaxInt;
    Exit;
  end;
  top := Q.head;
  Result := top^.data;
  Q.head := top^.next;
  if Q.head = nil then Q.tail := nil;
  Dispose(top);
end;
```

если список пуст, …

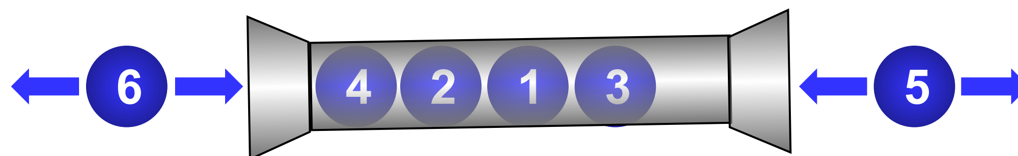
запомнили первый элемент

если в списке ничего не осталось, …

освободить память

Дек

Дек (*deque* = ***d****ouble* ***e****nded* ***que****ue*, очередь с двумя концами) – это линейная структура данных, в которой добавление и удаление элементов возможно с обоих концов.



Операции с деком:

1) добавление элемента в начало *(Push);*
2) удаление элемента с начала *(Pop)*;
3) добавление элемента в конец *(PushTail)*;
4) удаление элемента с конца *(PopTail)*.

Реализация:

1) кольцевой массив*;*
2) двусвязный список.

Задания

«4»: В файле `input.dat` находится список чисел (или слов). Переписать его в файл `output.dat` в обратном порядке.

«5»: Составить программу, которая вычисляет значение арифметического выражения, записанного в постфиксной форме, с помощью стека. Выражение правильное, допускаются только однозначные числа и знаки `+`, `-`, `*`, `/`.

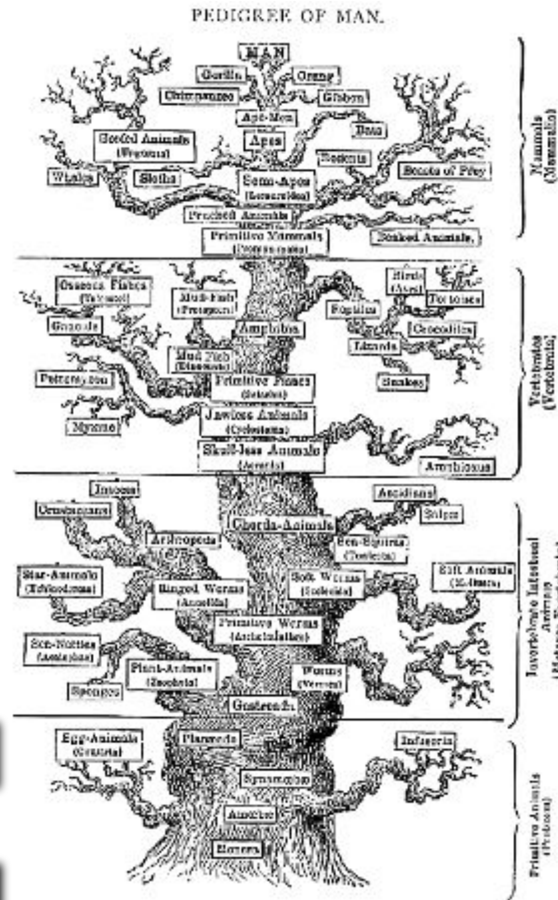
«6»: То же самое, что и на «5», но допускаются многозначные числа.

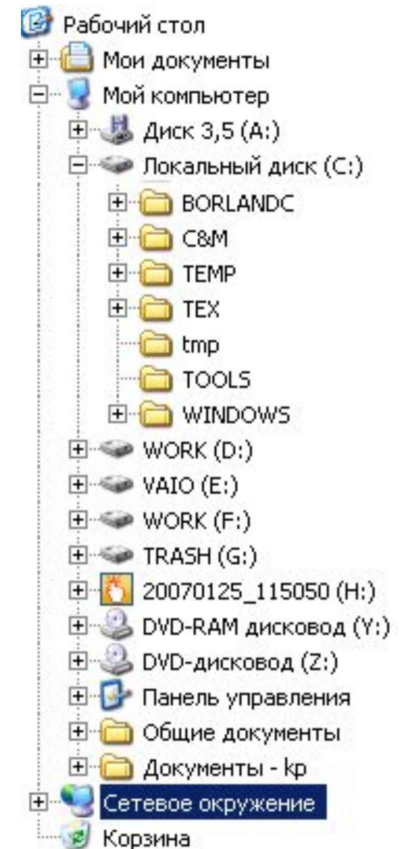
Динамические структуры данных (язык Паскаль)

Тема 6. Деревья

© К.Ю. Поляков, 2008-2010

Деревья





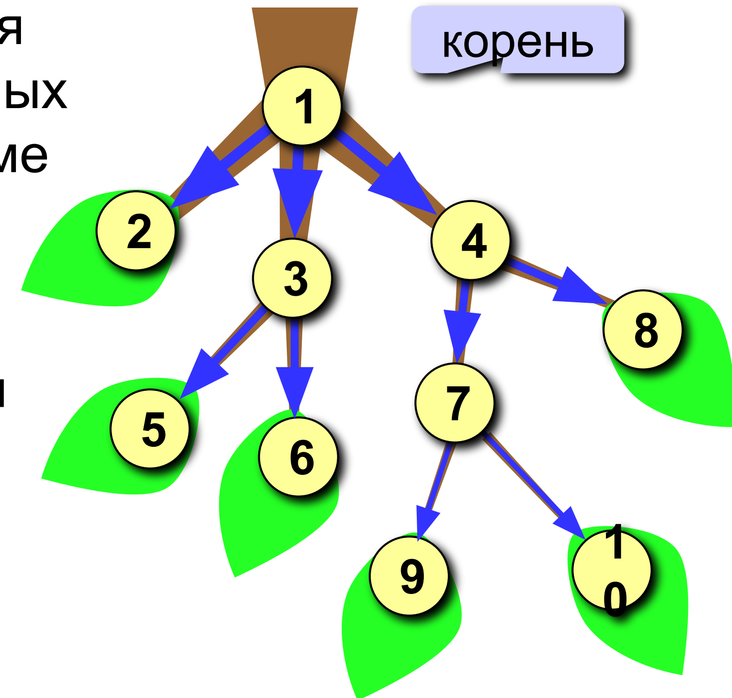
Что общего во всех примерах?

Деревья

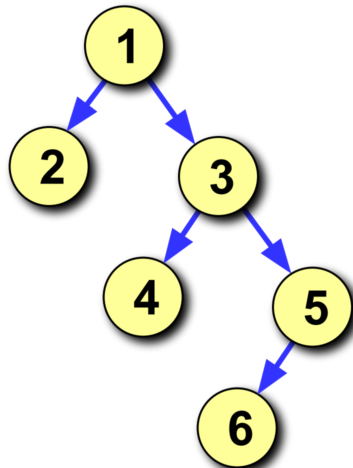
Дерево – это структура данных, состоящая из узлов и соединяющих их направленных ребер (дуг), причем в каждый узел (кроме корневого) ведет ровно одна дуга.

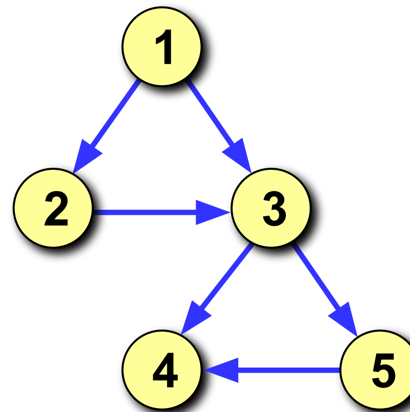
Корень – это начальный узел дерева.

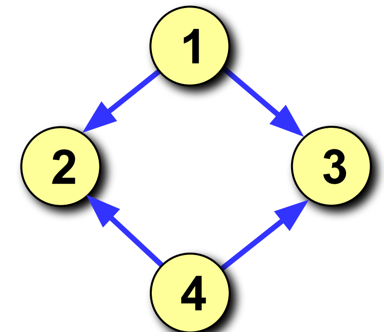
Лист – это узел, из которого не выходит ни одной дуги.



Какие структуры – не деревья?

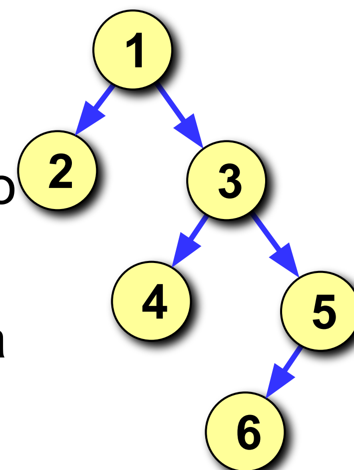






Деревья

С помощью деревьев изображаются отношения подчиненности (иерархия, «старший – младший», «родитель – ребенок»).



Предок узла x – это узел, из которого существует путь по стрелкам в узел x.

Потомок узла x – это узел, в который существует путь по стрелкам из узла x.

Родитель узла x – это узел, из которого существует дуга непосредственно в узел x.

Сын узла x – это узел, в который существует дуга непосредственно из узла x.

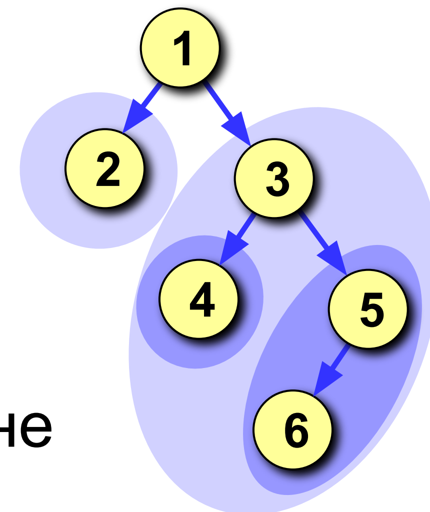
Брат узла x ***(sibling)*** – это узел, у которого тот же родитель, что и у узла x.

Высота дерева – это наибольшее расстояние от корня до листа (количество дуг).

Дерево – рекурсивная структура данных

Рекурсивное определение:

1. Пустая структура – это дерево.
2. Дерево – это корень и несколько связанных с ним деревьев.



Двоичное (бинарное) дерево – это дерево, в котором каждый узел имеет не более двух сыновей.

1. Пустая структура – это двоичное дерево.
2. Двоичное дерево – это корень и два связанных с ним двоичных дерева (левое и правое поддеревья).

Двоичные деревья

Применение:

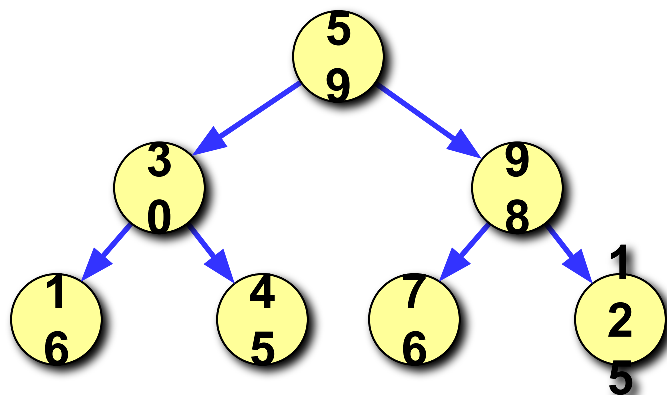
1) поиск данных в специально построенных деревьях (базы данных);
2) сортировка данных;
3) вычисление арифметических выражений;
4) кодирование (метод Хаффмана).

Структура узла:

