Лекція №3. Системи лінійних рівнянь

1. Основні означення
2. Розв’язування системи лінійних рівнянь за формулами Крамера
3. Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв’язування
4. Розв’язування системи лінійних рівнянь методом Гауса
5. Однорідна система лінійних рівнянь
6. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

1. Основні означення

Системою m лінійних рівнянь з *n* невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$ називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Числа $a_{ij}, i = 1, 2,..., m; \quad j = 1, 2,..., n$ біля невідомих називаються *коефіцієнтами*, а числа b_i - *вільними членами* системи (1).

Система рівнянь (1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел $a_1, a_2,..., a_n$ називається *впорядкованою*, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано, яке з них є першим, яке другим, яке третім і т.д.

- Упорядкований набір *n* чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ називається *розв'язком системи* (1), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності. Таку систему чисел називають також *n-вимірним вектором*, або *точкою n-вимірного простору*.

- Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.
- Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, тобто існує тільки один набір *n* числа $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, який перетворює всі рівняння системи (1) в тотожності.

- Сумісна система називається *невизначеною*, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

- Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків.

2. Розв’язування системи лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай задано систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими *x* і *y*:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Виконуємо такі елементарні перетворення системи (2): спочатку помножимо перше рівняння на a_{22}, друге – на - (a_{11}) а потім складемо їх після цього перше рівняння помножимо на a_{12}, а друге на - (a_{11}) і складемо їх. Дістанемо систему

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ y(a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases} \qquad (3)$$

Систему (3) можна записати за допомогою визначників:

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x; \\ y \cdot \Delta = \Delta_y, \end{cases} \qquad (4)$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & c_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$

Визначник Δ , складений з коефіцієнтів системи (2), називається *визначником системи*. Визначники Δ_x òà $\Delta_ó$ утворюються з визначника Δ відповідно заміною стовпців при невідомих *x* та *y* вільними членами.

При розв'язуванні рівнянь (12) можуть бути такі випадки.

1) $\Delta \neq 0$, тоді система (10) має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (5)$$

Формули (5) називаються *формулами Крамера*.

2) $\Delta = 0; \Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$, тоді система (2) не має розв'язків, тобто є несумісною.

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, тоді система (2) зводиться до одного рівняння і має безліч розв'язків, тобто невизначеною.

Розглянемо тепер систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (6)$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0,$ то система (6) має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (7)$$

Якщо задано *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими (n>3).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (8)$$

і визначник системи $\Delta \neq 0,$ то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ldots x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}. \qquad (9)$$

У випадку, коли визначник системи дорівнює нулю, формули Крамера не мають змісту.

3. Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв’язування

Нехай задано систему (8), яка містить *n* лінійних рівнянь *n* з невідомими.

Введемо матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрицю *A*, складену з коефіцієнтів системи (9), називають *основою матрицею* системи, матрицю *X* – *матрицею з невідомих*, а матрицю *B* – *матрицею з вільних членів*. Тоді згідно з правилом множення матриць систему (9) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею *X*:

$AX=B$. (10)

Припустимо, що матриця *A* системи (8) має обернену матрицю A^{-1}; помножимо обидві частини рівності (10) на A^{-1} зліва:

$A^{-1}AX=A^{-1}B$.

Оскільки $A^{-1}A=E$ і $EX=X$, то $X=A^{-1}B$ (11)

Отже, щоб розв’язати систему рівнянь (8), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її справа на матрицю з вільних членів.

Формулу (11) називають матричним записом розв’язку системи (8) або розв’язком матричного рівняння (10).

Зауваження. Розв’язок системи рівнянь у матричній формі можливий лише тоді, коли матриця системи невироджена.

4. Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Гауса

Одним з найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод грунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь.

Нехай маємо систему (1), яка містить *m* рівнянь і *n* невідомих. Очевидно, серед коефіцієнтів a_{i1} хоча б один відмінний від нуля. Якщо ж $a_{11} = 0,$ то першим в системі (1) запишемо те рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 відмінний від нуля. Позначимо цей коефіцієнт через a_{11} .

