

# Основы теории вероятности и математической статистики

Лектор: Зелеев М.Х.

- **Событием** называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта;
- События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других. Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте);

- **Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта;
- **Достоверным событием** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта. Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

**Вероятностью** события **A** называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события **A** равна отношению **числа, благоприятствующих** событию **A** исходов опыта **к общему числу** попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Очевидно, что вероятность **достоверного** события равна **единице**, а вероятность **невозможного** — равна **нулю**. Таким образом, **значение вероятности** любого события — есть положительное число, заключенное **между нулем и единицей**.

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление **красного**, **зеленого** и белого шаров составляют полную группу событий.

Обозначим появление красного шара - событие А, появление зеленого - событие В, появление белого –С.

Тогда в соответствии с записанными выше формулами получаем:

$$P(A)=3/10; P(B)=2/10; P(C)=5/10.$$

**Относительной частотой** события  $A$  называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие  $A$  к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:  $W=2/5$ .

**Вероятность суммы** двух несовместных событий  
равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

**Следствие 1:** Если события образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_i P(A_i) = 1$$

Для рассмотренного выше примера:  
 $2/10+3/10+5/10=1$ .

**Следствие 2:** Сумма вероятностей  
противоположных событий равна единице.

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Вероятность произведения двух независимых событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на вероятность другого:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$



**Пример.** Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна  $P(A) = 0,9$ , для второго –  $P(B) = 0,8$ . Определить вероятность того, что в цель попадёт хотя бы один стрелок.

**Решение.**  $q(A) = 1 - 0,9 = 0,1$  (вероятность промаха первого стрелка);  $q(B) = 1 - 0,8 = 0,2$  (вероятность промаха второго стрелка); тогда вероятность одновременного промаха обоих стрелков определится следующим образом:

$q(AB) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02$ . Событие противоположное этому событию заключается в поражении цели хотя бы одним стрелком. Следовательно, искомая вероятность  $P = 1 - 0,02 = 0,98$ .

## Повторение испытаний. Формула Бернулли.

Пусть в результате  $n$  независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие  $A$  наступает с вероятностью  $P(A)=p$ , а противоположное ему событие с вероятностью  $P(\bar{A})=1-p=q$ .

Если в результате  $n$  опытов событие  $A$  наступает ровно  $m$  раз, то остальные  $n-m$  раз это событие не наступает. Событие  $A$  может появиться  $m$  раз в  $n$  испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ . Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли**:

$$p_{n,m} = C_{n,m} p^m q^{n-m}$$

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали три раза.

$$p_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} 0,4^3 0,6^2 = 0,23$$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ;  $3! = 6$ ;  $2! = 2$ ;  $C_{5,3} = 10$ .

$P_{5,5} = 0,078$ ;  $p_{5,4} = 0,259$ ;  $p_{5,3} = 0,344$ ;  $p_{5,2} = 0,23$ ;

$p_{5,1} = 0,077$ ;  $p_{5,0} = 0,012$ .