```
type PNode = ^Node;             { указатель на узел }
     Node = record
       data: integer;           { полезные данные }
       left, right: PNode;      { ссылки на левого и
                                  правого сыновей }
     end;
```

Двоичные деревья поиска

Ключ – это характеристика узла, по которой выполняется поиск (чаще всего – одно из полей структуры).



Какая закономерность?

Слева от каждого узла находятся узлы с меньшими ключами, а справа – с бóльшими.

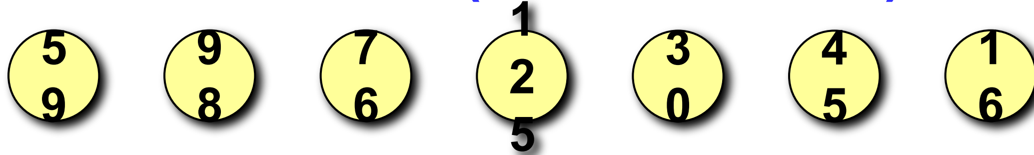
Как искать ключ, равный x:

1) если дерево пустое, ключ не найден;
2) если ключ узла равен x, то стоп.
3) если ключ узла меньше x, то искать x в левом поддереве;
4) если ключ узла больше x, то искать x в правом поддереве.

Сведение задачи к такой же задаче меньшей размерности – это …?

Двоичные деревья поиска

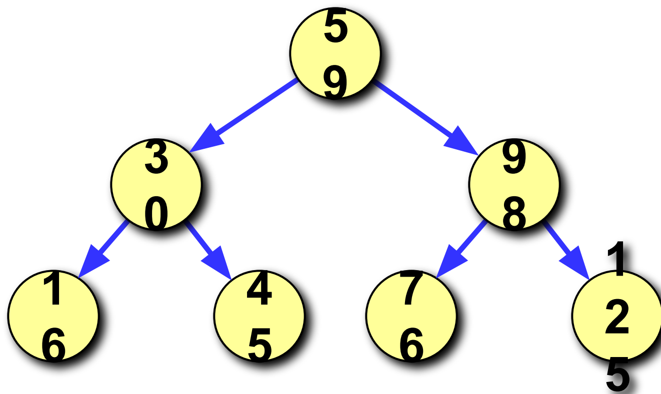
Поиск в массиве (N элементов):



При каждом сравнении отбрасывается 1 элемент.

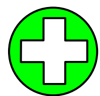
Число сравнений – N.

Поиск по дереву (N элементов):

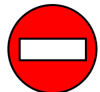


При каждом сравнении отбрасывается половина оставшихся элементов.

Число сравнений ~ $\log_2 N$.



быстрый поиск



1) нужно заранее построить дерево;
2) желательно, чтобы дерево было минимальной высоты.

Реализация алгоритма поиска

```
{ Функция Search – поиск по дереву
  Вход: Tree - адрес корня,
             x  - что ищем
  Выход: адрес узла или nil (не нашли) }
function Search(Tree: PNode; x: integer): PNode;
begin
  if Tree = nil then begin
    Result := nil;
    Exit;
  end;
  if x = Tree^.data then
     Result := Tree
  else
  if x < Tree^.data then
       Result := Search(Tree^.left, x)
  else Result := Search(Tree^.right, x);
end;
```

дерево пустое: ключ не нашли…

нашли, возвращаем адрес корня

искать в левом поддереве

искать в правом поддереве

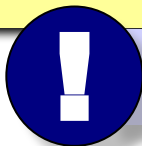
Как построить дерево поиска?