Перетворимо систему (1), виключаючи x_1 в усіх рівняннях, крім першого.

Для цього помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{31}}{a'_{11}}$ і додамо до другого, потім помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{31}}{a'_{11}}$ і додамо до третього і т.д. При цьому може статись так, що друге невідоме x_2 також не входить в усі рівняння з номером $i > 1.$

Нехай x_k – невідоме з найменшим номером, яке входить в будь-яке рівняння, не враховуючи першого . Дістанемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots & + a'_{1n}x_n = b'_1; \\ a_{2k}x_k + \dots & + a'_{2n}x_n = b'_2; \quad k \geq 1, \quad a'_{11} \neq 0. \\ a_{mk}x_k + \dots & + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \qquad (12)$$

Застосовуючи до всіх рівнянь, крім першого, таку саму процедуру і виконавши ряд елементарних перетворень, дістанемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots & + a'_{1n}x_n = b'_1; \\ a''_{2k}x_k + \dots & + a''_{2n}x_n = b''_2; \\ a''_{3i} + \dots & + a''_{3n}x_n = b_3; \\ \dots \\ a_{m1}x_i + \dots & + a''_{mn}x_n = b''_m, \qquad a''_{11} \neq 0, \quad a''_{2k} \neq 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Якщо продовжити цей процес, то матимемо систему

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}x_1 + \dots & + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1; \\ \overline{a}_{2k}x_k + \dots & + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2; \\ \overline{a}_{3i}x_i + \dots & + \overline{a}_{3n}x_n = \overline{b}_3; \\ \dots \\ \overline{a}_{rs}x_s + \dots & \overline{a}_{rn}x_n = \overline{b}_r; \\ & 0 = \overline{b}_{r+1}; \\ & \dots \\ & 0 = \overline{b}_m. \end{cases} \qquad (14)$$

Таку систему рівнянь називають *східчастою* або *трапецієподібною*. Дослідимо цю систему.

1. Якщо система містить рівняння виду $0=b_t$ і $b_t \neq 0$ то вона несумісна.
2. Нехай система (14) не містить рівнянь виду $0=b_t$ і $b_t \neq 0$ Назвемо невідомі $x_1, x_k, x_i, \ldots, x_5$ з яких починаються перше, друге, ..., r - е рівняння, основними, а всі інші, якщо вони є, вільними. Основних невідомих за означенням r. Надаючи вільним невідомим довільні значення і підставляючи ці значення в рівняння системи, з r - го рівняння знайдемо x_5. Підставляючи це значення в перші r - 1 рівнянь і, піднімаючись вгору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, система має безліч розв'язків.
3. Нехай в системі (14) r=n Тоді вільних невідомих немає, тобто всі невідомі основні і система (14) має так званий *трикутний вигляд*:

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \cdots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1; \\ \qquad \bar{a}_{22}x_2 + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2; \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи знайдемо x_n і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі. Отже, в цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Зауваження. При розв’язуванні системи лінійних рівнянь методом Гауса зручніше приводити до трикутного чи трапецієподібного вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю цієї системи, тобто матрицю, утворену приєднанням до матриці її коефіцієнтів стовпця вільних членів. Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, приходимо до розв’язку системи.

5. Однорідна система лінійних рівнянь

Нехай задано однорідну систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок $x_1=0$, $x_2=0,\dots x_n=0$ тому що підстановка нулів замість невідомих в кожне з рівнянь (15) перетворює їх в тотожності. Ненульові розв'язки (якщо вони існують) системи (15) можна знайти методом Гауса.

Якщо визначник системи $\Delta\neq0$ то система має єдиний нульовий розв'язок. Якщо визначник $\Delta=0$ то система (16) має безліч розв'язків.

6. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Нехай задано систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (21)$$

Складемо основну матрицю *A* і розширену матрицю $\tilde{A}$ даної системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера-Капеллі

Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв’язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, то система має безліч розв’язків.