$0,078 + 0,259 + 0,344 + 0,23 + 0,077 + 0,012 = 1$

## Случайные величины.

**Случайной величиной** называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

**Дискретной случайной величиной** называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

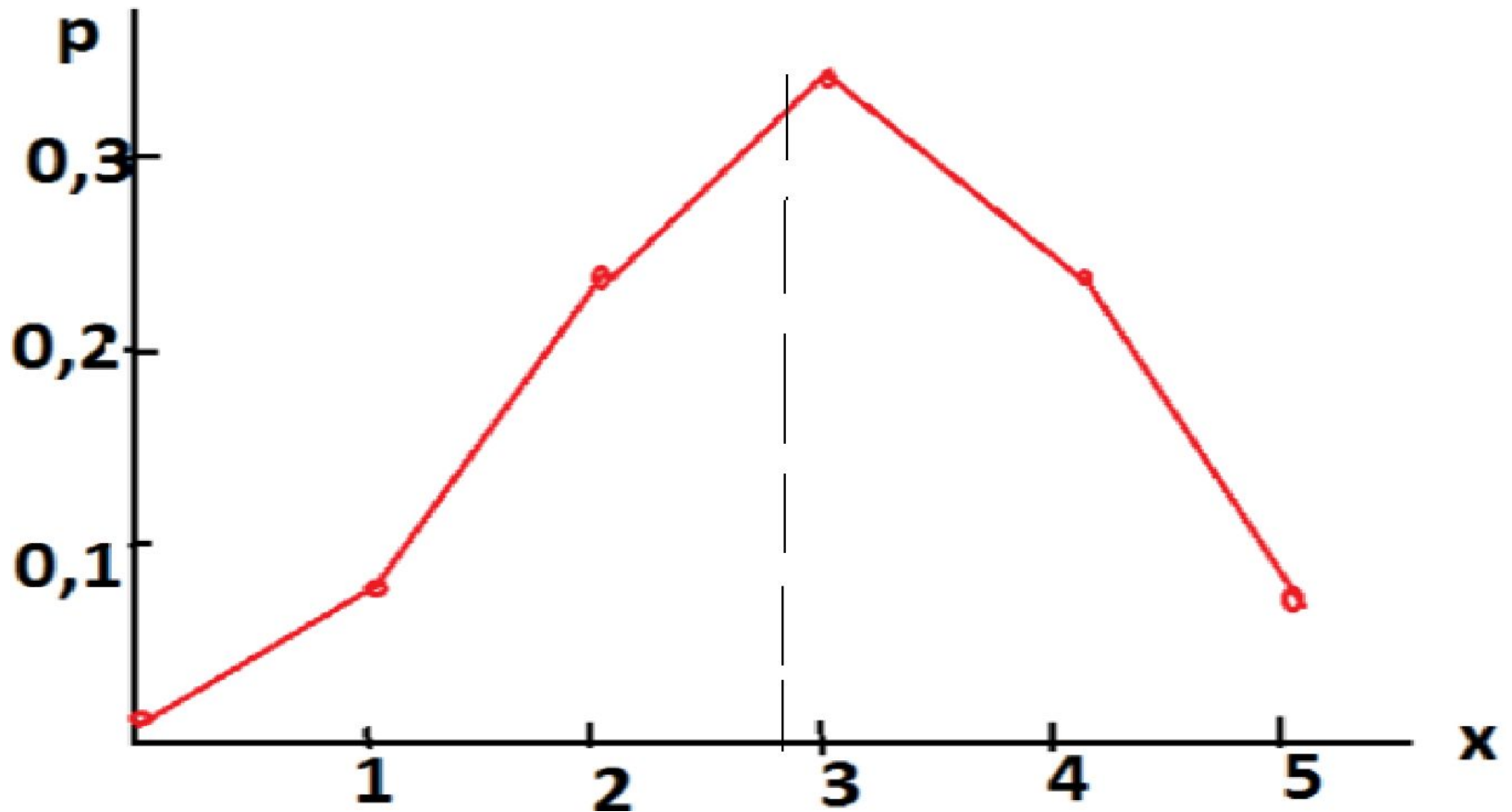
**Непрерывной случайной величиной** называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины.

Закон распределения может быть задан **аналитически, в виде таблицы или графически.**

Закон распределения для рассмотренного примера:

$x$	0	1	2	3	4	5
$p$	0,012	0,077	0,23	0,344	0,259	0,075



- **Функцией распределения** называют функцию  $F(x)$ , определяющую вероятность того, что случайная величина  $X$  в результате испытания примет значение, меньшее  $x$ :  $F(x)=P(X<x)$ .

