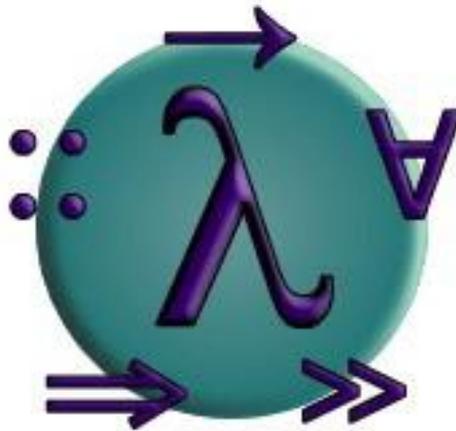


PROGRAMMING IN HASKELL



Рекурсия и функции высших порядков

Введение

Как известно, многие функции могут быть определены через другие функции

```
fac :: Int → Int  
fac n = product [1..n]
```

fac может быть определена через product (произведение)
чисел от 1 до n.

Вычисления происходят поэтапно путем применения функции к её аргументам
Например:

fac 4
=
product [1..4]
=
product [1,2,3,4]
=
1*2*3*4
=
2
4

Рекурсивные функции

В Хаскеле, как и в других языках программирования, функции, определенные через самих себя называются рекурсивными

```
fac 0 = 1
```

```
fac n = n * fac (n-1)
```

fac возвращает 1 от 0, для любого другого целого факториал определяется как произведение текущего числа на факториал предыдущего значения

Например:

fac 3

=

3 * fac 2

=

3 * (2 * fac 1)

=

3 * (2 * (1 * fac 0))

=

3 * (2 * (1 * 1))

=

3 * (2 * 1)

=

3 * 2

=

6

> fac (-1)
Exception: stack overflow

Рекурсия в списках

Рекурсию можно использовать не только для чисел, но и для списков.

```
product    :: Num a => [a] → a
product []  = 1
product (n:ns) = n * product ns
```

product возвращает 1 для пустого списка, для непустого голова умножается на product от хвоста.

Например:

product [2,3,4]
=
2 * product [3,4]
=
2 * (3 * product [4])
=
2 * (3 * (4 * product []))
=
2 * (3 * (4 * 1))
=
2
4

Используя ту же схему, что и в `product` можем определить `length` (длину списка).

```
length    :: [a] → Int
length []  = 0
length (_:xs) = 1 + length xs
```

`length` для пустого списка возвращает 0, для непустого списка применяем ту же функцию к хвосту списка

Например:

$$\begin{aligned} & \text{length } [1,2,3] \\ = & 1 + \text{length } [2,3] \\ = & 1 + (1 + \text{length } [3]) \\ = & 1 + (1 + (1 + \text{length } [])) \\ = & 1 + (1 + (1 + 0)) \\ = & 3 \end{aligned}$$

Используя аналогичный образец рекурсии мы можем определить функцию reverse в списках.

```
reverse    :: [a] → [a]
reverse [] = []
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

reverse возвращает пустой список для исходного пустого списка, для непустого формируем новый список : к голове списка добавляем reverse для хвоста .

Например:

```
reverse [1,2,3]
=
reverse [2,3] ++ [1]
=
(reverse [3] ++ [2]) ++ [1]
=
((reverse [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
=
((([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1])
=
[3,2,1]
```

Несколько аргументов

Функции с более чем одним аргументом могут быть определены с помощью рекурсии. Например:

- Объединение элементов двух списков:

```
zip      :: [a] → [b] → [(a,b)]
zip []   _      = []
zip _    []     = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
```

- Удаление первых n элементов из списка:

```
drop      :: Int → [a] → [a]
drop 0 xs  = xs
drop _ []  = []
drop n (_:xs) = drop (n-1) xs
```

- Объединение двух списков:

```
(++)      :: [a] → [a] → [a]
[] ++ ys  = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

Быстрая сортировка

- Пустой список считается отсортированным;
- В непустом списке формируется два подсписка для дальнейшей сортировки – в одном находятся элементы, меньше по значению, чем голова, в другом - элементы, большие, чем голова. Процедура сортировки повторяется для каждого из полученных списков.