```
{ Процедура AddToTree - добавить элемент
  Вход: Tree - адрес корня,
          x  - что добавляем }
procedure AddToTree( var Tree: PNode; x: integer );
begin
  if Tree = nil then begin
    New(Tree);
    Tree^.data := x;
    Tree^.left := nil;
    Tree^.right := nil;
    Exit;
  end;
  if x < Tree^.data then
       AddToTree(Tree^.left, x)
  else AddToTree(Tree^.right, x);
end;
```

адрес корня может измениться

дерево пустое: создаем новый узел (корень)

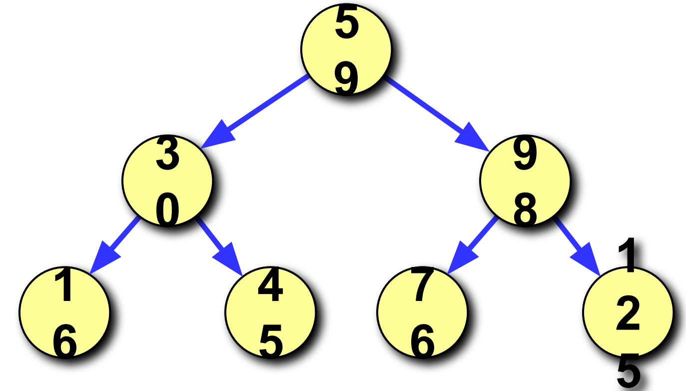
добавляем к левому или правому поддереву



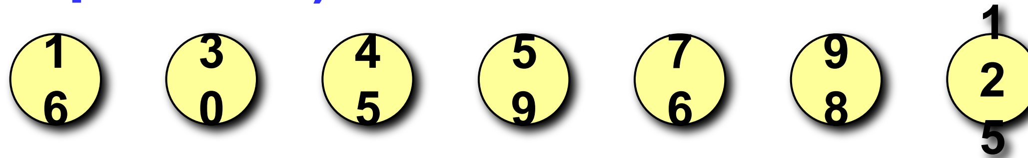
Минимальная высота не гарантируется!

Обход дерева

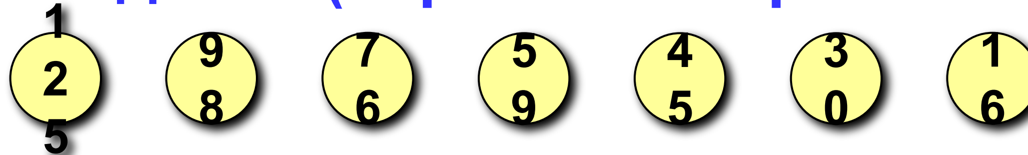
Обход дерева – это перечисление всех узлов в определенном порядке.



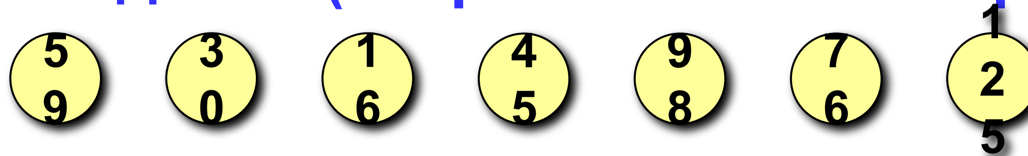
Обход ЛКП («левый – корень – правый»):



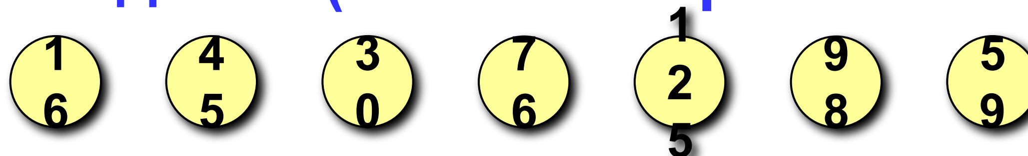
Обход ПКЛ («правый – корень – левый»):



Обход КЛП («корень – левый – правый»):



Обход ЛПК («левый – правый – корень»):



Обход дерева – реализация

```
{ Процедура LKP – обход дерева в порядке ЛКП
                (левый – корень – правый)
  Вход: Tree - адрес корня }
procedure LKP(Tree: PNode);
begin
  if Tree = nil then Exit;
  LKP(Tree^.left);
  write(' ', Tree^.data);
  LKP(Tree^.right);
end;
```

обход этой ветки закончен

обход левого поддерева

вывод данных корня

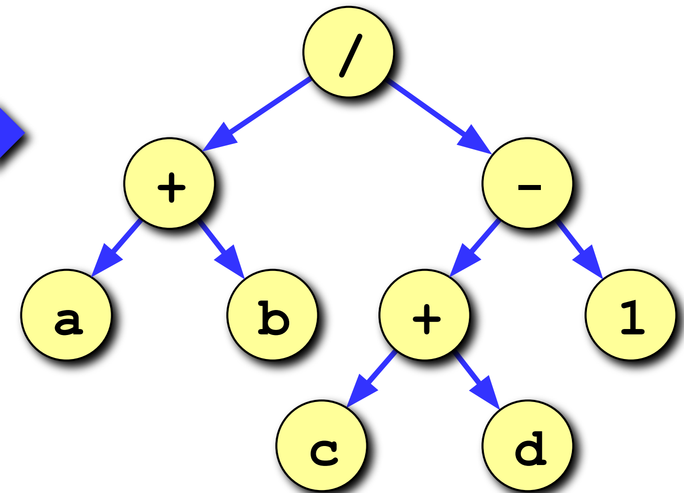
обход правого поддерева

Для рекурсивной структуры удобно применять рекурсивную обработку!

Разбор арифметических выражений

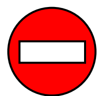
Как вычислять автоматически:

```
(a+b)/(c+d-1)
```



Инфиксная запись, обход ЛКП
(знак операции **между** операндами)

```
a + b / c + d – 1
```



необходимы скобки!

Префиксная запись, КЛП (знак операции **до** операндов)

```
/ + a b - + c d 1
```

польская нотация,
Jan Łukasiewicz (1920)

скобки не нужны, можно однозначно вычислить!

Постфиксная запись, ЛПК (знак операции **после** операндов)

```
a b + c d + 1 - /
```

обратная польская нотация,
F. L. BauerF. L. Bauer and E. W. Dijkstra

Вычисление выражений

Постфиксная форма:

```
X = a b + c d + 1 - /
```

					d		1		
		b		c	c	c+d	c+d	c+d-1	
	a	a	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	a+b	X

Алгоритм:

1) взять очередной элемент;
2) если это не знак операции, добавить его в стек;
3) если это знак операции, то
   - взять из стека два операнда;
   - выполнить операцию и записать результат в стек;
4) перейти к шагу 1.

Вычисление выражений

Задача: в символьной строке записано правильное арифметическое выражение, которое может содержать только однозначные числа и знаки операций `+-*\`. Вычислить это выражение.

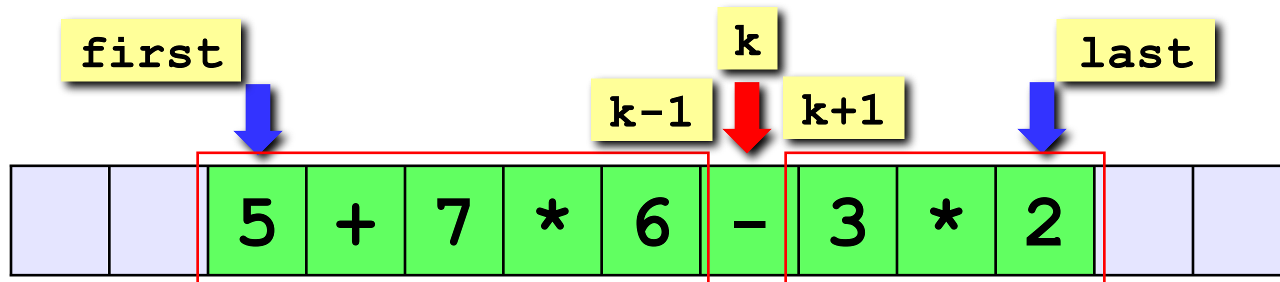
Алгоритм:

1) ввести строку;
2) построить дерево;
3) вычислить выражение по дереву.

Ограничения:

1) ошибки не обрабатываем;
2) многозначные числа не разрешены;
3) дробные числа не разрешены;
4) скобки не разрешены.

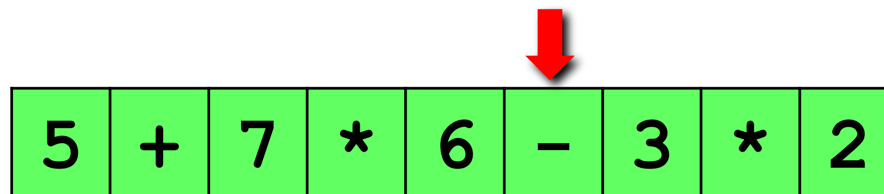
Построение дерева



Алгоритм:

1) если **first=last** (остался один символ – число), то создать новый узел и записать в него этот элемент; иначе...
2) среди элементов от **first** до **last** включительно найти **последнюю** операцию (элемент с номером **k**);
3) создать новый узел (корень) и записать в него **знак операции**;
4) рекурсивно применить этот алгоритм два раза:
   - построить **левое** поддерево, разобрав выражение из элементов массива с номерами от **first** до **k-1**;
   - построить **правое** поддерево, разобрав выражение из элементов массива с номерами от **k+1** до **last**.

Как найти последнюю операцию?



Порядок выполнения операций

- умножение и деление;
- сложение и вычитание.

Приоритет (старшинство) – число, определяющее последовательность выполнения операций: раньше выполняются операции с большим приоритетом:

- умножение и деление (приоритет **2**);
- сложение и вычитание (приоритет **1**).

Нужно искать последнюю операцию с наименьшим приоритетом!

Приоритет операции