Для рассмотренного примера:

$$F(x_0)=P(X<x_0)=0;$$

$$F(x_1)=P(X<x_1)=p_0=0,012;$$

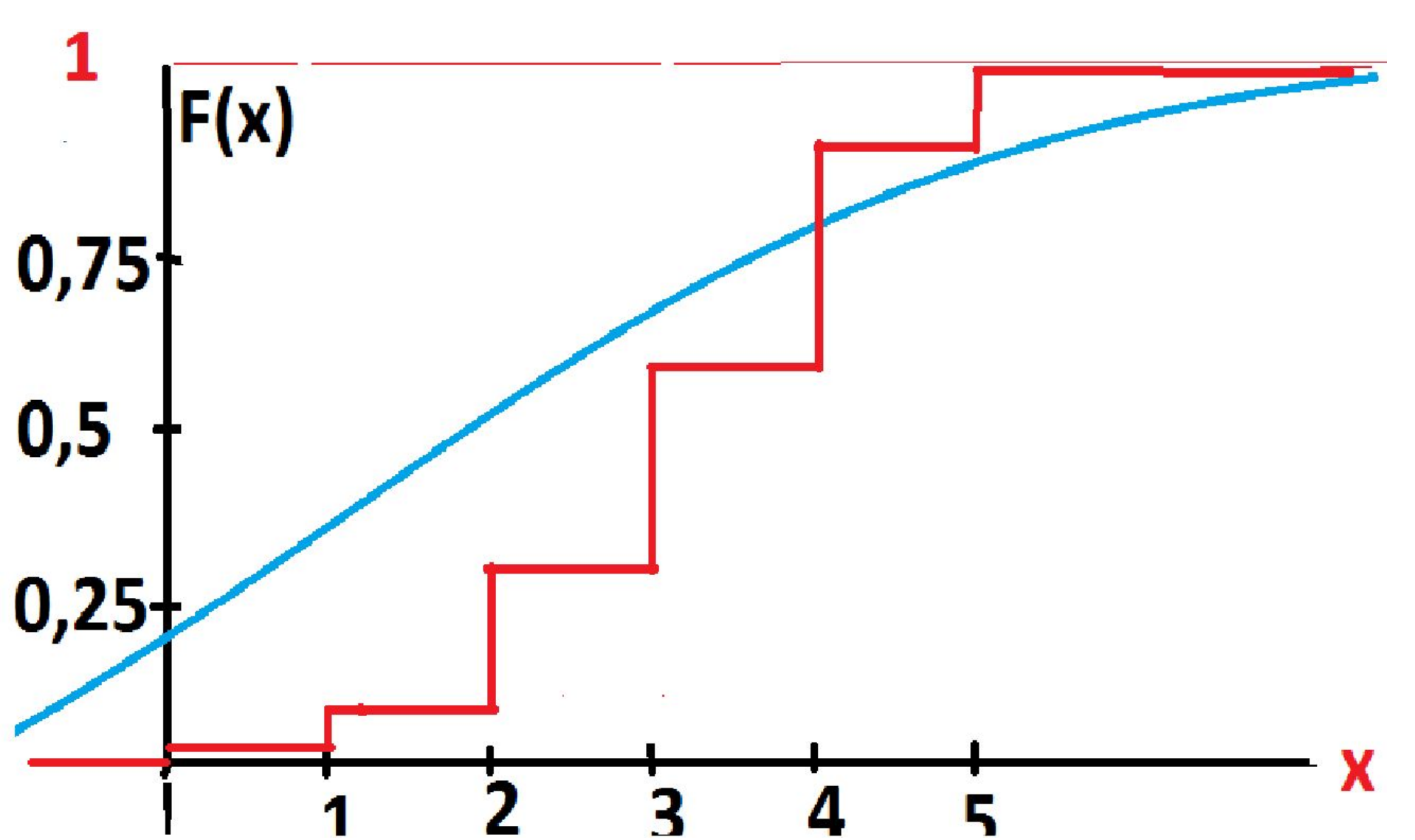
$$F(x_2)=P(X<x_2)=p_0+p_1 =0,089;$$

$$F(x_3)=P(X<x_3)=p_0+p_1 +p_2=0,319;$$

$$F(x_4)=P(X<x_4)=p_0+p_1 +p_2 +p_3=0,663;$$

$$F(x_5)=P(X<x_5)=p_0+p_1 +p_2 +p_3+p_4=0,922;$$

$$F(x)=P(X>x_5)=p_0+p_1 +p_2 +p_3+p_4+p_5=1.$$





**Плотностью распределения** вероятностей непрерывной случайной величины  $X$  называется функция  $f(x)$  – первая производная от функции распределения  $f(x)=F'(x)$ . Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**.

*Вероятность того, что непрерывная случайная величина  $X$  примет значение, принадлежащее интервалу  $(a, b)$ , равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от  $a$  до  $b$ .*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

# Числовые характеристики дискретных случайных величин.

**Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$\mu = M(x) = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины, показывает центр распределения.

Для рассмотренного выше примера:

$$\mu = 0,012 \cdot 0 + 0,077 \cdot 1 + 0,23 \cdot 2 + 0,344 \cdot 3 + 0,259 \cdot 4 + 0,078 \cdot 5 = 2,8.$$

**Дисперсией** (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$\sigma^2 = D(x) = M[x - M(x)]^2$$

Для рассмотренного выше примера вычислим:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & 0,012(0-2,8)^2 + 0,077(1-2,8)^2 + 0,23(2-2,8)^2 \\ & + 0,344(3-2,8)^2 + 0,259(4-2,8)^2 \\ & + 0,075(5-2,8)^2 = 1,255. \end{aligned}$$

**Средним квадратичным отклонением** называется квадратный корень из дисперсии:  $\sigma = \sqrt{D(x)}$

Для рассмотренного выше примера вычислим:

$$\sigma = \sqrt{1,255} = 1,12.$$

# Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

# Примеры дискретных распределений

**Биномиальным** называют закон распределения дискретной случайной величины  $X$  – числа появлений «успеха» в  $n$  независимых испытаниях (возможные значения случайной величины  $X$  –  $0, 1, 2, \dots, n$ ), в каждом из которых вероятность появления «успеха» равна  $p$ ; вероятность возможного значения  $X = k$  (числа  $k$  появлений «успеха») вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} .$$

**Математическое ожидание биномиального распределения** равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$M(X) = np.$$