Используя рекурсию, опишем данный алгоритм:

```
qsort    :: Ord a => [a] -> [a]
qsort [] = []
qsort (x:xs) =
  qsort smaller ++ [x] ++ qsort larger
  where
    smaller = [a | a ← xs, a ≤ x]
    larger  = [b | b ← xs, b > x]
```

Note:

- Данный вариант является, пожалуй, самой простой реализацией сортировки

Сократим qsort как q

q [3,2,4,1,5]



q [2,1] ++ [3] ++ q [4,5]



q [1] ++ [2] ++ q []

q [] ++ [4] ++ q [5]



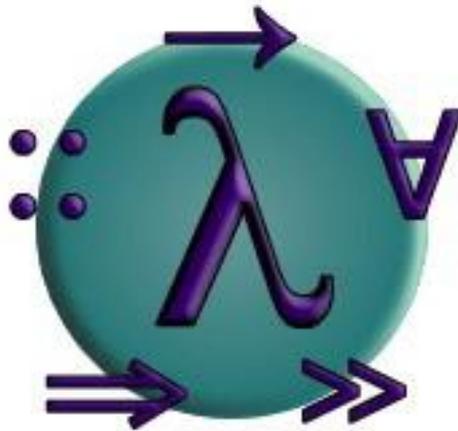
[1]

[]

[]

[5]

PROGRAMMING IN HASKELL



Функции высших порядков

Введение

Функции, которые принимают в качестве аргумента функцию или возвращают функцию в качестве результата называются функциями высших порядков.

```
twice  :: (a → a) → a → a  
twice f x = f (f x)
```

twice принимает в качестве первого аргумента функцию.

Функция map

Применяет заданную функцию к каждому элементу списка

```
map :: (a → b) → [a] → [b]
```

Например:

```
> map (+1) [1,3,5,7]
```

```
[2,4,6,8]
```

Функция `map` может быть определена через списковые конструкции:

$$\text{map } f \text{ } xs = [f \ x \mid x \leftarrow xs]$$

Либо через рекурсию:

$$\begin{aligned} \text{map } f \ [] &= [] \\ \text{map } f \ (x:xs) &= f \ x : \text{map } f \ xs \end{aligned}$$

Функция `filter`

Функция `filter` выбирает каждый элемент списка, который удовлетворяет заданному предикату.

```
filter :: (a → Bool) → [a] → [a]
```

Например:

```
> filter even [1..10]
```

```
[2,4,6,8,10]
```

filter легко может быть определена через списки:

```
filter p xs = [x | x ← xs, p x]
```

А также рекурсию:

```
filter p [] = []  
filter p (x:xs)  
  | p x      = x : filter p xs  
  | otherwise = filter p xs
```

функция foldr

Некоторые функции для обработки списков могут быть определены по следующей схеме рекурсии:

$$\begin{aligned}f [] &= v \\f (x:xs) &= x \oplus f xs\end{aligned}$$

f отображает пустой список в некоторое значение v , а непустой список – в некоторые действия с хвостом и головой списка (некоторая функция \oplus применяется к голове, и f применяется к хвосту).

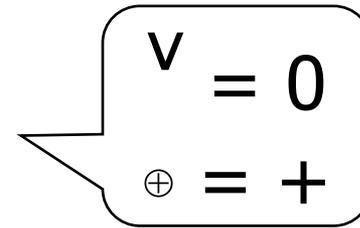
Например:

$$f [] = v$$

$$f (x:xs) = x \oplus f xs$$

$$\text{sum} [] = 0$$

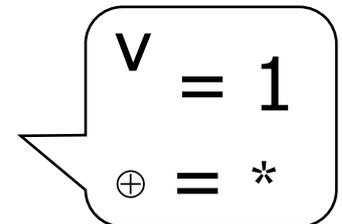
$$\text{sum} (x:xs) = x + \text{sum} xs$$



A callout box with a pointer to the left, containing the text $v = 0$ and $\oplus = +$.

$$\text{product} [] = 1$$

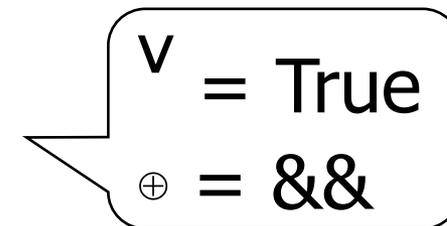
$$\text{product} (x:xs) = x * \text{product} xs$$



A callout box with a pointer to the left, containing the text $v = 1$ and $\oplus = *$.

$$\text{and} [] = \text{True}$$

$$\text{and} (x:xs) = x \&\& \text{and} xs$$



A callout box with a pointer to the left, containing the text $v = \text{True}$ and $\oplus = \&\&$.

