Тема проекта:

Иррациональные уравнения в школьном курсе математики. Методы решения.

*Актуальность темы

Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Однако в школе иррациональным уравнениям уделяется достаточно мало внимания, но задания по теме "Иррациональные уравнения" встречаются на ЕГЭ, и они могут стать " камнем преткновения " для выпускников.

Так как при решении иррациональных уравнений в школе применяются тождественные преобразования, то чаще всего возникают ошибки, которые обычно связаны с потерей или приобретением посторонних корней в процессе решения. Поэтому необходимо рассмотреть такие ситуации, показать, как их распознавать и как с ними можно бороться.

Цель проекта.

Разработать методику обучения решению иррациональных уравнений в школе, а также выявить возможности использования общих методов решения уравнений при решении иррациональных уравнений.

*Задачи проекта:

- **Подобрать теоретический материал, связанный с равносильностью уравнений, равносильностью преобразований, методами решения иррациональных уравнений;**
- **Показать, как общие методы решения уравнений применимы для решения иррациональных уравнений;**
- **Подобрать примеры решения иррациональных уравнений демонстрации излагаемой теории.**

Содержание

Именно математика

дает надежнейшие правила:

кто им следует – тому

не опасен обман чувств.

Л. Эйлер

Определение

Иррациональное уравнение – уравнение, содержащее переменную под знаком корня (радикала).

(примеры)

(справка)

Какие из данных уравнений являются иррациональными?

1. $$\frac{x}{\sqrt{2}-1}+3x^2=4$$

2. $$3x-\sqrt[3]{7}=0$$

3. $$\sqrt{x-1}=x-3$$

4. $$2^{\sqrt{x}}=2^x$$

Работаем устно

1) $\sqrt[3]{x} = 2;$

2) $\sqrt{x-1} = 2;$

3) $\sqrt[3]{x} = 0;$

4) $\sqrt{2-x} = 0;$

5) $\sqrt[4]{-x} = -1$

6) $\sqrt[8]{2x} = 1$

7) $\sqrt{x-2} = -\sqrt{2};$

8) $\sqrt[4]{-5-x^2} = 25;$

9) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-3} = -2;$

10) $\sqrt{2-x} + 0{,}01 = 0.$

Методы решения

Графический

(Функционально-графический)

Основные алгебраические

Специальные

- **Возведение обеих частей уравнения в степень**

(подробнее)

- **Переход к равносильной системе**

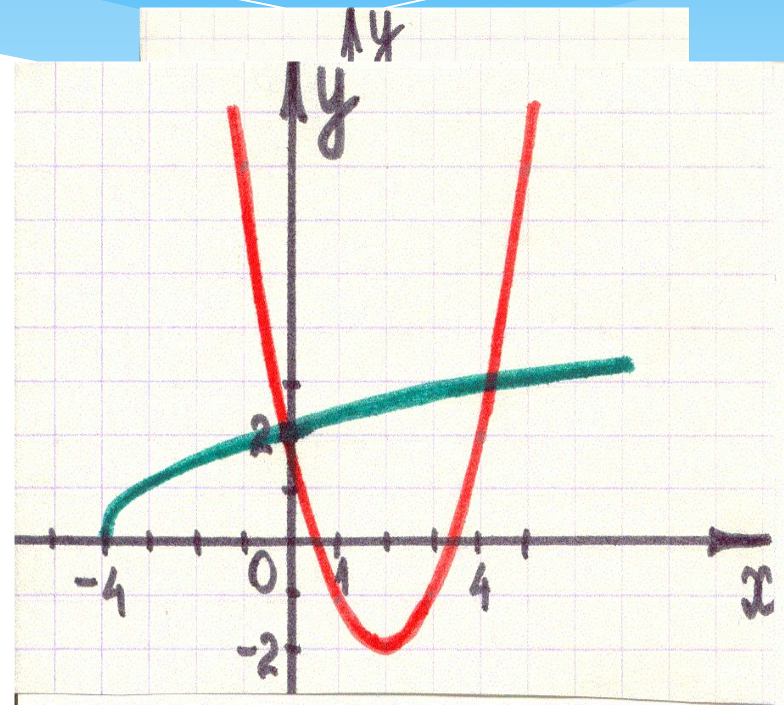
(подробнее)

Графический [метод] *(пример 1)*

* Решите графически уравнение

$$\sqrt{x+4} = x^2 - 4x + 2$$

1) Строим график $y = \sqrt{x+4}$.
2) Строим график $y = x^2 - 4x + 2$ в той же системе координат.
3) Находим абсциссы точек Пересечения графиков (значения берутся приближенно).
4)Записываем ответ.



Ответ. x=0; x=4,2.