**Дисперсия биномиального распределения** равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании:

$$D(X) = npq.$$

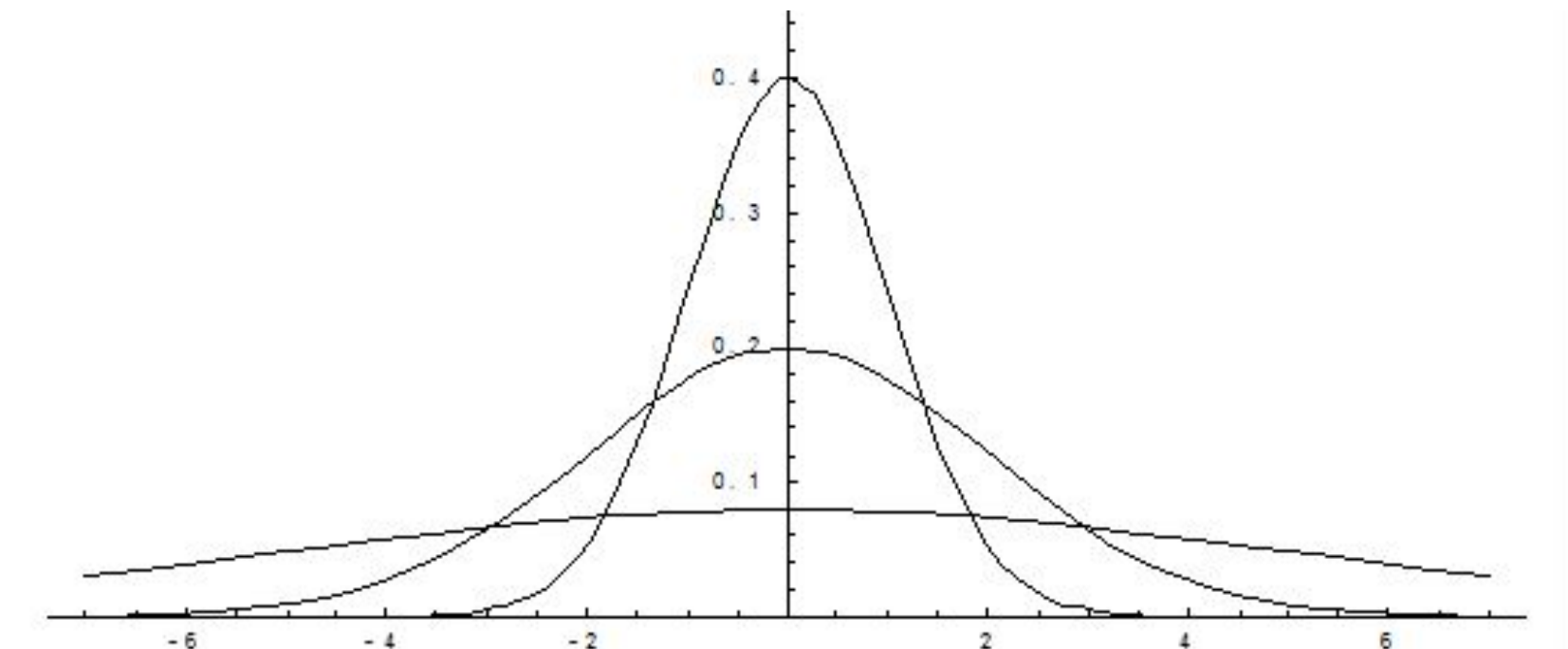
Если число испытаний велико, а вероятность  $p$  появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где  $k$  – число появлений события в  $n$  независимых испытаниях,  $\lambda = np$ , и говорят  $\lambda$  это случайная величина распределена по **закону Пуассона**.

**Нормальным** называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$





Для случайной величины  $X$ , распределенной по нормальному закону, вероятность того, что  $X$  примет значение, принадлежащее интервалу  $(\alpha; \beta)$ , вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \Phi(x) - \text{функция Лапласа.}$$

**Правило трёх сигм.** Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью 0,9973.

**Основные понятия математической статистики**  
**Генеральная совокупность** – совокупность всех изучаемых объектов,  $N$  – её объём (количество всех объектов).

**Выборочная совокупность** – совокупность объектов, отобранных для изучения,  $n$  – объём выборки.

**Объемом совокупности** (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Таким образом, вместо большой совокупности объектов изучается совокупность объёма, значительно меньшего по количеству объектов ( $n \ll N$ ).

Результаты, полученные при изучении выборки, распространяются на объекты всей генеральной совокупности. Для этого выборка должна быть

**репрезентативной** (представительной), то есть правильно представлять генеральную совокупность. Это обеспечивается случайностью отбора.

**Виды отбора:**

- простой случайный:
  - повторный; бесповторный;
- сложный случайный:
  - типический;
  - механический; серийный

# Статистическое распределение выборки и его характеристики

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем  $x_1$  наблюдалось  $n_1$  раз,  $x_2$  –  $n_2$  раз,  $x_k$  –  $n_k$  раз и  $n$  – объем выборки.

Наблюдаемые значения  $x_i$  называют **вариантами**, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, – **вариационным рядом**. Числа наблюдений называются частотами, а их отношения к объему выборки

$W_i = n_i / n$  – **относительными частотами**.