```
{ Функция Priority – приоритет операции
  Вход:  символ операции
  Выход: приоритет или 100, если не операция
}
function Priority ( c: char ): integer;
begin
  case ( c ) of
    '+', '-': Result := 1;
    '*', '/': Result := 2;
    else      Result := 100;
  end;
end;
```

сложение и вычитание: приоритет 1

умножение и деление: приоритет 2

это вообще не операция

Номер последней операции

```
{ Функция LastOperation – номер последней операции
  Вход:  строка, номера первого и последнего
            символов рассматриваемой части
  Выход: номер символа - последней операции }
function LastOperation ( Expr: string;
                  first, last: integer): integer;
var MinPrt, i, k, prt: integer;
begin
  MinPrt := 100;
  for i:=first to last do begin
    prt := Priority ( Expr[i] );
    if prt <= MinPrt then begin
      MinPrt := prt;
      k := i;
    end;
  end;
  Result := k;
end;
```

проверяем все символы

нашли операцию с минимальным приоритетом

вернуть номер символа

Построение дерева

Структура узла

```
type PNode = ^Node;
     Node = record
       data: char;
       left, right: PNode;
     end;
```

Создание узла для числа (без потомков)

```
function NumberNode(c: char): PNode;
begin
  New(Result);
  Result^.data := c;
  Result^.left := nil;
  Result^.right := nil;
end;
```

один символ, число

возвращает адрес созданного узла

Построение дерева

```
{ Функция MakeTree – построение дерева
  Вход:  строка, номера первого и последнего
         символов рассматриваемой части
  Выход: адрес построенного дерева }
function MakeTree ( Expr: string;
                    first, last: integer): PNode;
var k: integer;
begin
 if first = last then begin
    Result := NumberNode ( Expr[first] );
    Exit;
 end;
 k := LastOperation ( Expr, first, last );
 New(Result);
 Result^.data  := Expr[k];
 Result^.left  := MakeTree ( Expr, first, k-1 );
 Result^.right := MakeTree ( Expr, k+1, last );
end;
```

осталось только число

новый узел: операция

Вычисление выражения по дереву

```
{ Функция CalcTree - вычисление по дереву
  Вход:  адрес дерева
  Выход: значение выражения                   }
function CalcTree(Tree: PNode): integer;
var num1, num2: integer;
begin
  if Tree^.left = nil then begin
    Result := Ord(Tree^.data) - Ord('0');
    Exit;
  end;
 num1 := CalcTree(Tree^.left);
 num2 := CalcTree(Tree^.right);
 case Tree^.data  of
   '+': Result := num1+num2;
   '-': Result := num1-num2;
   '*': Result := num1*num2;
   '/': Result := num1 div num2;
   else Result := MaxInt;
 end;
end;
```

вернуть число, если это лист

вычисляем операнды (поддеревья)

выполняем операцию

некорректная операция

Основная программа