Функция foldr (правая свертка) воплощает этот образец рекурсии, используя в качестве функции \oplus и значение v в качестве аргументов.

Например:

```
sum    = foldr (+) 0
product = foldr (*) 1
or     = foldr (||) False
and    = foldr (&&) True
```

foldr может быть описана с помощью рекурсии:

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

```
foldr f v [] = v
```

```
foldr f v (x:xs) = f x (foldr f v xs)
```

Хотя, можно воспринимать foldr не рекурсивно, если заменять каждый (:) в списке на заданную функцию, а [] на заданное значение

Например:

`sum [1,2,3]`

=

`foldr (+) 0 [1,2,3]`

=

`foldr (+) 0 (1:(2:(3:[])))`

=

`1+(2+(3+0))`

=

`6`

Заменяем каждый
(:) на (+) и
[] на 0.

Например:

```
product [1,2,3]
```

=

```
foldr (*) 1 [1,2,3]
```

=

```
foldr (*) 1 (1:(2:(3:[])))
```

=

```
1*(2*(3*1))
```

=

```
6
```

Заменяем (:) на (*)
и [] на 1.

Другие примеры

Вспомним функцию `length` :

```
length    :: [a] → Int
```

```
length [] = 0
```

```
length (_:xs) = 1 + length xs
```

Например:

```
length [1,2,3]
=
length (1:(2:(3:[])))
=
1+(1+(1+0))
=
3
```

Заменим (:) на
 $\lambda_n \rightarrow 1+n$
и [] на 0.

Таким образом :

```
length = foldr ( $\lambda\_n \rightarrow 1+n$ ) 0
```

Вспомним функцию reverse:

```
reverse [] = []
```

```
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

Например:

```
reverse [1,2,3]
```

=

```
reverse (1:(2:(3:[])))
```

=

```
(([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
```

=

```
[3,2,1]
```

Заменяем (:)
на $\lambda x xs \rightarrow xs ++ [x]$
и [] на [].

получаем

```
reverse =
```

```
foldr ( $\lambda x xs \rightarrow xs ++ [x]$ ) []
```

Наконец, отметим, что функция $(++)$ имеет более компактную реализацию через foldr :

```
(++ ys) = foldr (:) ys
```

Заменяем $(:)$
на $(:)$ и
 $[]$ на ys .

Другие функции

Функция (.) композиция

В математике композиция функций
когда результат работы одной функции полностью передается на вход другой функции.

$$(.) \quad :: \quad (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$$
$$f . g = \lambda x \rightarrow f (g x)$$

Например:

композицией двух функций f и g называется функция, заключающаяся в последовательном применении к чему-то функции f , а затем функции g

$$\text{odd} \quad :: \quad \text{Int} \rightarrow \text{Bool}$$
$$\text{odd} = \text{not} . \text{even}$$

Функция all определяет, соответствует ли каждый элемент списка указанному предикату.

```
all    :: (a → Bool) → [a] → Bool
all p xs = and [p x | x ← xs]
```

Например:

```
> all even [2,4,6,8,10]
```

```
True
```

Функция any определяет, есть ли в указанном списке хотя бы один элемент, соответствующий предикату.

```
any    :: (a → Bool) → [a] → Bool
any p xs = or [p x | x ← xs]
```

Например:

```
> any (== ' ') "abc def"
```

```
True
```

Функция takeWhile выбирает элементы из списка, пока они соответствуют указанному предикату.

```
takeWhile :: (a → Bool) → [a] → [a]
takeWhile p []      = []
takeWhile p (x:xs)
  | p x              = x : takeWhile p xs
  | otherwise        = []
```

Например:

```
> takeWhile (/= ' ') "abc def"
"abc"
```

Обратная функция dropWhile удаляет из списка элементы, пока они соответствуют предикату.

```
dropWhile :: (a → Bool) → [a] → [a]
dropWhile p []      = []
dropWhile p (x:xs)
  | p x              = dropWhile p xs
  | otherwise        = x:xs
```

For example:

```
> dropWhile (== ' ') "   abc"
"abc"
```