**Статистическим распределением** выборки называют перечень вариантов и

**Пример.** В результате испытания случайная величина  $X$  приняла следующие значения  $x_1 = 16, x_2 = 17, x_3 = 9, x_4 = 13, x_5 = 21, x_6 = 11, x_7 = 7, x_8 = 7, x_9 = 19, x_{10} = 5, x_{11} = 17, x_{12} = 5, x_{13} = 20, x_{14} = 18, x_{15} = 11, x_{16} = 4, x_{17} = 6, x_{18} = 22, x_{19} = 21, x_{20} = 15, x_{21} = 15, x_{22} = 23, x_{23} = 19, x_{24} = 25, x_{25} = 1$ .

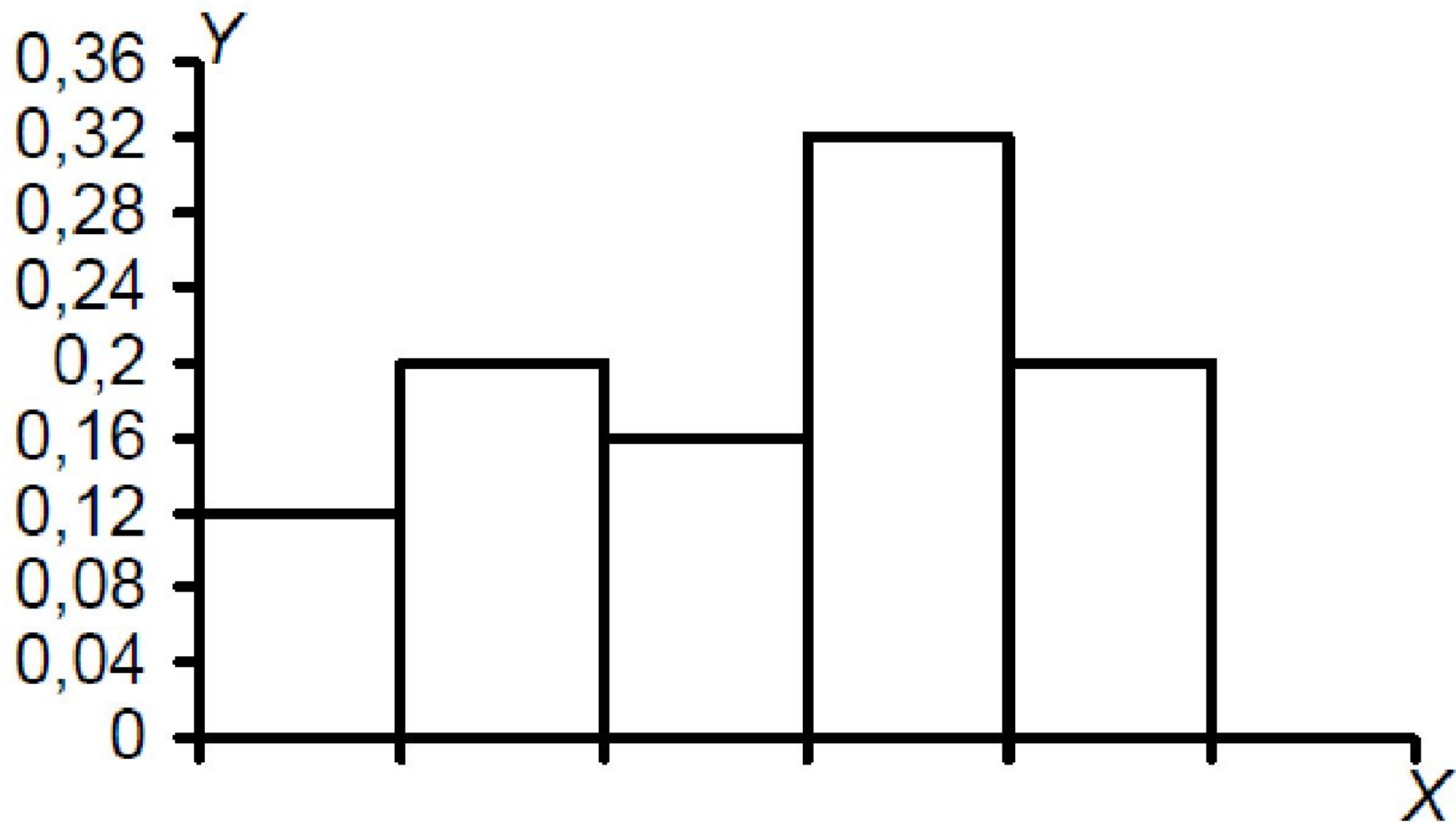
Требуется: составить таблицу статистического распределения, разбив промежуток  $(0, 25)$  на пять участков, имеющих одинаковые длины; построить гистограмму одинаковых частот.