```
{ Ввод и вычисление выражения с помощью
дерева }
program qq;
var Tree: PNode;
    Expr: string;
{ процедуры и функции }
begin
  write('Введите выражение > ');
  readln( Expr );
  Tree := MakeTree( Expr, 1, Length(Expr) );
  writeln(' = ', CalcTree(Tree) );
end.
```

Дерево игры

Задача.

Перед двумя игроками лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй – 2 камня. У каждого игрока неограниченно много камней.

Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или увеличивает в 3 раза число камней в какой-то куче, или добавляет 1 камень в какую-то кучу.

Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 16.

Кто выигрывает при безошибочной игре – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Как должен ходить выигрывающий игрок?

Дерево игры

игрок 1 | игрок 2 | игрок 1 | игрок 2

- 3, 2
  - 9, 2 → 27, 2
  - 3, 6 → 3, 18
  - 4, 2
    - 12, 2 → 36, 2
    - 4, 6 → 4, 18
    - 5, 2 → 15, 2
    - 4, 3
      - 12, 2 → 36, 2
      - 4, 6 → 12, 6
      - 5, 3 → 15, 3
      - 4, 4 → 12, 4
  - 3, 3
    - 4, 3
    - 9, 3 → 27, 3

выиграл игрок 1

ключевой ход

При правильной игре выиграет игрок 2!

Задания

«4»: «Собрать» программу для вычисления правильного арифметического выражения, включающего только однозначные числа и знаки операций +, –, * , /.

«5»: То же самое, но допускаются также многозначные числа и скобки.

«6»: То же самое, что и на «5», но с обработкой ошибок (должно выводиться сообщение).

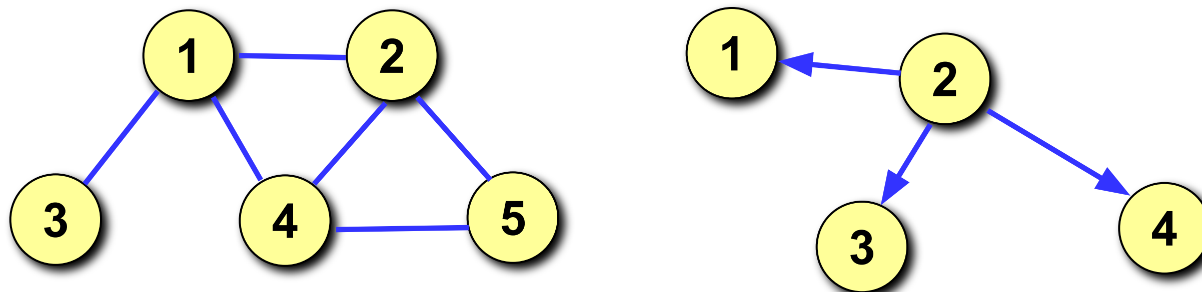
Динамические структуры данных (язык Паскаль)

Тема 7. Графы

© К.Ю. Поляков, 2008-2010

Определения

Граф – это набор вершин (узлов) и соединяющих их ребер (дуг).



Направленный граф (ориентированный, орграф) – это граф, в котором все дуги имеют направления.

Цепь – это последовательность ребер, соединяющих две вершины (в орграфе – **путь**).

Цикл – это цепь из какой-то вершины в нее саму.

Взвешенный граф (сеть) – это граф, в котором каждому ребру приписывается вес (длина).

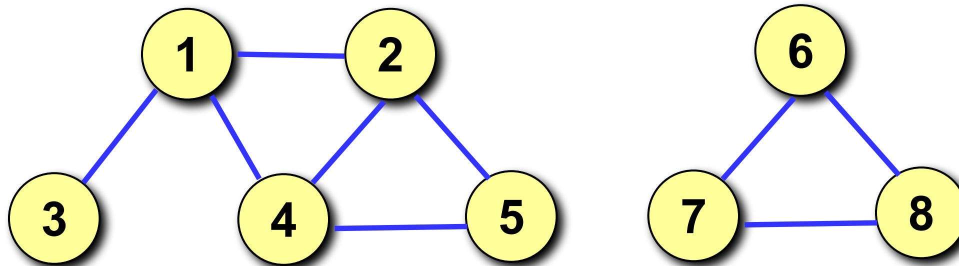
Дерево – это граф?

Да, без циклов!

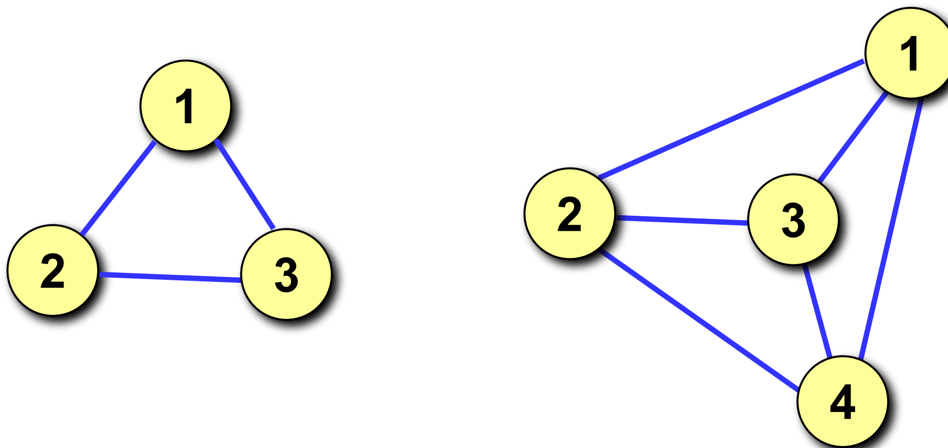
Определения

Связный граф – это граф, в котором существует цепь между каждой парой вершин.

k-связный граф – это граф, который можно разбить на **k** связных частей.

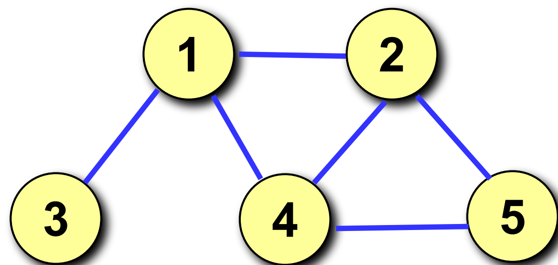


Полный граф – это граф, в котором проведены все возможные ребра (**n** вершин → **n(n-1)/2** ребер).



Описание графа

Матрица смежности – это матрица, элемент **M[i][j]** которой равен **1**, если существует ребро из вершины **i** в вершину **j**, и равен **0**, если такого ребра нет.

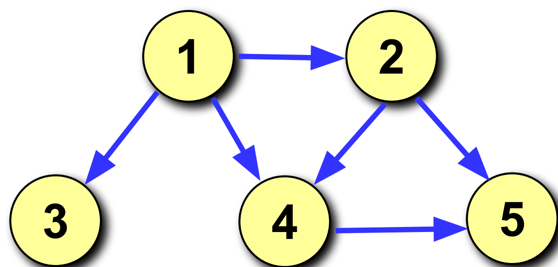


Симметрия!

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	1	0	0	1	1
3	1	0	0	0	0
4	1	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0

Список смежности

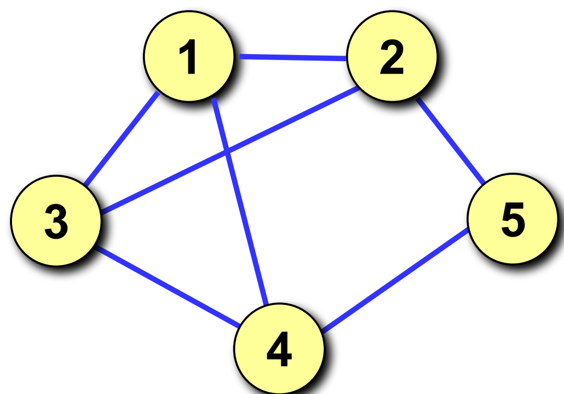
1	2	3	4		
2	1	4	5		
3	1				
4	1	2	5		
5	2	4			



	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

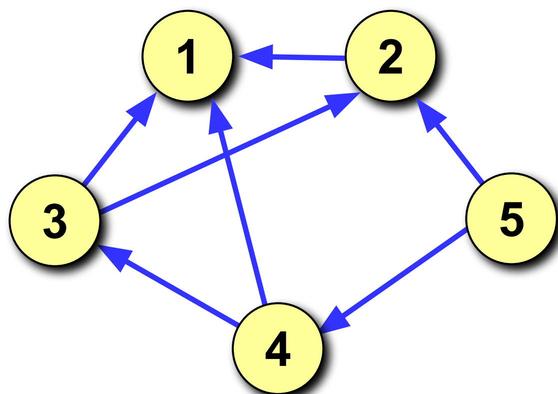
1	2	3	4		
2	4	5			
3					
4	5				
5					

Матрица и список смежности



	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

1					
2					
3					
4					
5					

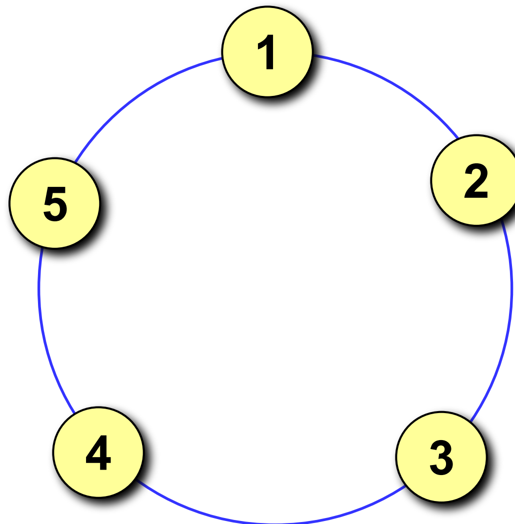


	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

1					
2					
3					
4					
5					

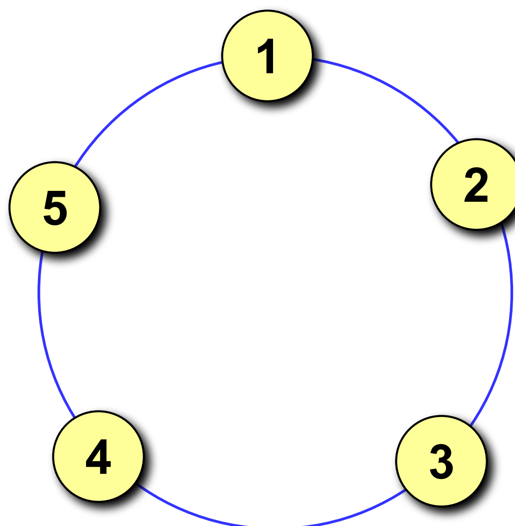
Построения графа по матрице смежности

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	1
3	1	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0



1					
2					
3					
4					
5					

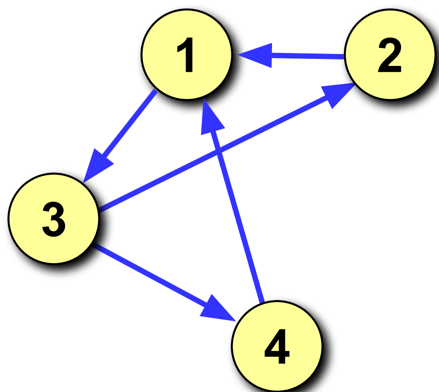
	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0
4	1	1	0	0	0
5	0	1	1	0	0



1					
2					
3					
4					
5					

Как обнаружить цепи и циклы?

Задача: определить, существует ли цепь длины **k** из вершины **i** в вершину **j** (или цикл длиной **k** из вершины **i** в нее саму).



M =

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	1	0	0	0
3	0	1	0	1
4	1	0	0	0

M^2[i][j]=1, если M[i][1]=1 и M[1][j]=1 или
M[i][2]=1 и M[2][j]=1 или
M[i][3]=1 и M[3][j]=1 или
M[i][4]=1 и M[4][j]=1

строка i

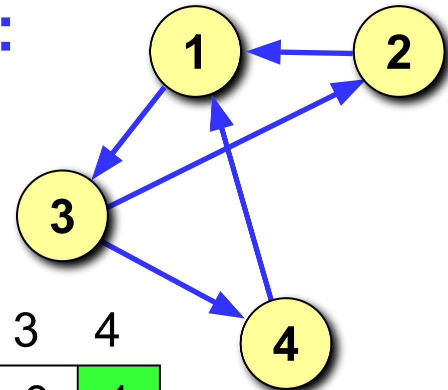
логическое умножение

столбец j

логическое сложение

Как обнаружить цепи и циклы?

Логическое умножение матрицы на себя:



матрица путей длины 2

$$M^2 = M \otimes M$$

M^2 =

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0

⊗

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0

=

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	1	0
3	1	0	0	0
4	0	0	1	0

$$M^2[3][1] = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

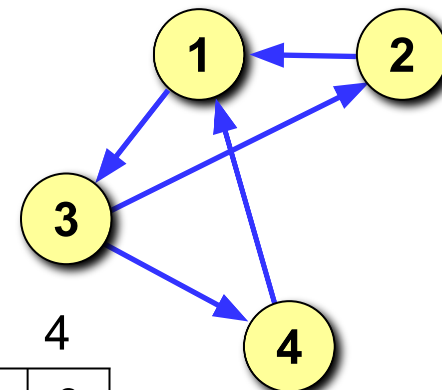
маршрут 3-2-1

маршрут 3-4-1

Как обнаружить цепи и циклы?

Матрица путей длины 3:

$$M^3 = M^2 \otimes M$$



$M^3 =$

0	1	0	1
0	0	1	0
1	0	0	0
0	0	1	0

$\otimes$

0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0

$=$

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	1	0	1

на главной диагонали – циклы!

$M^4 =$

1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1

$\otimes$

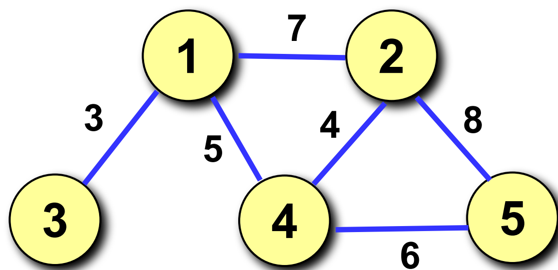
0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0

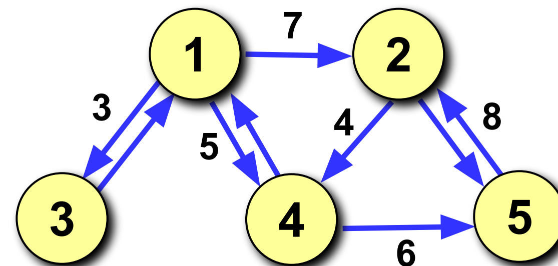
$=$

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	1	0	0	0
3	0	1	0	1
4	1	0	0	0

Весовая матрица

Весовая матрица – это матрица, элемент `W[i,j]` которой равен весу ребра из вершины `i` в вершину `j` (если оно есть), или равен ∞, если такого ребра нет.





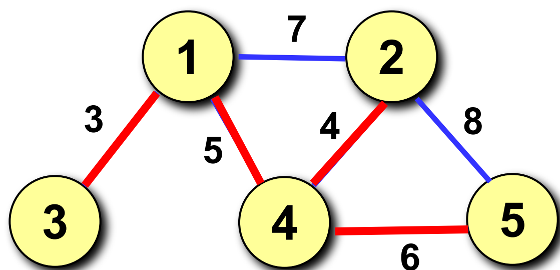
	1	2	3	4	5
1	0	7	3	5	∞
2	7	0	∞	4	8
3	3	∞	0	∞	∞
4	5	4	∞	0	6
5	∞	8	∞	6	0

	1	2	3	4	5
1	0	7	3	5	∞
2	∞	0	∞	4	8
3	3	∞	0	∞	∞
4	5	∞	∞	0	6
5	∞	8	∞	∞	0

Задача Прима-Краскала

Задача: соединить **N** городов телефонной сетью так, чтобы длина телефонных линий была минимальная.

Та же задача: дан связный граф с **N** вершинами, веса ребер заданы весовой матрицей **W**. Нужно найти набор ребер, соединяющий все вершины графа (***остовное дерево***) и имеющий наименьший вес.



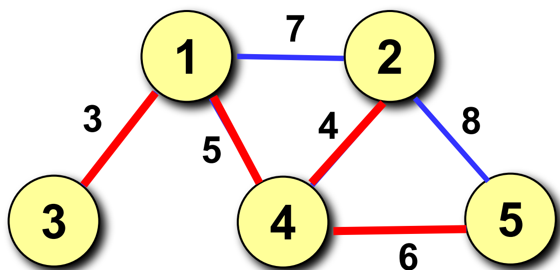
	1	2	3	4	5
1	0	7	3	5	∞
2	7	0	∞	4	8
3	3	∞	0	∞	∞
4	5	4	∞	0	6
5	∞	8	∞	6	0

Жадный алгоритм

Жадный алгоритм – это многошаговый алгоритм, в котором на каждом шаге принимается решение, лучшее в данный момент.

В целом может получиться не оптимальное решение (последовательность шагов)!

Шаг в задаче Прима-Краскала – это выбор еще невыбранного ребра и добавление его к решению.



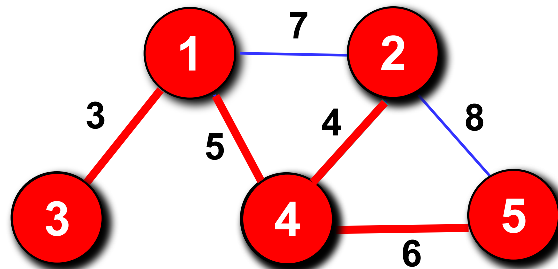
В задаче Прима-Краскала жадный алгоритм дает оптимальное решение!

Реализация алгоритма Прима-Краскала

Проблема: как проверить, что

1) ребро не выбрано, и
2) ребро не образует цикла с выбранными ребрами.

Решение: присвоить каждой вершине свой цвет и перекрашивать вершины при добавлении ребра.



Алгоритм:

1) покрасить все вершины в разные цвета;
2) сделать **`N-1`** раз в цикле:
   - выбрать ребро **`(i,j)`** минимальной длины из всех ребер, соединяющих вершины разного цвета;
   - перекрасить все вершины, имеющие цвет **`j`**, в цвет **`i`**.
3) вывести найденные ребра.

Реализация алгоритма Прима-Краскала

Структура «ребро»:

```
type rebro = record
       i, j: integer; { номера вершин }
     end;
```

Основная программа:

весовая матрица

цвета вершин

```
const N = 5;
var W: array[1..N,1..N] of integer;
    Color: array[1..N] of integer;
    i, j, k, min, col_i, col_j: integer;
    Reb: array[1..N-1] of rebro;
begin
...     { здесь надо ввести матрицу W }
for i:=1 to N do { раскрасить в разные цвета }
  Color[i] := i;
... { основной алгоритм - заполнение массива Reb }
... { вывести найденные ребра (массив Reb)}
end.
```

Реализация алгоритма Прима-Краскала

Основной алгоритм:

```
for k:=1 to N-1 do begin
  min := MaxInt;
  for i:=1 to N do
    for j:=i+1 to N do
     if (Color[i] <> Color[j]) and
        (W[i,j] < min) then begin
       min := W[i,j];
    Reb[k].i := i;
       Reb[k].j := j;
       col_i := Color[i];
       col_j := Color[j];
     end;
  for i:=1 to N do
    if Color[i] = col_j then
       Color[i] := col_i;
end;
```

Сложность алгоритма

Основной цикл:

```
for k:=1 to N-1 do begin
  ...
  for i:=1 to N do
    for j:=i+1 to N do
   ...
end;
```

три вложенных цикла, в каждом число шагов **<=N**

Количество операций:

O(N³) растет не быстрее, чем N^3

Требуемая память:

```
var W: array[1..N,1..N] of integer;
    Color: array[1..N] of integer;
    Reb: array[1..N-1] of rebro;
```

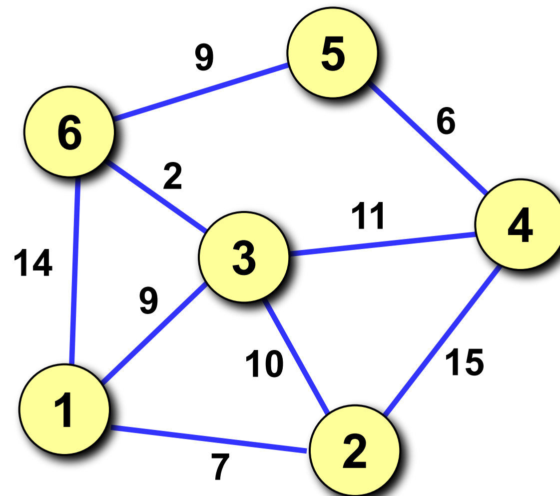
O(N²)

Кратчайшие пути (алгоритм Дейкстры)

Задача: задана сеть дорог между городами, часть которых могут иметь одностороннее движение. Найти кратчайшие расстояния от заданного города до всех остальных городов.

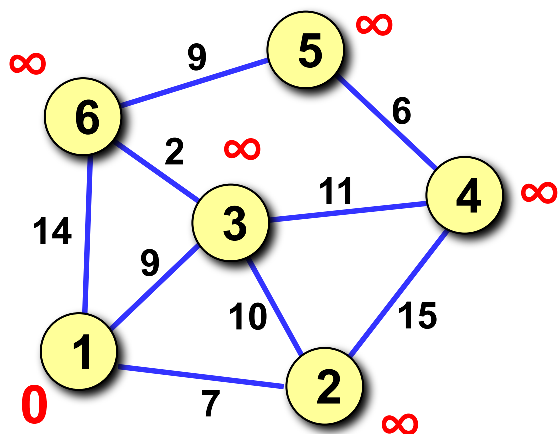
Та же задача: дан связный граф с **N** вершинами, веса ребер заданы матрицей **W**. Найти кратчайшие расстояния от заданной вершины до всех остальных.

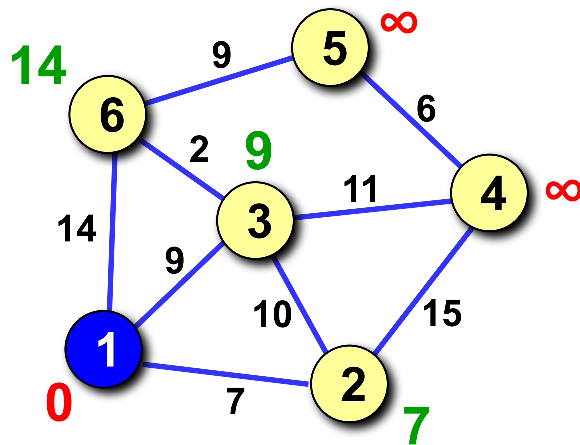
Алгоритм Дейкстры (*E.W. Dijkstra*, 1959)

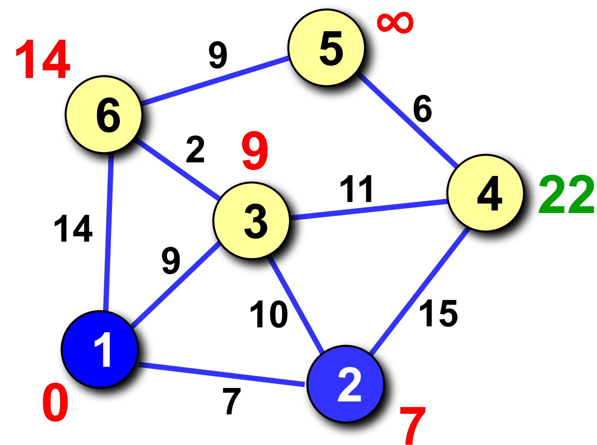


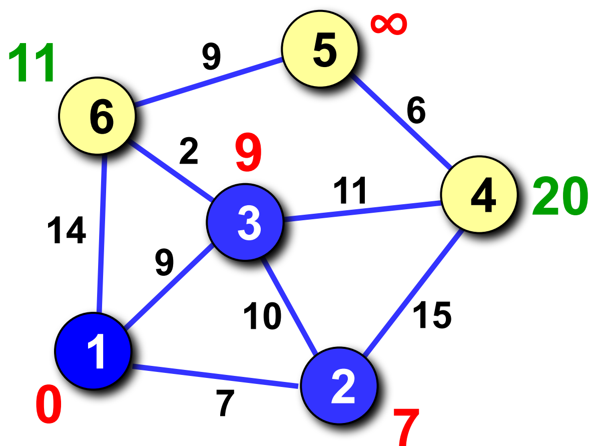
1) присвоить всем вершинам метку ∞;
2) среди нерассмотренных вершин найти вершину **j** с наименьшей меткой;
3) для каждой необработанной вершины **i**: если путь к вершине **i** через вершину **j** меньше существующей метки, заменить метку на новое расстояние;
4) если остались необработанны вершины, перейти к шагу 2;
5) метка = минимальное расстояние.

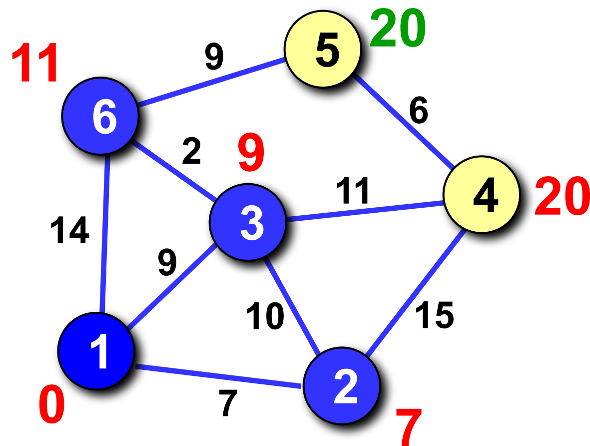
Алгоритм Дейкстры

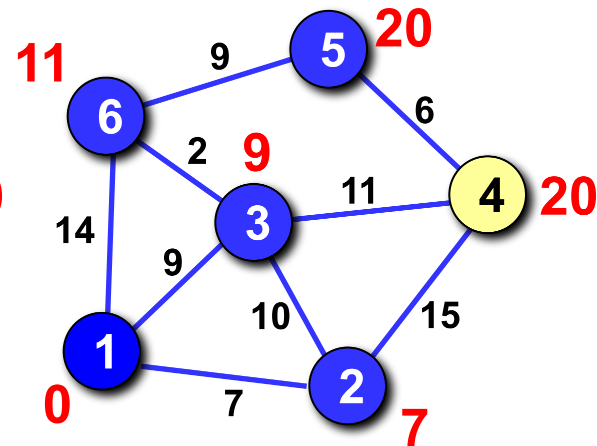












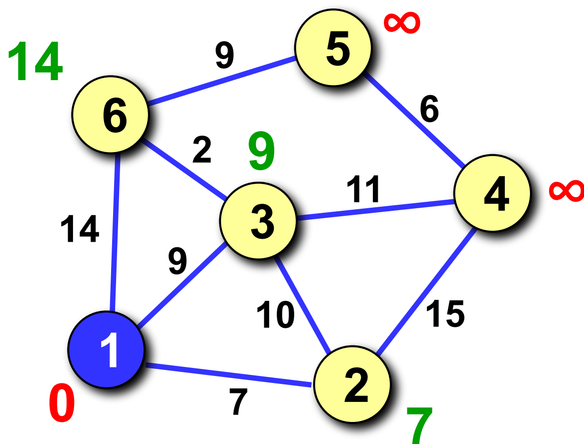
Реализация алгоритма Дейкстры

Массивы:

1) массив **a**, такой что **a[i]=1**, если вершина уже рассмотрена, и **a[i]=0**, если нет.
2) массив **b**, такой что **b[i]** – длина текущего кратчайшего пути из заданной вершины **x** в вершину **i**;
3) массив **c**, такой что **c[i]** – номер вершины, из которой нужно идти в вершину **i** в текущем кратчайшем пути.

Инициализация:

4) заполнить массив **a** нулями (вершины не обработаны);
5) записать в **b[i]** значение **W[x][i]**;
6) заполнить массив **c** значением **x**;
7) записать **a[x]=1**.



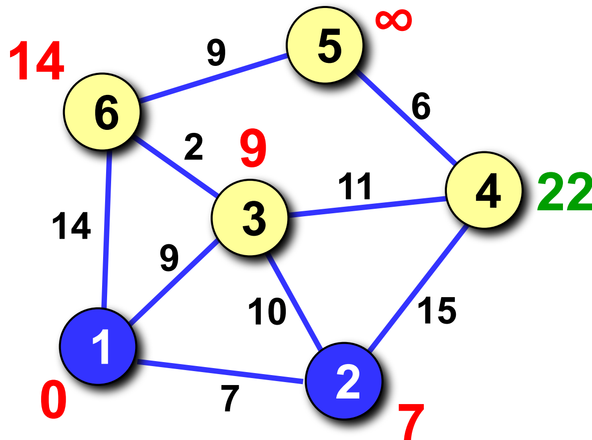
	1	2	3	4	5	6
a	1	0	0	0	0	0
b	0	7	9	∞	∞	14
c	0	0	0	0	0	0

Реализация алгоритма Дейкстры

Основной цикл:

1) если все вершины рассмотрены, то стоп.
2) среди всех нерассмотренных вершин (**a[i]=0**) найти вершину **j**, для которой **b[i]** – минимальное;
3) записать **a[j]:=1**;
4) для всех вершин **k**: если путь в вершину **k** через вершину **j** короче, чем найденный ранее кратчайший путь, запомнить его: записать **b[k]:=b[j]+W[j,k]** и **c[k]=j**.

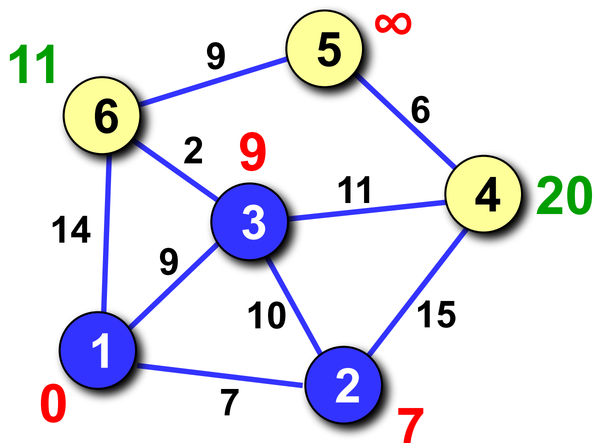
Шаг 1:



	1	2	3	4	5	6
a	1	1	0	0	0	0
b	0	7	9	22	∞	14
c	0	0	0	1	0	0

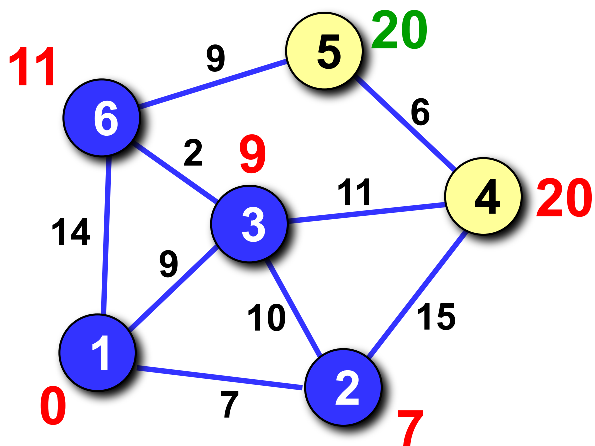
Реализация алгоритма Дейкстры

Шаг 2:

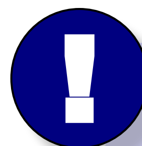


	1	2	3	4	5	6
a	1	1	1	0	0	0
b	0	7	9	20	∞	11
c	0	0	0	2	0	2

Шаг 3:



	1	4	3	4	5	6
a	1	1	1	0	0	1
b	0	7	9	20	20	11
c	0	0	0	2	5	2



Дальше массивы не изменяются!

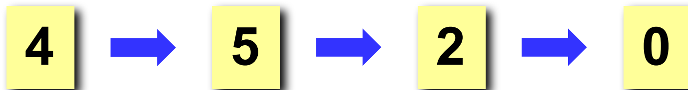
Как вывести маршрут?

Результат работа алгоритма Дейкстры:

	1	2	3	4	5	6
a	1	1	1	1	1	1
b	0	7	9	20	20	11
c	0	0	0	2	5	2

длины путей

Маршрут из вершины 0 в вершину 4:



Вывод маршрута в вершину `i` (использование массива `c`):

1) установить `z:=i`;
2) пока `c[i]<>x` присвоить `z:=c[z]` и вывести `z`.

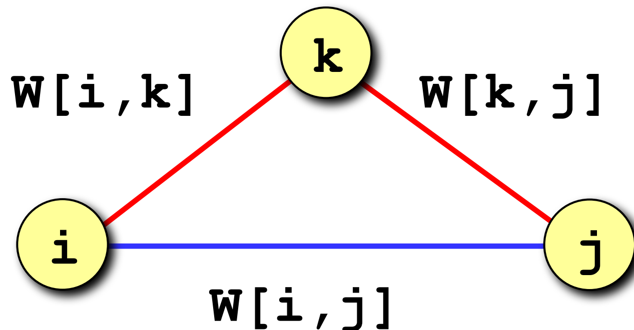
Сложность алгоритма Дейкстры:

два вложенных цикла по **N** шагов $O(N^2)$

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Задача: задана сеть дорог между городами, часть которых могут иметь одностороннее движение. Найти **все кратчайшие расстояния**, от каждого города до всех остальных городов.