Функционально-графический метод

Пример: решите уравнение $\sqrt{x+7} = 5 - x$

Решение.

1. f(x)= $\sqrt{x+7}$ - возрастает на D(f).
2. g(x)=5-x, убывает на D(g).
3. Уравнение f(x)=g(x) имеет не более одного корня.

4. Подбором находим, что X=2.

Ответ. 2.

Решите уравнения

1) $\sqrt[3]{3x-1} = x-1,$ (алгоритм 2)

2) $\sqrt{3-3x} = x-1.$ (алгоритм 1)

3) $\sqrt{x^2+2x+10} = 2x-1$

(алгоритм)

Алгоритм 1

При *n* – четном

1. Уедини корень (если необходимо);
2. Возведи обе части уравнения в степень n;
3. Если необходимо, то выполни п.1;
4. Реши полученное уравнение;
5. Выполни проверку!
6. Запиши ответ.

(к методам)

Алгоритм 2

При n - нечетном

1. Уедини корень (если необходимо);
2. Возведи обе части уравнения в степень n;
3. Если необходимо, то выполни п.1;
4. Реши полученное уравнение;
5. Запиши ответ.

(к методам)

Возведение в степень

$$\sqrt{3-3x}=x-1$$

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$3-3x=x^2-2x+1$$

Преобразуем: $x^2+x-2=0$

$$x=1,\quad x=-2$$

Проверка. Если x=1, то в левой части 0, в правой части 0, 0=0 (верно).
Если x=-2, то в левой части 3, в правой части -3, 3 не равно -3, значит, -2 не является корнем.

Ответ. 1.

Возведение в степень

* $\sqrt[3]{3x-1} = x-1$

Решение. Возведем обе части уравнения в 3-ю степень:

$$3x-1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Преобразуем:

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0$$

$$x = 0 \quad или \quad x = 3$$

Ответ. 0 ; 3.

Переход к равносильной системе

1. Определить условия (если n –четно), при которых обе части уравнения неотрицательны;
2. Возвести обе части уравнения в n-ю степень;
3. Составить систему из уравнения и неравенства;
4. Решить систему;
5. Записать ответ.

Определение. $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x), \text{что } 1)\ g(x) \geq 0,$

$$2)\ g^{2n}(x) = f(x).$$

Переход к равносильной системе

$$\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$$

Решение. Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ x^2+2x+10=4x^2-4x=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x-3=0, \\ x\ge \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array} \right. \\ x\ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Откуда *x=3*.

Ответ. 3.

Специальные методы решения

(справка)

* Метод пристального взгляда (справка)
* Найди ОДЗ
* Выполни замену
* Умножай на сопряженное
* Переходи к модулю (справка)
* Оцени обе части уравнения

Область определения уравнения (ОДЗ) –

это все значения переменной, при которых данное уравнение имеет смысл.

Замечание. ***Если ОДЗ уравнения есть пустое множество, то говорят, что данное уравнение не определено на множестве R и решений заведомо быть не может.***

Справка

- Корень n-й степени из a $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ - это такое число b, что $b^n = a$
- Арифметический корень n-й степени:

$$\sqrt[n]{a} = b, \quad \text{что} \quad 1)\ b \geq 0, \quad 2)\ b^n = a.$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \ n - \text{нечетно},$$

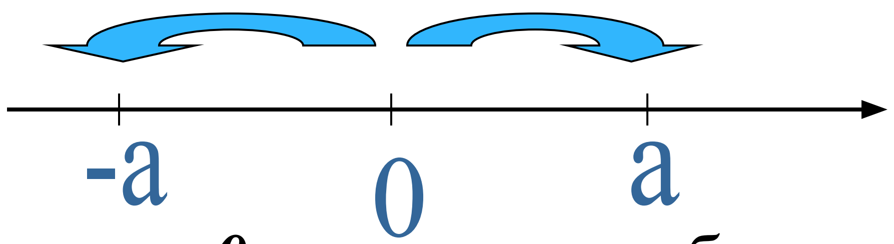
$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \ n - \text{четно},$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \ n - \text{любое}.$$

Справка

Модуль числа:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -a, \text{ если } a \leq 0. \end{cases}$$



Расстояние от ***0*** до точки, изображающей ***a*** на числовой оси

Источники:

- А. Н. Колмогоров «Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений».
- В. С. Крамор, К. Н. Лунгу, А. К. Лунгу. «Математика: Типовые примеры на вступительных экзаменах. Пособие для старшеклассников и абитуриентов».
- Э. Н. Балаян «Практикум по решению задач. Иррациональные уравнения, неравенства и системы».
- Л. О. Денищева, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков и др. «Готовимся к Единому Государственному экзамену. Математика».
- Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010»

*Спасибо за внимание.