**Решение.** Предварительно составим таблицу

$X$	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
$n_x$	3	5	4	8	5

Статистическое распределение имеет вид

$X$	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
$W$	0,12	0,2	0,16	0,32	0,2



• **Выборочное среднее:**

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \dots + x_k n_k}{n},$$

**Выборочная дисперсия:**

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x}_B)^2 n_1 + (x_2 - \bar{x}_B)^2 n_2 + \dots + (x_k - \bar{x}_B)^2 n_k}{n},$$

$$D_B = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \text{ где } \overline{x^2} = \frac{x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \dots + x_k^2 n_k}{n},$$

$\sigma_B$  – **выборочное среднее квадратичное отклонение**

$$\sigma_B = \sqrt{D_B},$$

**Эмпирической функцией распределения** (функцией распределения выборки) называют функцию  $F^*(x)$ , определяющую для каждого значения  $x$  относительную частоту события  $X < x$ :

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

Где  $n_x$  — число элементов выборки, меньших  $x$ ;  $n$  — объем выборки.



# Точечные оценки параметров генеральной совокупности

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Оценка параметра называется несмещённой, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру.  $M(\tilde{\Theta}_n) = \Theta_n$ .

В противном случае оценка называется смещённой.

Оценка называется состоятельной, если она удовлетворяет закону больших чисел, т.е. сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1.$$

Несмещённая оценка  $\tilde{\Theta}_n$  параметра  $\Theta$  называется **эффективной**, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещённых оценок параметра  $\Theta$ , вычисленных по выборкам одного и того же объёма  $n$ .

Параметры генеральной совокупности  $\bar{x}_\Gamma$  – генеральная средняя и  $D_\Gamma$  – генеральная дисперсия оцениваются по соответствующим параметрам выборки:

$$\bar{x}_\Gamma \approx \bar{x}_B, \quad D_\Gamma \approx D_B \quad (n \geq 30), \quad \sigma_\Gamma \approx \sqrt{D_\Gamma}.$$

$$D_\Gamma \approx S^2 \quad (n < 30),$$

**Интервальная оценка (доверительный интервал) для генеральной средней**

**Интервальной** называют оценку, которая определяется двумя числами— концами интервала.

**Доверительным интервалом** для параметра  $\Theta$  называется интервал  $(\Theta_1, \Theta_2)$ , содержащий истинное значение  $\Theta$  с заданной вероятностью  $P(\Theta_1 < \Theta < \Theta_2) = 1 - \alpha$ .

$\gamma = 1 - \alpha$  называется **доверительной вероятностью (надежностью)**, а значение  $\alpha$  — **уровнем значимости**.

**Интервальной оценкой (с надежностью  $\gamma$ ) математического ожидания  $a$  нормально распределенного количественного признака  $X$  по выборочной средней  $\bar{x}$  при известном среднем квадратическом отклонении  $\sigma$  служит доверительный интервал, т.е.**

$$\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ где } n - \text{объем выборки; } t -$$

значение аргумента функции Лапласа  $\Phi(t)$ , при котором  $\Phi(t) = \gamma/2$ .