```
for k: =1 to N
  for i: = 1 to N
    for j: = 1 to N
      if W[i,j] > W[i,k] + W[k,j] then
           W[i,j] := W[i,k] + W[k,j];
```



Если из вершины **i** в вершину **j** короче ехать через вершину **k**, мы едем через вершину **k**!

Нет информации о маршруте, только кратчайшие расстояния!

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Версия с запоминанием маршрута:

```
for i:=1 to N
  for j :=1 to N
    c[i,j] :=i;
...
for k: =1 to N
  for i: =1 to N
    for j: =1 to N
      if W[i,j] > W[i,k]+W[k,j] then begin
        W[i,j]:=W[i,k]+W[k,j];
        c[i,j] :=c[k,j];
      end;
```

i–ая строка строится так же, как массив **c** в алгоритме Дейкстры

в конце цикла **c[i,j]** – предпоследняя вершина в кратчайшем маршруте из вершины **i** в вершину **j**

Какова сложность алгоритма?

$O(N^3)$

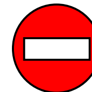
Задача коммивояжера

Задача коммивояжера. Коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из первого города и, посетив по разу в неизвестном порядке города **2,3,...N**, вернуться обратно в первый город. В каком порядке надо обходить города, чтобы замкнутый путь (тур) коммивояжера был кратчайшим?

Это NP-полная задача, которая строго решается только перебором вариантов (пока)!

Точные методы:

1) простой перебор;
2) метод ветвей и границ;
3) метод Литтла;
4) …

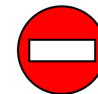


большое время счета для больших **N**

`O(N!)`

Приближенные методы:

5) метод случайных перестановок (*Matlab*);
6) генетические алгоритмы;
7) метод муравьиных колоний;
8) …



не гарантируется оптимальное решение

Другие классические задачи

Задача на минимум суммы. Имеется **N** населенных пунктов, в каждом из которых живет p_i школьников (**i=1,...,N**). Надо разместить школу в одном из них так, чтобы общее расстояние, проходимое всеми учениками по дороге в школу, было минимальным.

Задача о наибольшем потоке. Есть система труб, которые имеют соединения в **N** узлах. Один узел **S** является источником, еще один – стоком **T**. Известны пропускные способности каждой трубы. Надо найти наибольший поток от источника к стоку.

Задача о наибольшем паросочетании. Есть **M** мужчин и **N** женщин. Каждый мужчина указывает несколько (от **0** до **N**) женщин, на которых он согласен жениться. Каждая женщина указывает несколько мужчин (от **0** до **M**), за которых она согласна выйти замуж. Требуется заключить наибольшее количество моногамных браков.

Конец фильма